Anamorfosa ve Štěpánského nomogramech s unárním polem

Karel Havlíček
Katedra geometrie MFF UK

(Došlo 29. 2. 1968)

Nomogramy s unárním polem zavedl V. Štěpánský v pracích [2] až [9]. K příslušným kanonickým tvarům dospěl geometrickou cestou. Úkolem těchto řádků je ukázat, že tyto tvary lze též odvodit anamorfosou, obdobnou anamorfose Massauově v obyčejných spojnicových nomogramech. Omezíme se přitom na vztahy o pěti proměnných, protože práce s nimi je pro nomogramy s unárním polem typická; všechny další nomogramy vznikají z nich sdružováním, kombinováním a zobecňováním, resp. jejich specialisací (pro vztahy o více proměnných viz práce [4], [5], [6], [7], [9], pro vztahy o méně než pěti proměnných viz práce [2], [3], [6]). — Konečně je zde ukázáno, že dobrý přehled poskytuje tato anamorfosa při užití kolineace v konstrukci našich nomogramů.

Die Anamorphose in den Štěpánskýschen Nomogrammen mit Unarfeld. In der vorgelegten Arbeit wurde die analytische Begründung für die Konstruktion der Nomogrammen mit einem Unarfeld eingeleitet. Die kanonische Formen, welche Prof. Dr. V. Štěpánský in der Praxis realisiert hat, sind hier mit der Methode hergeleitet, die zur Anamorphose von J. Massau analogisch ist. Dabei ist die Kollineation dieser Nomogrammen durchgerechnet, besonders die Kollineation, bei welcher die Richtung der Isopleten des Unarfeldes ungeändert bleibt.

Kartézké souřadnice (nikoli nutně pravoúhlé) v rovině označme ξ, η a zachovejme v celé této práci praktickou myšlenku V. Štěpánského, že totiž příslušné unární pole je tvořeno přímkami rovnoběžnými s osou souřadnicovou η.

Předpokládejme, že základní vztah

$$F(x, y, z, t, u) = 0 \tag{1}$$

pro pět navzájem nezávislých reálných proměnných x, y, z, t, u lze přepsat na rovnici

$$\begin{vmatrix} G_2(y) - G_1(x), & F_1(x) - F_2(y), & F_2(y) \,.\, G_1(x) - F_1(x) \,.\, G_2(y) \\ G_4(t) - G_3(z), & F_3(z) - F_4(t), & F_4(t) \,.\, G_3(z) - F_3(z) \,.\, G_4(t) \\ 1 \quad , & 0 \quad , & -H_5(u) \end{vmatrix} = 0 \tag{2}$$

nebo na rovnici s ní ekvivalentní. Přitom F_i, G_i, H_5 $(i = 1, \ldots, 4)$ značí vždycky funkce jedné proměnné, která je vypsána v závorce u příslušného funkčního znaku; argumenty funkcí F_i, G_i, H_5 pro stručnost v dalším textu většinou vynechávám. Tím jsme provedli „rozloučení proměnných“ a odtud odvodíme zobrazovací rovnice nomogramu. Sledujme tři přímky o rovnicích (srovnej s rovnicemi (3) na str. 674 v právi [6]):

$$
\begin{aligned}
(G_2 - G_1)\,\xi + (F_1 - F_2)\,\eta + F_2G_1 - F_1G_2 &= 0,\\
(G_4 - G_3)\,\xi + (F_3 - F_4)\,\eta + F_4G_3 - F_3G_4 &= 0,\\
\xi \qquad\qquad\qquad - H_5 \qquad\qquad &= 0.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Determinant této soustavy je podle (2) roven nule. Je tedy podmínka (2) ekvivalentní s podmínkou, že tři přímky (3) se protínají v jednom bodě. První z těchto přímek je spojnicí bodů X, Y, při čemž bod X má souřadnice

$$\xi_1 = F_1(x), \qquad \eta_1 = G_1(x) \tag{4$_1$}$$

a bod Y souřadnice

$$\xi_2 = F_2(y), \qquad \eta_2 = G_2(y)\,. \tag{4$_2$}$$

O tom se snadno přesvědčíme dosazením souřadnic (4_1) a (4_2) do první z rovnic (3). Podobně druhá z přímek (3) je spojnicí bodů Z, T, při čemž bod Z má souřadnlce

$$\xi_3 = F_3(z), \qquad \eta_3 = G_3(z) \tag{4$_3$}$$

a bod T souřadnice

$$\xi_4 = F_4(t), \qquad \eta_4 = G_4(t)\,. \tag{4$_4$}$$

Poslední z rovnic (3) představuje přímku rovnoběžnou s osou η a procházející bodem U o souřadnicích

$$\xi_5 = H_5(u), \qquad \eta_5 = 0. \tag{4$_5$}$$

Rovnice (4_1) až (4_5) jsou zobrazovací rovnice nomogramu vztahu (1), resp. (2). Jde o konstrukci pěti stupnic. Stupnice proměnné x je vytvořena bodem X a její parametrické rovnice jsou rovnice (4_1). Podobně stupnice proměnných y, z, t jsou po řadě tvořeny body Y, Z, T a jejich parametrické rovnice jsou po řadě rovnice (4_2), (4_3), (4_4). Bod U vytvoří na ose ξ nebo na přímce s ní rovnoběžné (srovnej s rovnicemi (4_5)) pátou stupnici, a to stupnici funkce $H_5(u)$; přímky vedené jednotlivými body U rovnoběžně s osou η vytvoří unární pole tohoto nomogramu. Klíč k jeho čtení je zřejmý: spojnice bodů X, Y protíná spojnici bodů Z, T v bodě, kterým prochází jediná isopleta unárního pole, jejíž kóta u spolu s kótami x, y, z, t, bodů X, Y, Z, T řeší daný vztah (1).

Zdánlivá nepřehlednost determinantu (2) nás nutí k tomu, abychom k prakticky výhodným kanonickým tvarům docházeli vhodnou specializací funkcí F_i, G_i, H_5. Klademe-li například

$$
\begin{aligned}
&F_1 = 0, && F_2 = 1, && F_3 = 0, && F_4 = 1,\\
&G_1 = f_1(x), && G_2 = f_2(y), && G_3 = h_3(z), && G_4 = h_4(t)\,,
\end{aligned}
$$

$$H_5 = \frac{g_5(u)}{e_5(u) + g_5(u)}\,,$$

kde je $e_5(u) + g_5(u) \neq 0$, nabývá rovnice (2) tvaru

$$
\begin{vmatrix}
f_2(y) - f_1(x), & -1, & f_1(x)\\
h_4(t) - h_3(z), & -1, & h_3(z)\\
e_5(u) + g_5(u), & 0, & -g_5(u)
\end{vmatrix} = 0
\tag{5}
$$

čili

$$e_5(u)\,.\,f_1(x) + g_5(u)\,.\,f_2(y) = e_5(u)\,.\,h_3(z) + g_5(u)\,.\,h_4(t)\,, \tag{6}$$

což je první kanonický tvar V. Štěpánského [2], str. 119.

Zobrazovací rovnice (4_1) až (4_5) specialisují se pro náš tvar (5), resp. (6) v rovnice

$$\begin{aligned} \xi_1 &= 0, & \eta_1 &= f_1(x), \\ \xi_2 &= 1, & \eta_2 &= f_2(y), \\ \xi_3 &= 0, & \eta_3 &= h_3(z), \\ \xi_4 &= 1, & \eta_4 &= h_4(t), \\ \xi_5 &= \frac{g_5(u)}{e_5(u) + g_5(u)}, & \eta_5 &= 0. \end{aligned} \tag{7}$$

První čtyři stupnice jsou po dvou na dvou přímkách, rovnoběžných s isopletami unárního pole, což souhlasí s příklady, konstruovanými V. Štěpánským [2].

Volme v determinantu (2) dále tuto specialisaci:

$$F_1 = -f_1(x),\ F_2 = -f_2(y),\ F_3 = -g_3(z),\ F_4 = -g_4(t),$$
$$G_1 = f_1^2(x),\quad G_2 = f_2^2(y),\quad G_3 = g_3^2(z),\quad G_4 = g_4^2(t),$$
$$H_5 = \frac{g_5(u)}{e_5(u)},$$

kde se předpokládá $e_5(u) \neq 0$. Rovnice (2) nabývá pak tvaru

$$\begin{vmatrix} f_2^2(y) - f_1^2(x), & f_2(y) - f_1(x), & f_1(x) \,.\, f_2^2(y) - f_1^2(x) \,.\, f_2(y) \\ g_4^2(t) - g_3^2(z), & g_4(t) - g_3(z), & g_3(z) \,.\, g_4^2(t) - g_3^2(z) \,.\, g_4(t) \\ e_5(u) & , \quad 0 \quad , & -g_5(u) \end{vmatrix} = 0. \tag{8}$$

Z předpokladu, že x, y jsou navzájem nezávisle proměnné, plyne, že můžeme předpokládat $f_1(x) - f_2(y) \neq 0$; podobně na základě nezávislosti proměnných z, t lze předpokládat $g_3(z) - g_4(t) \neq 0$. Krátíme-li v poslední rovnici těmito nenulovými faktory, vychází po jednoduché úpravě rovnice s ní ekvivalentní

$$\begin{aligned} & f_1(x) \,.\, f_2(y) .\, e_5(u) + [f_1(x) + f_2(y)] \,.\, g_5(u) = \\ & = g_3(z) \,.\, g_4(t) \,.\, e_5(u) + [g_3(z) + g_4(t)] \,.\, g_5(u) \,. \end{aligned} \tag{9}$$

To je druhý základní kanonický tvar V. Štěpánského [3], str. 80, který je tedy rovněž specializací téže rovnice (2) jako předcházející tvar (6). Zobrazovací rovnice pro tvar (8), resp. (9) jsou:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= -f_1(x), & \eta_1 &= f_1^2(x), \\ \xi_2 &= -f_2(y), & \eta_2 &= f_2^2(y), \\ \xi_3 &= -g_3(z), & \eta_3 &= g_3^2(z), \\ \xi_4 &= -g_4(t), & \eta_4 &= g_4^2(t), \\ \xi_5 &= \frac{g_5(u)}{e_5(u)}, & \eta_5 &= 0. \end{aligned} \tag{10}$$

První čtyři stupnice jsou na téže nositelce, totiž na parabole

$$\eta = \xi^2,$$

jejíž osa je rovnoběžná s isopletami unárního pole. Od praktických aplikací zde upouštíme, protože je hojně uvádí V. Štěpánský.

O funkcích F_i, G_i, H_5 i jejich specialisacích zde ovšem předpokládáme, že splňují běžné podmínky (spojitost, monotonie apod.), potřebné pro konstrukci jejich stupnic.

Zobecnění právě naznačené anamorfosy, tj. přechodu od rovnice (1) k rovnici (2), pro případ nomogramu až o devíti nezávislých proměnných, je nasnadě. Stačí funkce

F_i, G_i v determinantu (2) nahradit funkcemi dvou proměnných; na místo sestrojení stupnic, k nimž zde vedly zobrazovací rovnice (4_1) až (4_4), by pak nastoupila konstrukce až čtyř binárních polí, kdežto konstrukce unárního pole z rovnic (4_5) by zůstala beze změny.

Teoretický problém, kdy je rovnice (1) schopna anamorfosy ve tvar (2), je zřejmě obtížnější než u klasické Massauovy anamorfosy a zůstává otevřen. Dosavadní praxe však ukazuje, že bohatost příslušných kanonických tvarů je zde značná.

Praktický dosah této anamorfosy lze ilustrovat na užití kolineace při konstrukci nomogramu. Každou kolineaci lze vyjádřit rovnicemi (viz V. Hruška [1], str. 229)

$$\xi = \frac{a_1\xi' + a_2\eta' + a_3}{c_1\xi' + c_2\eta' + c_3}, \ \eta = \frac{b_1\xi' + b_2\eta' + b_3}{c_1\xi' + c_2\eta' + c_3}, \tag{11}$$

kde a_k, b_k, c_k ($k = 1, 2, 3$) značí konstanty, pro něž předpokládáme, že determinant Δ této kolineace je nenulový, tedy

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1, a_2, a_3 \\ b_1, b_2, b_3 \\ c_1, c_2, c_3 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{12}$$

Za předpokladu (12) mají rovnice (11) jediné inversní řešení; tím je rovnicemi (11) dána geometrická příbuznost v rovině, která bodu o souřadnicích ξ, η přiřazuje bod o souřadnicích ξ', η' v téže soustavě souřadnic. Determinant (12) příslušnou kolineaci plně charakterisuje.

Jsou-li nyní

$$A_k\,\xi + B_k\,\eta + C_k = 0, \quad (k = 1, 2, 3) \tag{13}$$

rovnice tří přímek, přejdou tyto přímky kolineací (11) v přímky o rovnicích

$$A'_k\,\xi' + B'_k\,\eta' + C'_k = 0, \tag{14}$$

kde pro každé $k = 1, 2, 3$ je

$$\begin{aligned} A'_k &= A_k a_1 + B_k b_1 + C_k c_1\,, \\ B'_k &= A_k a_2 + B_k b_2 + C_k c_2\,, \\ C'_k &= A_k a_3 + B_k b_3 + C_k c_3\,. \end{aligned} \tag{15}$$

To se snadno zjistí mechanickým dosazením z rovnic (11) do rovnic (13). Systém (15) představuje celkem devět rovnic. Pro determinant soustavy (14) dostáváme na základě pravidla pro násobení determinantů výsledek („násobíme“ řádky prvního determinantu sloupci druhého determinantu)

$$\begin{vmatrix} A'_1, B'_1, C'_1 \\ A'_2, B'_2, C'_2 \\ A'_3, B'_3, C'_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1, B_1, C_1 \\ A_2, B_2, C_2 \\ A_3, B_3, C_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1, a_2, a_3 \\ b_1, b_2, b_3 \\ c_1, c_2, c_3 \end{vmatrix}. \tag{16}$$

Determinant soustavy rovnic tří přímek se tedy při kolineaci násobí determinantem této kolineace. Se zřetelem k nerovnosti (12) to znamená, že nutná a postačující podmínka k tomu, aby byla splněna jedna z rovnic

$$\begin{vmatrix} A_1, B_1, C_1 \\ A_2, B_2, C_2 \\ A_3, B_3, C_3 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} A'_1, B'_1, C'_1 \\ A'_2, B'_2, C'_2 \\ A'_3, B'_3, C'_3 \end{vmatrix} = 0, \tag{17}$$

jest, aby byla splněna druhá z nich.

Při kolineaci zde vyšetřovaného nomogramu nastoupí ovšem na místo přímek (13) přímky (3), klademe tedy

$$\begin{aligned} A_1 &= G_2 - G_1\,, & B_1 &= F_1 - F_2\,, & C_1 &= F_2G_1 - F_1G_2\,, \\ A_2 &= G_4 - G_3\,, & B_2 &= F_3 - F_4\,, & C_2 &= F_4G_3 - F_3G_4\,, \\ A_3 &= 1\,, & B_3 &= 0\,, & C_3 &= -H_5\,. \end{aligned} \tag{18}$$

Determinant soustavy rovnic těchto tří přímek je pak ovšem právě determinant (2). Transformaci tohoto determinantu na základě rovnic (16) i výpočet příslušných zobrazovacích rovnic přenechávám píli čtenáře, jde o mechanické dosazení z rovnic (18) rovnic (15). Připomínám jen, že v obecném případě unární pole, tvořené původně systémem rovnoběžných přímek (4_5), přejde kolineací v unární pole, tvořené přímkami rovinného svazku, neboť kolineace převádí rovnoběžné přímky v přímky svazku, tj. v přímky jdoucí jedním bodem. Vyrýsování a okótování přímek tohoto nového unárního pole nečiní potíže, je nutno jen dát pozor na to, aby převedení unárního pole rovnoběžných přímek v pole přímek svazku nepoškodilo přehlednou čitelnost nomogramu. My se zde však soustředíme na takové kolineace, které unární pole našeho nomogramu převádějí zase v pole rovnoběžných přímek. Zachováme-li i směr isoplet unárního pole, znamená to, že stačí volit kolineaci (11) tak, aby přímky rovnoběžné s osou η převáděla v přímky rovnoběžné zase s touž osou, tj. stačí volit

$$a_2 = 0, \quad b_2 \neq 0\,, \quad c_2 = 0\,. \tag{19}$$

Potom totiž přímka o rovnici $\xi - k = 0$ přejde kolineací (11) v přímku o rovnici $\xi' - k' = 0$, kde je (k i k' jsou konstanty):

$$k' = -\frac{a_3 - kc_3}{a_1 - kc_1}\,. \tag{20}$$

Přehled o této kolineaci poskytuje transformace (16) základního determinantu (2); při dosazení z rovnic (18) vychází zde za předpokladu (19) tento výsledek:

$$\begin{vmatrix} G_2 - G_1\,, & F_1 - F_2\,, & F_2G_1 - F_1G_2 \\ G_4 - G_3\,, & F_3 - F_4\,, & F_4G_3 - F_3G_4 \\ 1\,, & 0\,, & -H_5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1\,, & 0\,, & a_3 \\ b_1\,, & b_2\,, & b_3 \\ c_1\,, & 0\,, & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1'\,, & B_1'\,, & C_1' \\ A_2'\,, & B_2'\,, & C_2' \\ A_3'\,, & B_3'\,, & C_3' \end{vmatrix}\,; \tag{21}$$

přitom zde je

$$\begin{aligned} A_1' &= a_1(G_2 - G_1) + b_1(F_1 - F_2) + c_1(F_2G_1 - F_1G_2)\,, \\ B_1' &= b_2(F_1 - F_2)\,, \\ C_1' &= a_3(G_2 - G_1) + b_3(F_1 - F_2) + c_3(F_2G_1 - F_1G_2)\,. \\ A_2' &= a_1(G_4 - G_3) + b_1(F_3 - F_4) + c_1(F_4G_3 - F_3G_4)\,, \\ B_2' &= b_2(F_3 - F_4)\,, \\ C_2' &= a_3(G_4 - G_3) + b_3(F_3 - F_4) + c_3(F_4G_3 - F_3G_4)\,, \\ A_3' &= a_1 - c_1H_5\,, \\ B_3' &= 0\,, \\ C_3' &= a_3 - c_3H_5\,. \end{aligned} \tag{22}$$

Přímky (3) přejdou tedy touto kolineací v přímky tvaru (14), kam dosazujeme z rovnic (22), tedy v přímky

$$\begin{aligned}
&\xi'[a_1(G_2 - G_1) + b_1(F_1 - F_2) + c_1(F_2G_1 - F_1G_2)] + \\
&+ \eta' b_2(F_1 - F_2) + a_3(G_2 - G_1) + b_3(F_1 - F_2) + c_3(F_2G_1 - F_1 G_2) = 0 \,, \\
&\xi'[a_1(G_4 - G_3) + b_1(F_3 - F_4) + c_1(F_4G_3 - F_3G_4)] + \\
&+ \eta' b_2(F_3 - F_4) + a_3(G_4 - G_3) + b_3(F_3 - F_4) + c_3(F_4G_3 - F_3G_4) = 0 \,. \\
&\xi'(a_1 - c_1H_5) + a_3 - c_3H_5 = 0 \,.
\end{aligned} \tag{23}$$

Transformace třetí z těchto přímek souhlasí s výsledkem (20). Z rovnic (2) a (21) ovšem vychází, že i tyto tři přímky (23) se protínají v jednom bodě (srovnej s rovnicemi (17)). První z těch přímek je spojnicí bodů X', Y', kde bod X' má souřadnice

$$\xi_1' = -\frac{a_3 - c_3 F_1}{a_1 - c_1 F_1}\,, \qquad \eta_1' = \frac{a_1b_3 - a_3b_1 + (b_1c_3 - b_3c_1)\,F_1 + (a_3c_1 - a_1c_3)\,G_1}{-\,b_2(a_1 - c_1F_1)} \tag{24_1}$$

a bod Y' souřadnice

$$\xi_2' = -\frac{a_3 - c_3F_2}{a_1 - c_1F_2}\,, \qquad \eta_2' = \frac{a_1b_3 - a_3b_1 + (b_1c_3 - b_3c_1)\,F_2 + (a_3c_1 - a_1c_3)\,G_2}{-\,b_2(a_1 - c_1F_2)}\,. \tag{24_2}$$

Bod X' je v naší kolineaci přiřazen bodu X o souřadnicích (4_1) a bod Y' bodu Y o souřadnicích (4_2). Druhá z přímek (23) je spojnicí bodů Z', T', přičemž bod Z' má souřadnice

$$\xi_3' = -\frac{a_3 - c_3F_3}{a_1 - c_1F_3}\,, \qquad \eta_3' = \frac{a_1b_3 - a_3b_1 + (b_1c_3 - b_3c_1)\,F_3 + (a_3c_1 - a_1c_3)\,G_3}{-b_2(a_1 - c_1F_3)}\,, \tag{24_3}$$

a bod T' souřadnice

$$\xi_4' = -\frac{a_3 - c_3F_4}{a_1 - c_1F_4}\,, \qquad \eta_4' = \frac{a_1b_3 - a_3b_1 + (b_1c_3 - b_3c_1)\,F_4 + (a_3c_1 - a_1c_3)\,G_4}{-b_2(a_1 - c_1F_4)}\,. \tag{24_4}$$

Bod Z' je v naší kolineaci přiřazen bodu Z o souřadnicích (4_3) a bod T' bodu T o souřadnicích (4_4). Třetí z rovnic (23) představuje přímky rovnoběžné s osou η, které procházejí body U' o souřadnicích

$$\xi' = -\frac{a_3 - c_3H_5}{a_1 - c_1H_5}\,, \quad \eta' = \frac{a_1b_3 - a_3b_1 + (b_1c_3 - b_3c_1)H_5}{-\,b_2(a_1 - c_1H_5)}\,.$$

Bod U' je v naší kolineaci přiřazen bodu U o souřadnicích (4_5) a je zde uveden jen pro úplnost. Prakticky se pro konstrukci příslušného unárního pole hodí spíše jeho průmět

U_1' směrem osy η na osu ξ, jehož souřadnice jsou

$$\xi_5' = -\frac{a_3 - c_3 H_5}{a_1 - c_1 H_5}, \quad \eta_5' = 0 . \tag{24$_5$}$$

(Nezapomeňme, že při kolineaci se osa ξ nemusí reprodukovat, proto ose ξ je v této kolineaci přiřazena obecně přímka, kterou vytvoří bod U'; ke konstrukci unárního pole není třeba tuto přímku hledat, stačí stanovit opět přílsušné body na ose ξ, a to jsou právě bidy U_1' o souřadnicích (24_5).

Rovnice (24_1) až (24_5) jsou zobrazovací rovnice nomogramu, vzniklého kolineací z původního nomogramu, a jsou zde za podmínek (19) vypočítány v nejobecnějším tvaru. Této kolineace lze někdy užít už při volbě modulů stupnic funkcí, jež v nomogramu vystupují, jak ukazují následující dva příklady.

Podrobme kanonický tvar (5), resp. (6) kolineaci o determinantu

$$\begin{vmatrix} -\beta & , & 0 , 0 \\ 0 & , & -\delta , 0 \\ \alpha - \beta , 0 & , & -\alpha\delta \end{vmatrix} = -\alpha\beta\delta^2 \neq 0 .$$

V rovnicích (11) klademe tedy $a_1 = -\beta$, $b_2 = -\delta$, $c_1 = \alpha - \beta$, $c_3 = -\alpha\delta$, $a_2 = = a_3 = b_1 = b_3 = c_2 = 0$; podmínky (19) jsou přitom splněny. Klademe-li pak v rovnici (21) za determinant (2) speciálně determinant (5), vychází:

$$\begin{vmatrix} f_2 - f_1 , & -1 , & f_1 \\ h_4 - h_3 , & -1 , & h_3 \\ e_5 + g_5 , & 0 , & -g_5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -\beta , & 0 , & 0 \\ 0 , & -\delta , & 0 \\ \alpha - \beta , & 0 , & -\alpha\delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha f_1 - \beta f_2 , & \delta , & -\alpha\delta f_1 \\ \alpha h_3 - \beta h_4 , & \delta , & -\alpha\delta h_3 \\ -(\alpha g_5 + \beta e_5) , & 0 , & \alpha\delta g_5 \end{vmatrix} = 0 .$$

Právě tak, jako jsme od kanonického tvaru (5)., resp. (6) došli k zobrazovacím rovnicím (7), vycházejí zde zobrazovací rovnice

$$\begin{aligned} \xi_1' &= 0 , & \eta_1' &= \alpha f_1 , \\ \xi_2' &= \delta , & \eta_2' &= \beta f_2 , \\ \xi_3' &= 0 , & \eta_3' &= \alpha h_3 , \\ \xi_4' &= \delta , & \eta_4' &= \beta h_4 , \\ \xi_5' &= \frac{\alpha\delta g_5}{\alpha g_5 + \beta e_5} & \eta_5' &= 0 . \end{aligned}$$

To jsou právě zobrazovací rovnice, kterých užil V. Štěpánský v práci [2] na str. 123; autor je tam však všechny nevypisuje, protože při konstrukci svých nomogramů užívá především geometrie syntetické. Jeho volba modulů je tedy v tomto případě kolineací základního kanonického tvaru.

Podrobme dále kanonický tvar (8), resp. (9) kolineaci o determinantu

$$\begin{vmatrix} \beta , & 0 , & 0 \\ 0 , & \alpha , & 0 \\ 0 , & 0 , & \alpha\beta \end{vmatrix} = \alpha^2\beta^2 \neq 0 .$$

V rovnicích (11) zde klademe $a_1 = \beta, b_2 = \alpha, c_3 = \alpha\beta, a_2 = a_3 = b_1 = b_3 = c_1 = c_2 = 0$; i zde jsou splněny podmínky (19), takže můžeme užít rovnice (21) i dalších, volíme-li tu nyní za determinant (2) determinant (8). Po jednoduchých úpravách vychází:

$$\begin{vmatrix} f_2^2 - f_1^2, & f_2 - f_1, & f_1 f_2^2 - f_1^2 f_2 \\ g_4^2 - g_3^2, & g_4 - g_3, & g_3 g_4^2 - g_3^2 g_4 \\ e_5, & 0, & -g_5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \beta, & 0, & 0 \\ 0, & \alpha, & 0 \\ 0, & 0, & \alpha\beta \end{vmatrix} =$$

$$= (f_2 - f_1)(g_4 - g_3) \begin{vmatrix} f_1 + f_2, & 1, & f_1 f_2 \\ g_3 + g_4, & 1, & g_3 g_4 \\ e_5, & 0, & -g_5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \beta, & 0, & 0 \\ 0, & \alpha, & 0 \\ 0, & 0, & \alpha\beta \end{vmatrix} =$$

$$= (f_2 - f_1)(g_4 - g_3) \begin{vmatrix} \beta(f_1 + f_2), & \alpha, & \alpha\beta f_1 f_2 \\ \beta(g_3 + g_4), & \alpha, & \alpha\beta g_3 g_4 \\ \beta e_5, & 0, & -\alpha\beta g_5 \end{vmatrix} = 0 .$$

Protože předpokládáme $(f_2 - f_1)(g_4 - g_3) \neq 0$ (viz text za rovnicí (8)), docházíme stejnými obraty jako dřív k zobrazovacím rovnicím

$$\begin{aligned} \xi_1' &= -\alpha f_1, & \eta_1' &= \beta f_1^2, \\ \xi_2' &= -\alpha f_2, & \eta_2' &= \beta f_2^2, \\ \xi_3' &= -\alpha g_3, & \eta_3' &= \beta g_3^2, \\ \xi_4' &= -\alpha g_4, & \eta_4' &= \beta g_4^2, \\ \xi_5' &= \alpha \frac{g_5}{e_5}, & \eta_5' &= 0 . \end{aligned}$$

To jsou opět zobrazovací rovnice, kterých při konstrukci nomogramu vztahu (9) užil V. Štěpánský v práci [3], str. 79 až 85. Stupnice prvních čtyř proměnných jsou na téže nositelce, totiž na parabole o rovnici

$$\eta = \frac{\beta}{\alpha^2} \xi^2 .$$

I zde je tedy Štěpánského volba modulů příslušných stupnic a unárního pole v podstatě kolineací jeho základního kanonického tvaru.

Využití kolineace při konstrukcích nomogramů s unárním polem není zde ovšem ani zdaleka vyčerpáno, jak při bohatosti látky a mnohotvárnosti užití těchto nomogramů ani jinak být nemůže.

Literatura

[1] V. Hruška: Počet grafický a graficko-mechanický. Přírodovědecké vydavatelství, Praha 1952

[2] V. Štěpánský: Kombinované spojnicové nomogramy s unárním polem. Jejich teorie a užití. Sborník vědeckých prací VŠB v Ostravě, řada matematika, fyzika, chemie, roč. II, č. 2, str. 119–138, Ostrava 1956.

[3] V. Štěpánský: Řešení algebraických rovnic nomograny s unárním polem. Tamtéž, roč. II, č. 4, str. 67–86, Ostrava 1956.

[4] V. Štěpánský: Nomografické zobrazení některých vztahů o šesti proměnných kombinovanými spojnicovými nomogramy s unárním polem. Tamtéž, roč. IV, č. 5, str. 441–447, Ostrava 1958.

[5] V. Štěpánský: Nové způsoby nomografických zobrazení dvou kanonických tvarů o šesti proměnných. Tamtéž, roč. VI, č. 2, str. 203–216, Ostrava 1960.

]6] V. Štěpánský: Nová universální nomografická zobrazovací metoda pro vztahy od tří do devíti proměnných. Nomogramy se zkříženými indexy. Tamtéž, roč. VI, č. 5—6, str. 673—689, Ostrava 1960.

[7] V. Štěpánský: Nomogramy se zkříženými indexy, unárním polem a kruhovými stupnicemi pro vztahy o pěti proměnných veličinách. Odvození a zobrazení nových kanonických tvarů. Tamtéž, roč. VI, č. 8—9, 1015—1043 str., Ostrava 1960.

[8] V. Štěpánský: O speciálních formách některých kanonických tvarů a zobrazení vztahů o pěti proměnných, jejichž nomogramy mají zkřížené indexy nad jednoparametrickým lineárním systémem. Tamtéž, roč. VIII, č. 1, str. 61—95, Ostrava 1962.

[9] V. Štěpánský: Zobrazení vztahů o osmi až dvaceti čtyřech proměnných veličinách nomogramy s několika soustavami stupnic nebo binárních polí sdružených zkříženými indexy a s jedním systémem řídicích čar. Tamtéž, roč. IX, č. 2, str. 183—226, Ostrava 1963.

Acta Universitatis Carolinae
Mathematica et Physica 2/1968

Grafická úprava: Jaroslav Příbramský

Z nové sazby písmem Plantin vytiskla Polygrafia, n. p., záv. 1 - Náklad 500 výtisků

Cena Kčs 10,—