1965 ACTA UNIVERSITATIS CAROLINAE – MATHEMATICA ET PHYSICA NO. 2 PAG 35–61

APLIKACE TEORIE GRAFŮ NA VÝPOČET DETERMINANTŮ MATIC SPECIÁLNÍHO TYPU

APLICATION OF GRAPH THEORY ON CALCULATION OF DETERMINANTE OF MATRICES OF SPECIAL TYPE

АПЛИКАЦИЯ ТЕОРИИ ГРАФОВ НА ВЫИЧСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ МАТРИЦ СПЕЦИАЛЬНОГО ТИПА

(*Došlo* 15. *září* 1964)

LADISLAV BICAN

Katedra algebry a geometrie matematicko-fyzikální fakulty KU v Praze

Podnětem k této práci byla skripta (1). Celý oddíl 1. této práce s výjimkou důsledku v 1,11, je věnován přesné formulaci a důkazům některých (základních) vět z (1), neboť tam nejsou věty dokazovány, nýbrž pouze ověřovány pro některou speciální hodnotu n. Další dva paragrafy a prvá polovina oddílu 4 jsou věnovány zobecňování těchto vět na stále složitější grafy. Ve zbývající části práce jsou ještě některá zobecnění oddílu 1, která však postupují jiným směrem, než odstavce předchozí.

V praxi, např. v geodesii (triangulace), v některých partiích fyziky (elektrické sítě) apod., se vyskytují soustavy lineárních (algebraických) rovnic, jejichž matice má tvar (6) z oddílu 1. Pomocí metod podaných v této práci můžeme spočítat nejen determinant soustavy, ale i algebraické doplňky všech prvků, čímž v podstatě obdržíme matici inversní.

1. ZÁKLADNÍ DEFINICE A VĚTY

1,1 Definice: Grafem G *budeme rozumět konečný neorientovaný graf, tj. neprázdnou konečnou množinu* $\{G\}$ *prvků, jež nazýváme uzly, na níž je definována binární relace R taková, že*

1. $x \in \{G\} \Rightarrow x \operatorname{non}R\, x$.

2. $x, y \in \{G\},\ xRy \Rightarrow yRx$.

Dvojici uzlů $\langle x, y\rangle$, *pro něž* xRy *nazveme* hranou *s koncovými uzly* x, y. *Množinu hran grafu G označme* $K\{G\}$. *Uzly* x, y *pro něž* $\langle x, y\rangle \in K\{G\}$ *nazýváme* sousední. Nebude-li hrozit nedorozumění, budeme místo $x \in \{G\}$ psát jen $x \in G$ a místo $\langle x, y\rangle \in K\{G\}$ jen $xy \in G$.

Graf H se nazývá podgrafem grafu *G, jestliže platí*

$$\{H\} \subset \{G\} \text{ a } K\{H\} = K\{G\} \cap \{\langle h_1, h_2\rangle, h_1, h_2 \in \{H\}\}.$$

Graf H se nazývá částečným grafem grafu *G, jestliže platí*

$$\{H\} = \{G\} \quad \text{a} \quad K\{H\} \subset K\{G\}.$$

Částečným podgrafem grafu G *budeme nazývat graf* H, *pro nějž je*

$$\{H\} \subset \{G\} \quad \text{a} \quad K\{H\} \subset K\{G\}.$$

Stupeň uzlu u *je počet hran, pro něž je* u *koncovým uzlem.*

Jsou-li u, v *dva uzly grafu* G, *pak* cestou z u do v *nazýváme posloupnost uzlů* $u_0u_1u_2\ldots u_n$, $n \in N$ (N značí množinu přirozených čísel), *po dvou různých s výjimkou nejvýše* $u_0 = u_n$, kde $u_0 = u$, $u_n = v$ *a* $u_iu_{i+1} \in G$, $i = 0, 1, \ldots, n\text{-}1$. u *a* v *se nazývají* počáteční *a* koncový uzel *cesty. Číslo* n *nazýváme* délkou cesty.

Dvě cesty $u_0u_1\ldots u_n$, $v_0v_1\ldots v_m$ *se nazývají* různé, *jestliže je buď* $n \neq m$, *nebo* $n = m$ *a ex. index* i, $\Theta \leqq i \leqq n$ *takový, že* $u_i \neq v_i$.

Kružnice *je cesta, jejíž počáteční a koncový uzel splývají.*

Graf G *nazýváme* souvislý, *jestliže pro libovolné dva uzly* $u, v \in G$ $u \neq v$ *existuje cesta z* u *do* v.

Podgraf C *grafu* G *se nazývá* komponenta *grafu* G, *je-li souvislý a pro libovolné dva uzly* c, d, *kde* $c \in C$, $d \in G \dot{-} C$ *neexistuje cesta z* c *do* d.

Strom *je souvislý graf alespoň o dvou uzlech, nemající kružnic.*

Uzel u *grafu* G *se nazývá* rozvětvovací, *je-li jeho stupeň alespoň* 3. *V opačném případě nazýváme uzel* u nerozvětvovací.

Řetězec *je buď strom bez rozvětvovacích uzlů nebo jediný uzel.*

1,2 Věta: *Každý strom má alespoň dva uzly* 1. *stupně.*

Důkaz: viz např. (2) str. 166 (glava 16 těorema 2).

1,3 Buď M množina o m prvcích, $1 \leqq k \leqq m$, k přirozené, $i_1, i_2, \ldots i_k \in M$. Permutaci P množiny M, která převádí i_1 v i_2, i_2 v i_3, $\ldots$, i_{k-1} v i_k, i_k v i_1 a ostatní prvky nechává na místě se nazývá k-členný cykl a značí $\{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_k\}$. Dvojčlenný cykl $\{i_1, i_2\}$ se nazývá transposice.

Platí (viz např. (4) str. 94—97): Každou neidentickou permutaci lze rozložit v součin cyklů (rozumí se při obvyklé operaci skládání permutací). Tento rozklad je až na pořadí jednoznačný.

Ze známých vět o znamení permutace plyne $\operatorname{sgn}\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} = (-1)^{k-1}$.

1,4 Označení: Buď $\mathbf{A}$ matice typu (n, n), k celé nezáporné číslo $k \leqq n$. Označme $D_{\binom{i_1, i_2, \ldots, i_K}{j_1, j_2, \ldots, j_K}}$ determinant matice vybrané z matice $\mathbf{A}$ o řádcích $i'_1, i'_2, \ldots, i'_{n-k}$ a sloupcích $j'_1, j'_2, \ldots, j'_{n-k}$, kde $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subset \{i'_1, \ldots, i'_{n-k}\{ = \{j_1, \ldots, j_k\} \cup \cup \{j'_1, \ldots, j'_{n-k}\} = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Determinant matice $\mathbf{A}$ budeme značit $D = D_{\binom{\cdot}{\cdot}}$.

Úplnou indukcí se snadno dokáže lemma:

Buď $\mathbf{A}$ matice typu (n, n), k celé nezáporné číslo, $k \leqq n$. všechny členy jejího determinantu, které obsahují součin $a_{i_1j_1}\, a_{i_2j_2} \ldots a_{i_kj_k}$ jsou až na znamení

$$a_{i_1j_1}\, a_{i_2j_2} \ldots a_{i_kj_k}\, D_{\binom{i_1, \ldots, i_k}{j_1, \ldots, j_k}}.$$

Označme dále F_{ij} algebraický doplněk prvku a_{ij}. Je tudíž $F_{ij} = (-1)^{i+j} D_{\binom{i}{j}}$.

1,5 Definice: *Buď* $\mathbf{A}$ *symetrická matice typu* (n, n). *Definujme graf* G_A *takto: uzly* G_A *jsou body* $1, 2, \ldots, n$, $i\,j$ *je hrana v* G_A *právě když* $a_{ij} \neq 0$. G_A *budeme v dalším nazývat graf matice* $\mathbf{A}$. Pro stručnost budeme také říkat determinant grafu G_A místo determinant matice A a psát $\det G_A$ místo $\det \mathbf{A}$.

Označme dále $D_{\mu_1, \ldots, \mu_k, i_1j_1 \ldots, i_lj_l}$ determinant částečného podgrafu H grauf G, kde

$$\{H\} = \{G\} \dot{-} \{\mu_1, \ldots, \mu_k\}$$
$$K\{H\} = K\{G\} \cap \{\langle h_1, h_2\rangle, h_1, h_2 \in \{H\}\} \dot{-} \{i_1j_1, i_2j_2, \ldots, i_lj_l\}.$$

1,6 Označení: Každé cestě $i_1 i_2 \ldots i_k$ grafu G_A, $k \geqq 2$, přiřaďme jednak číslo

$$\overbrace{i_1 i_2 \ldots i_k} = a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \ldots a_{i_{k-1} i_k}$$

jednak číslo

$$\overbrace{\underbrace{i_1 i_2 \ldots i_k}} = \begin{cases} a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_1} \text{ pro } k = 2. \\ a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \ldots a_{i_{k-1} i_k} a_{i_k i_1} + a_{i_k i_{k-1}} \ldots a_{i_2 i_1} a_{i_1 i_k} \text{ pro } k > 2. \end{cases}$$

1,7 Věta: *Buď* $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & -a_{1n} \\ -a_{21} & & -a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ *symetrická matice typu* (n, n). *Pak platí pro* $i \neq j$

(2) $$F_{ji} = \sum \overbrace{i i_1 \ldots i_{k-1} j}\, D_{\binom{i, i_1, \ldots, i_{k-1}, j}{i, i_1, \ldots, i_{k-1}, j}},$$

kde se sčítá přes všechny cesty z i do j grafu G_A. (Pro $k = 1$ se jedná ovšem o hranu ij).

Důkaz: Podle (1) jsou všechny členy pravé strany (2) členy F_{ji} (případně až na znamení).

Buď nyní $i\, i_1 \ldots i_{k-1}$ cesta délky k. Pak $D_{\binom{i, i_1, \ldots, i_{k-1}, j}{i, i_1, \ldots, i_{k-1}, j}}$ má $(n\text{-}k\text{-}1)!$ členů. Cest délky k je však $(n\text{-}2) \cdot (n\text{-}3) \ldots (n \cdot k)$. (Pro $k = 1$ je tudíž součin prázdný a tedy rovný 1, což není ve sporu s předcházejícím nebot existuje jediná cesta délky 1, totiž hrana ij). Odtud plyne pro počet členů na pravé straně (2)

$$\sum_{k=1}^{n-1} (n\text{-}2)(n\text{-}3) \ldots (n\text{-}k)\, (n\text{-}k\text{-}1)! = \sum_{k=1}^{n-1} (n\text{-}2)! = (n\text{-}1)!$$

K dokončení důkazu zbývá již jen ukázat, že znamení členů, obsahujících tytéž prvky, jsou stejné. Za tím účelem vezměme člen $a_{ii_1} a_{i_1 i_2} \ldots a_{i_{k-1} j}\, d$, kde d je nějaký člen $D_{\binom{i, i_1, \ldots, i_{k-1}, j}{i, i_1, \ldots, i_{k-1}, j}}$ opatřený znamením příslušné permutace.

Utvořme nyní matici $\mathbf{B}$ takto:
$b_{ji} = 1$, $b_{jk} = b_{li} = 0$ pro $k \neq i$, $l \neq j$ a ostatní prvky stejné jako v matici $\mathbf{A}$. Zřejmě $F_{ji} = \det \mathbf{B}$. Rozviňme nyní $\det \mathbf{B}$ podle Laplaceovy věty podle řádků $i, i_1, \ldots, i_{k-1}, j$ a vezměme hned člen $D' \cdot D_{\binom{i, i_1, \ldots, j}{i, i_1, \ldots, j}}$. Znamení tohoto členu je zřejmě $+ 1$. Z $D_{\binom{i, i_1, \ldots, i_{k-1}, j}{i, i_1, \ldots, i_{k-1}, j}}$ vezměme člen d již opatřený příslušným znamením. Z D' vezměme člen $\operatorname{sgn} P\, (- a_{ii_1}(- a_{i_1 i_2}) \ldots (- a_{i_{k-1} j}\, b_{ji}$. Permutace P je cykl $\{ i, i_1 \ldots i_{k-1}, j\}$, tudíž podle 1,3 je $\operatorname{sgn} P = (-1)^k$. Z uvedeného již plyne, že $a_{ii_1} \ldots a_{i_{k-1} j}\, d$ je na levé straně s týmž znamením jako na pravé. Odtud a z toho, že $a_{ii_1} \ldots a_{i_{k-1} j}\, d$ jsme zvolili libovolně již dokazované tvrzení ihned plyne.

1,8 Věta: *Buď* $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \ldots & -a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ *symetrická matice typu* (n, n). *Pak pro* $i \neq j$ *platí*

(3) $$D = D_{-1j} - \sum \overbrace{\underbrace{i i_1 \ldots i_{k-1} j}}\, D_{\binom{i, i_1, \ldots, i_{k-1}, j}{i, i_1, \ldots, i_{k-1}, j}}$$

kde se sčítá přes všechny cesty z i do j grafu G_A.

Důkaz: Definujme matici $\mathbf{B}$ takto: $b_{ij} = 0$ a ostatní prvky jsou stejné jako v matici $\mathbf{A}$.

Dále definujme matici $\mathbf{C}$ takto: $c_{ji} = 0$ a ostatní prvky jsou stejné jako v matici $\mathbf{B}$.

Snadno se zjistí, že platí:

(4) $$D = det\, \mathbf{C} - a_{ji}\, G_{ji} - a_{ij}\, F_{ij},$$

kde G_{ji} je algebraický doplněk prvku $- a_{ji}$ v matici $\mathbf{B}$ (což je totéž jako v matici $\mathbf{C}$) a F_{ij} alg. doplněk prvku $- a_{ij}$ v matici $\mathbf{A}$.

Buď dále $ii_1 \ldots i_{k-1}j$ libovolná cesta grafu G_A, $k \geqq 2$. Pak $ji_{k-1} \ldots i_1 i$ je opět cesta a platí

(5) $$a_{ji}\overbrace{ii_1 \ldots i_{k-1}j} + a_{ij}\overbrace{ji_{k-1} \ldots i_1 i} =$$

$$= a_{ii_1}\, a_{i_1 i_2} \ldots a_{i_{k-1}j}\, a_{ji} + a_{j i_{k-1}} \ldots a_{i_1 i}\, a_{ij} = \overbrace{\underbrace{ii_1 \ldots i_{k-1}j}}$$

Ježto je det $\mathbf{C} = D_{-ij}$, stačí nyní na zbývající členy (4) užít větu 1,7 a (5).

1,9 Úmluva: V dalším, nebude-li řečeno jinak, budeme pod maticí $\mathbf{A} = (a_{ij})^n{}_{i,j-1}$ rozumět symetrickou matici typu (n, n) definovanou takto:

(6) $a_{ii} = z$, z libovolné (třeba komplexní) číslo

$$a_{ij} = \langle {0 \atop 1}\; i \neq j$$

přičemž v každém řádku jsou nejvýše tři nenulové nediagonální elementy. Determinant matice $\mathbf{A}$ budeme nadále značit D.

Ve speciálním případě, když G_A je řetězec o n uzlech, budeme psát $D = d_n$, nebo $D = (1, 2, \ldots, n)$, jestliže uzly řetězce jsou označeny znaky $1, 2, \ldots, n$ tak, že $\langle i, i + 1\rangle \in K\{G_A\}$ pro $i = 1, 2, \ldots, n\text{-}1$. Je však patrné, že hodnota determinantu grafu G_A nezávisí na očíslování jeho uzlů, takže můžeme kdykoli užívat obojího označení.

1,10 Věta: *Pro* $k = 1, 2, \ldots, n\text{-}1$ *platí*

(7) $(1, 2, \ldots, n) = (1, 2, \ldots, k)(k + 1, \ldots, n) - (1, \ldots, k-1)(k+2, \ldots, n)$

přičemž definitoricky klademe determinant prázdné matice (typu (0,0) *roven* 1, *tj.* $(\emptyset) = 1$.

Důkaz: plyne ihned z Laplaceovy věty (resp. z 1,8).

Důsledek: Pro $n \geqq 2$ splňuje d_n rekurentní vztah

(8) $$d_n = zd_{n-1} - d_{n-2}.$$

Důkaz: Ve větě stačí položit $k = n-1$.

1,11 Věta: Označme c_n determinant matice $\mathbf{A}$ takové, že G_A je kružnice o n uzlech, n $\geqq 3$. Pak platí

(9) $$c_n = d_n - d_{n-2} - 2.$$

Důkaz: plyne ihned z 1,8.

Důsledek: Ve speciálním případě, že v (6) je $z = 3$ a jen v tomto případě platí pro $n \geqq 5$.

(10) $$c_n = zc_{n-1} - c_{n-2} + 2.$$

Důkaz: Podle (9) jest

$$d_n - d_{n-2} - 2 = z(d_{n-1} - d_{n-3} - 2) - d_{n-2} + d_{n-4} + 2 + 2$$

odtud je po dosazení za d_n podle (8)

$$z\, d_{n-1} - d_{n-2} - 2 = zd_{n-1} - zd_{n-3} - 2z + d_{n-4} + 4$$

čili

(11) $$d_{n-2} + zd_{n-3} - d_{n-4} + 2(z - 3).$$

Vztahy (10) a (11) jsou ekvivalentní, z (11) je však dokazované tvrzení ihned patrné.

2. DETERMINANT MATICE, JEJÍŽ GRAF JE STROM

2,1 Definice: Most *souvislého grafu G je hrana, jejímž odstraněním se poruší souvislost.*

Uzel 1. *stupně se nazývá* koncový uzel *grafu G a příslušná hrana se nazývá* koncová hrana.

Graf G, který je buďto strom, nebo je to jediný uzel, nazveme zobecněným stromem.

2,2 Lemma: *Libovolná hrana stromu H je most. Jejím odstraněním vzniknou dvě komponenty, z nichž každá je zobecněným stromem.*

Obecně: *Odstraněním libovolných k-*1 *hran* $i_1j_1, \ldots, i_{k-1}j_{k-1}$, $k \geqq 2$, *ze stromu H vznikne částečný graf* H_k, *mající k komponent, z nichž každá je zobecněným stromem*

Důkaz: Zřejmé.

2,3 Definice: *Buď H strom,* H_k *graf z odstavce 2,2. Jestliže přidáním hrany ij ke grafu* H_k *splynou různé komponenty* K_r, K_s *v jedinou komponentu grafu* H_{k-1}, *budeme říkat, že ij je most mezi komponentami* K_r, K_s.

2,4 Lemma: *Buď* **A** *matice tvaru* (6) *z* § 1, G_A *buď strom, ij jeho hrana. Odstraněním hrany ij vzniknou dvě komponenty. Označme* K_1 *tu, která obsahuje uzel i, druhou označme* K_2. *Označme* G_1 *podgraf grafu* G_A *o uzlech* $\{K_1\} - \{i\}$, G_2 *podgraf grafu* G_A *o uzlech* $\{K_2\} - \{j\}$[1]. *Dále označme* $D = \det G_A$, $D_1 = \det K_1$, $D_2 = \det K_2$, $\widetilde{D}_1 = \det G_1$, $\widetilde{D}_2 = \det G_2$. *Pak platí*

(1) $$D = D_1D_2 - \widetilde{D}_1\widetilde{D}_2.$$

Důkaz: plyne ihned z 1,8.

Poznámka: Lemma 2,4 je zobecněním věty 1,10. Věta 1,10 byla dokázána pouze pro řetězce, kdežto lemma 2,4 platí pro libovolný strom.

2,5 Definice: *Buď* **A** *matice typu* (n, n) *tvaru* (6) *z* §1, G_A *buď strom. Buď k přirozené číslo,* $k < n$. *Zvolme libovolně po dvou různé hrany* $i_1j_1, \ldots, i_{k-1}j_{k-1}$ (tyto hrany volíme libovolně, ale jakmile je jednou zvolíme, zůstanou v dalších úvahách pevné) *stromu* D_A. *Jejich odstraněním vznikne graf* H_k, *který podle 2,2 má k komponent* $K_1, K_2, \ldots, K_k$. Sdruženým grafem $\widetilde{G}_A$ ke grafu G_A *vzhledem k hranám* $i_1j_1, \ldots, i_{k-1}j_{k-1}$ (v dalším budeme říkat krátce jen sdružený graf) *nazveme graf definovaný takto*:

Uzly grafu $\widetilde{G}_A$ *jsou komponenty* $K_1, \ldots, K_k$ *grafu* H_k, *označme je* (1) (2), ..., (k), *přičemž* $(i)(j)$ *je hrana, existuje-li v* G_A *most* i_sj_s, $1 \leqq s \leqq k$-1 *mezi komponentami* K_i, K_j. *Hranám* $i_1j_1, \ldots, i_{k-1}j_{k-1}$ *budeme v dalším říkat mosty vzhledem ke* $\widetilde{G}_A$, *nebude-li hrozit nedorozumění, tak jen krátce mosty.* (Jakmile tedy mluvíme o sdruženém grafu, předpokládáme, že mosty jsou již pevně dány).

Provádíme-li rozklad grafu G_A *podle vzorce* (1) (kde za hranu ij volíme most i_sj_s mezi komponentami K_i, K_j), *říkáme, že jsme odstranili most* i_sj_s, *jestliže uvažujeme*

1) Podle definice 1,1 je podgraf H grafu G jednoznačně určen množinou uzlů.

pouze člen D_1D_2 a říkáme, že jsme odstranili hranu $(i)(j)$ *grafu* $\tilde{G}_A$, *jestliže uvažujeme člen* $\tilde{D}_1\tilde{D}_2$.

2,6 Poznámka: Je vidět, že vzorec (1) platí i v případě, kdy grafy K_1, K_2 nejsou souvislé, speciálně tedy odstraníme-li z K_1 (resp. K_2) libovolný uzel $u \neq i$ (resp. $u \neq j$). Tím dostaneme grafy K_1^1, K_2^1 místo K_1, K_2 a G_A^1 místo G_A. Bude sice $G_A^1 \neq G_A$, ale definujeme $\tilde{G}_A^1 = \tilde{G}_A$. Podle této poznámky nezáleží tedy tvar sdruženého grafu na tvaru jednotlivých složek, ale pouze na počtu a umístění jednotlivých mostů.

Souhrnně tedy můžeme říci obsah odstavců 2,5 a 2,6 takto: Každému stromu G_A a $(k\text{-}1)$-tici mostů $i_1j_1, \ldots, i_{k-1}j_{k-1}$ je jednoznačně přiřazen graf $\tilde{G}_A$. Obráceně však je-li dán G_A pak existuje nekonečně mnoho grafů G_A, k nimž je $\tilde{G}_A$ sdružený. Tato nejednoznačnost nám však v dalším nevadí, neboť budeme vždy vycházet z grafu G_A. Dále jsme definovali sdružený graf $\tilde{G}_A^1$ grafu G_A^1, který vznikne z G_A odstraněním některých uzlů (nebo hran) vztahem $\tilde{G}_A^1 = \tilde{G}_A$.

2,7 Věta: *Je-li* G_A *strom, pak sdružený graf* $\tilde{G}_A$ *je opět strom.*

Důkaz: *a)* $\tilde{G}_A$ *je souvislý*: Nechť naopak $\tilde{G}_A$ má alespoň dvě komponenty $\tilde{H}_1$, $\tilde{H}_2$. To podle 1,1 znamená, že pro žádné $i_1 \in \tilde{H}_1$, $(i_2 \in \tilde{H}_2$ neexistuje cesta z (i_1) do (i_2). Snadno se zjistí, že tento požadavek je ekvivalentní tomu, že pro žádné $(i_1) \in \tilde{H}_1$, $(i_2) \in \tilde{H}_2$ není $(i_1)(i_2) \in K\{\tilde{G}_A\}$. Jsou-li tedy $(i_1) \in \tilde{H}_1$, $(i_2) \in \tilde{H}_2$, libovolné, pak podle 2,5 neexistuje v G_A most mezi komponentami K_{i_1}, K_{i_2} grafu H_k, tudíž G_A není souvislý.

b) $\tilde{G}_A$ *neobsahuje kružnici*: Buď $(i_1)(i_2), \ldots, (i_r)(i_1)$ kružnice v $\tilde{G}_A$. Existují tedy v G_A hrany $i_1j_1, i_2j_2, \ldots, i_rj_r$ takové, že i_1j_1 je most mezi komponentami K_{i_1}, K_{i_2}, i_2j_2 je most mezi komponentami K_{i_2}, K_{i_3} atd., i_rj_r most mezi komponentami K_{i_r}, K_{i_1} grafu H_k. Je zřejmé, že hrany můžeme označit tak, aby uzly j_l, i_{l+1} $(l = 1, 2, \ldots, r\text{-}1)$ ležely v téže komponentě $K_{i_{l+1}}$ a uzly j_r, i_1 v komponentě K_{i_1} grafu H_k. Existuje tudíž cesta $j_lj_{l,1}j_{l,2}\ldots j_{l,k_{1l}}i_{l+1}$ v komponentě $K_{i_{l+1}}$ $(l = 1,2, \ldots, r\text{-}1)$ a cesta $j_rj_{r,1}j_{r,2} \ldots j_{r,k_r}i_1$ v komponentě K_{i_1}. Pak ale

$$i_1j_1j_{1,1}j_{1,2} \ldots j_{1,k_1}i_2j_2 \ldots i_lj_lj_{l,1}j_{l,2} \ldots j_{l,k_l}i_{l+1} \ldots i_rj_r \ldots j_{r,k_r}i_1$$

je kružnice v G_A, což je spor.

2,8 Označení: Buď $\tilde{C}$ libovolný souvislý podgraf grafu $\tilde{G}_A$. Nechť (i_1), (i_2), $\ldots, (i_l)$ jsou uzly $\tilde{C}$. Označme $\sum C$ podgraf grafu G_A indukovaný množinou uzlů[1]) $\{\sum C\} = \bigcup_{s=1}^{l} \{K_{i_s}\}$. Hranu $uv \in K\{G_A\}$ nazveme **vnitřním mostem** vzhledem k $\sum C$, je-li uv most mezi některými dvěma komponentami K_{i_a}, K_{i_b} $1 \leqq a, b \leqq l$. Mosty grafu G_A, které nejsou vnitřními mosty vzhledem k $\sum C$, nazveme **vnějšími mosty** vzhledem k $\sum C$.

Označme dále C' množinu všech koncových uzlů vnějších mostů vzhledem k $\sum C$, které náleží k $\sum C$. Buď $u \in C'$, pak **relativním stupněm uzlu u** (vzhledem k $\sum C$) nazveme počet vnějších mostů vzhledem k $\sum C$, jejichž koncovým uzlem je u.

Nechť nyní relativní stupeň každého uzlu $u \in C'$ je 1, pak označme $a_{i_1i_2\ldots i_l}$ determinant podgrafu H grafu G_A definovaného takto: $\{H\} = \{\sum C\} - C'$ a hra-

1) Viz pozn. pod čarou na str. 6.

ny H dostaneme tak, že v podgrafu grafu G_A indukovaném množinou uzlů {H} vynecháme všechny vnitřní mosty vzhledem k $\sum C$. Je-li relativní stupeň alespoň jednoho uzlu $u \in C'$ větší než 1, pak položme $a_{i_1 i_2 \ldots i_l} = 0$.

Buď nyní G libovolný částečný graf grafu G_A. Necht $\widetilde{G}$ má $p + 1$ komponent $\widetilde{G}_1, \widetilde{G}_2 \ldots, \widetilde{G}_{p+1}$. Každé komponentě $\widetilde{G}_l$ $(l = 1, 2, \ldots, p + 1)$ přísluší jisté $a_{i_1^l i_2^l \ldots i_{k_l}^l}$. Pak $\widetilde{G}$ přiřadíme číslo

$$h_{\widetilde{G}} = (-1)^p \prod_{l=1}^{p+1} a_{i_1^l i_2^l \ldots i_{k_l}^l}. \tag{2}$$

2,9 **Lemma**: *Buď $\widetilde{C}$ souvislý podgraf grafu $\widetilde{G}_A$ o $n+1$ uzlech (1), (2), ..., $(n+1)$, buď $(n)(n+1)$ jeho hrana a $(n+1)$ buď uzel 1. stupně v $\widetilde{G}_A$. Buď uv most mezi komponentami K_n, K_{n+1}, $u \in K_n$, $v \in K_{n-1}$. Definujme částečné podgrafy C_1, C_2 grafu G_A takto:*

$$\{C_1\} = (\bigcup_{k=1}^{n} \{K_k\} - C') \cup \{u\}$$

Z množiny všech hran podgrafu grafu G_A indukovaného $\{C_1\}$ vynecháme všechny vnitřní mosty vzhledem k $\sum C$.

$$\{C_2\} = \{K_{n+1}\}$$

hrany C_2 jsou hrany podgrafu indukovaného množinou $\{C_2\}$. Označme ještě $a_{12\ldots n} =$ $= \det C_1$ a $D_2 = \det C_2$. Pak platí

$$a_{12\ldots n} D_2 = a_{12\ldots n\, n+1}. \tag{3}$$

Důkaz: Buď H částečný podgraf grafu G_A definovaný v 2,8. Hrana uv k H nepatří, takže matice **A** je reducibilní a tedy $\det H = \det C_1 \,.\, \det C_2$ podle Laplaceovy věty.

2,10 **Věta**: (hlavní). *Platí*

$$D = \sum_{\widetilde{G}} h_{\widetilde{G}} \tag{4}$$

kde sčítáme přes všechny částečné grafy $\widetilde{G}$ grafu $\widetilde{G}_A$. (D značí nadále podle úmluvy 1,9 determinnat G_A).

Důkaz: provedeme indukcí podle počtu mostů (viz 2,4) grafu G_A.

a) $n = 1$: Podle 2,4 při použití lemmatu 2,9 jest

$$D = D_1 D_2 - \widetilde{D}_1 \widetilde{D}_2 = a_1 D_2 - a_1 a_2 = a_{12} - a_1 a_2. \tag{5}$$

Ježto sdružený graf $\widetilde{G}_A$ má jen dva uzly, jsou všechny částečné grafy grafu $\widetilde{G}_A$ pouze celé $\widetilde{G}_A$ a dva isolované uzly. Jim podle 2,8 odpovídají členy a_{12}, $-a_1 a_2$. Tím je tvrzení pro $n = 1$ dokázáno.

b) Necht G_A má n mostů a necht věta platí pro všechna $s \leqq n-1$.

Podle 2,7 a 1,2 má $\widetilde{G}_A$ alespoň dva uzly 1. stupně. Ve shodě s lemmatem 2,9 označme bez újmy obecnosti jeden z nich $(n+1)$ a uzel jemu sousední (n), most mezi komponentami K_n, K_{n+1} označme uv, $u \in K_n$, $v \in K_{n+1}$. Aplikujme nyní lemma 2,4 na most uv. Jest

$$D = D_1 D_2 - \widetilde{D}_1 \widetilde{D}_2 \tag{1}$$

D_1 je determinant podgrafu G_1 grafu G_A indukovaného množinou uzlů $\{G_1\} =$ $= \{G_A\} - \{K_{n+1}\}$, D_2 determinant K_{n+1}, $\widetilde{D}_1$ determinant podgrafu G_2 grafu G_A indukovaného množinou uzlů $\{G_2\} = \{G_1\} - \{u\}$, $\widetilde{D}_2$ determinant podgrafu grafu

G_A indukovaného množinou uzlů $\{K_{n+1}\} - \{v\}$. G_1 obsahuje $n-1$ mostů, je tudíž podle indukčního předpokladu

$$(6) \qquad D_1 = \sum_{\widetilde{G}^1} h_{\widetilde{G}^1}$$

kde sčítáme přes všechny částečné grafy $\widetilde{G}^1$ grafu $\widetilde{G}_1$. Každý sčítanec v (6) splňuje spolu s D_2 předpoklady lemmatu 2,9, takže

$$(7) \qquad D_1 D_2 = \sum_{\widetilde{G}^2} h_{\widetilde{G}^2}$$

kde sčítáme přes všechny částečné grafy $\widetilde{G}^2$ grafu $\widetilde{G}_A$, které obsahují hranu $(n)(n+1)$.

Rozlišme nyní dva případy:

α) Uzel u není koncovým uzlem žádného jiného mostu G_A než uv. Potom G_2 obsahuje $k-1$ mostů a je tedy podle indukčního předpokladu (viz poznámka 2,6)

$$(8) \qquad \widetilde{D}_1 = \sum_{\widetilde{G}^3} h_{\widetilde{G}^3}$$

kde sčítáme přes všechny částečné grafy $\widetilde{G}_3$ grafu $\widetilde{G}_2$.

β) Uzel u je koncovým uzlem ještě nějakých mostů grafu G_A kromě uv. Buď wu jeden z nich, $w \in K_l$. Jelikož $\widetilde{G}_2$ neobsahuje u, neobsahuje ani hranu wu. Podle 2,5 nelze tudíž hranu $(l)(n)$ z grafu G_2 odstranit (neboť nelze provést rozklad G_2 podle wu). Je tedy podle indukčního předpokladu

$$(9) \qquad \widetilde{D}_1 = \sum_{\widetilde{G}^4} h_{\widetilde{G}^4}$$

kde sčítáme přes všechny částečné grafy $\widetilde{G}^4$ grafu $\widetilde{G}_2$, které ale obsahují všechny hrany jejichž koncový uzel je (n). Avšak jestliže hranu $(l)(n)$ formálně odstraníme, pak uzel u je relativního stupně 2 (vzhledem k jistému $\sum C$) tj. podle definice 2,8 je determinant souvislého podgrafu grafu $\widetilde{G}_2$, který obsahuje (n), roven nule. Můžeme tedy i v tomto případě klidně psát

$$(8) \qquad D_1 = \sum_{\widetilde{G}^3} h_{\widetilde{G}^3}$$

kde sčítáme přes všechny částečné grafy $\widetilde{G}^3$ grafu $\ddot{G}^2$

Dále jest

$$(10) \qquad \widetilde{D}_2 = a_{n+1}$$

tudíž

$$(11) \qquad \widetilde{D}_1 \widetilde{D}_2 = \sum_{\widetilde{G}^5} h_{\widetilde{G}^3}\, a_{n+1} = -\sum_{\widetilde{G}^5} h_{\widetilde{G}^5}$$

kde sčítáme přes všechny částečné grafy $\widetilde{G}^5$ grafu $\widetilde{G}_A$, které neobsahují hranu $(n)(n+1)$. Znamení minus je zde proto, že každý $\widetilde{G}^3$ má o jednu komponentu méně než $\widetilde{G}^5$ (viz 2,8).

Jelikož zřejmě každý částečný graf stromu o $n+1$ uzlech, kde $(n+1)$-ní uzel je stupně 1, dostaneme z grafu o n uzlech přidáním $(n+1)$-ního uzlu tím, že hranu $(n)(n+1)$ buď přidáme, nebo ne, plyne odtud a z (1), (7) a (11) ihned (4).

2,11 Poznámka: V praxi je často výhodné volit mosty tak, aby všechna $a_{i_1 i_2 \dots i_l}$ byly determinanty řetězců nebo jejich součiny. Význam této poznámky bude ukázán v příkladu 1 v odst. 2,15.

2,12 Definice a označení: Vyšetřeme nyní speciální případ, když $\widetilde{G}_A$ je řetězec. Jeho uzly označme (1), (2), ..., (n) tak, že $(i)(i+1) \in K\{\widetilde{G}_A\}$, $(i = 1, 2, \dots, n-1)$. Jim odpovídají pořadě komponenty $K_1, K_2, \dots, K_n$ grafu H_n.

Nazvěme ještě levým mostem *komponenty K_i most mezi komponentami K_{i-1}, K_i $(i = 2, 3, \dots, n)$* a pravým mostem *komponenty K_i most mezi K_i, K_{i+1} $(i = 1, 2, \dots, n-1)$.*

Každému uzlu (i) grafu $\widetilde{G}_A$ přiřadíme čtyři čísla a_i^1, a_i^2, a_i^3, a_i^4 takto:

(12)

a_i^1 je determinant K_i.

a_i^2 je determinant podgrafu, indukovaného množinou uzlů, která vznikne z $\{K_i\}$ vynecháním koncového uzlu pravého mostu komponenty K_i; je nula, nemá-li K_i pravý most.

a_i^3 je determinant podgrafu, indukovaného množinou uzlů, která vznikne z $\{K_i\}$ vynecháním koncového uzlu levého mostu komponenty K_i; je nula nemá-li K_i levý most.

a_i^4 je determinant podgrafu, indukovaného množinou uzlů, která vznikne z $\{K_i\}$ vynecháním koncových uzlů pravého i levého mostu komponenty K_i, pokud oba existují a jsou různé; je nula v opačném případě.

2,13 Definice: *Konečnou posloupnost $\{j_1, j_2, \dots, j_n\}$, jejíž prvky jsou čísla* 1, 2, 3, 4, *nazveme přípustnou, jsou-li splněny tyto tři podmínky:*

(13)

1. $j_1 = 1,2$
2. $j_n = 1,3$
3. je-li $j_i = 1,3$ pak $j_{i+1} = 1,2$
   je-li $j_i = 2,4$ pak $j_{i+1} = 3,4$ $\quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$

Platí: *Jestliže se v přípustné posloupnosti $\{j_1, j_2, \dots, j_n\}$ vyskytuje číslo 2 p-krát, pak číslo 3 se v ní vyskytuje rovněž p-krát.*

Důkaz: Ze 3. plyne, že za číslem 2 může následovat 3 nebo 4, za číslem 4 čísla 3 nebo 4, ale podle 2. nemůže být číslo 4 posledním prvkem posloupnosti $\{j_1, j_2, \dots, j_n\}$. Tedy za každým číslem 2 nutně následuje číslo 3.

Znamením přípustné posloupnosti $\{j_1, j_2, \dots, j_n\}$ nazveme číslo $sgn\{j_1, j_2, \dots, j_n\}$ definovaném takto: Nechť v $\{j_1, j_2, \dots, j_n\}$ se vyskytuje p-krát číslo 2 a r-krát číslo 4. Pak klademe

$$sgn\{j_1, j_2, \dots, j_n\} = (-1)^{p+r}. \tag{14}$$

2,14 Věta: *Pro determinant D grafu G_A, pro který je $\widetilde{G}_A$ řetězec o n uzlech, platí při označení z* 2,12 *a* 2,13

$$D = \sum sgn\{j_1, j_2, \dots, j_n\}\, a_1^{j_1} a_2^{j_2} \dots a_n^{j_n}, \tag{15}$$

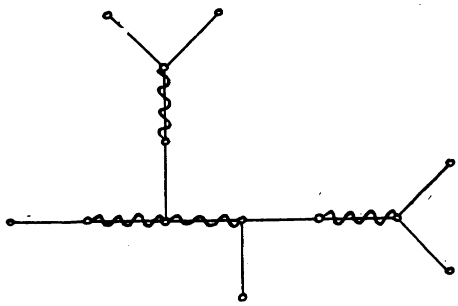
kde se sčítá přes všechny přípustné posloupnosti $\{j_1, j_2, \dots, j_n\}$.

Důkaz: lze provést indukcí podle n analogicky jako u hlavní věty 2,10.

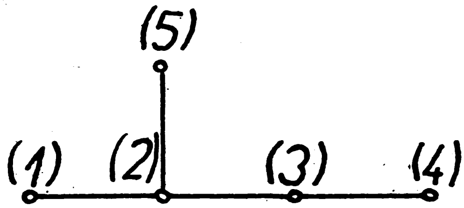
2,15 Příklady: 1. Spočteme determinant grafu na obr. 1 podle věty 2,10 s přihlédnutím k poznámce 2,11. Mosty jsou označeny vlnkovitě.

Sdružený graf má tedy tvar z obr. 2.
Jest:

$a_1 = 3$	$a_{12} = 8$	$a_{123} = 192$	$a_{1234} = 10584$	$a_{12345} = 592704$
$a_2 = 0$	$a_{23} = 8$	$a_{125} = 504$	$a_{1235} = 10752$	
$a_3 = 3$	$a_{25} = 0$	$a_{234} = 441$	$a_{5234} = 27783$	
$a_4 = 9$	$a_{34} = 189$	$a_{523} = 504$		
$a_5 = 9$				



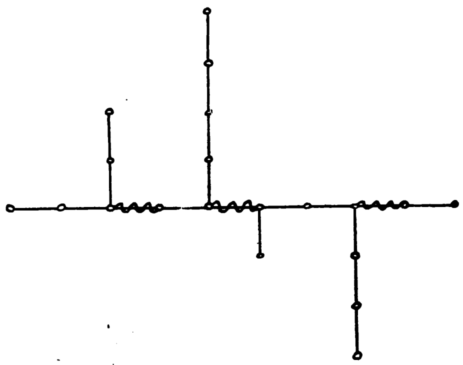
Obr. 1.



Obr. 2.

$$D = \sum_{\widetilde{G}} h_{\widetilde{G}} = 592\,704 + 136\,08 + 11\,907 + 13\,608 + 13\,608 + 15\,552 + 83\,349 -$$
$$- 95\,256 - 96\,768 - 92\,256 - 1944 - 19\,44 = 286\,470$$

2. Podle věty 2,14 spočteme determinant grafu (mosty jsou opět vyznačeny vlnkovitě):



Obr. 3.

Sdružený graf má tedy tvar:

Obr. 4.

Jest:	$a_1^1 = 144$	$a_2^1 = 377$	$a_3^1 = 987$	$a_4^1 = 8$
	$a_1^2 = 64$	$a_2^2 = 165$	$a_3^2 = 441$	$a_4^2 = 0$
	$a_1^3 = 0$	$a_2^3 = 144$	$a_3^3 = 432$	$a_4^3 = 3$
	$a_1^4 = 0$	$a_2^4 = 55$	$a_3^4 = 189$	$a_4^4 = 0$

Znamení přípustných posloupností jsou:

$sgn\,\{1, 1, 1, 1\} = (-1)^0 = 1$

$sgn\,\{1, 1, 2, 3\} = (-1)^1 = -1$

$sgn\,\{1, 2, 3, 1\} = (-1)^1 = -1$

$sgn\,\{1, 2, 4, 3\} = (-1)^{1+1} = 1$

$sgn\,\{2, 3, 1, 1\} = (-1)^1 = -1$

$sgn\,\{2, 4, 3, 1\} = (-1)^{1+1} = 1$

$sgn\,\{2, 3, 2, 3\} = (-1)^2 = 1$

$sgn\,\{2, 4, 4, 3\} = (-1)^{1+2} = -1$

$$D = \sum sgn\{j_1, j_2, j_3, j_4\}\, a_1^{j_1}\, a_2^{j_2}\, a_3^{j_3}\, a_4^{j_4} = 428658048 - 71823024 +$$
$$+ 13471920 - 82114560 + 12192768 - 72769536 + 12165120 - 1995840 =$$
$$= 237784896.$$

3. DETERMINANTY SPOJENÍ KRUŽNIC, JEJICHŽ SDRUŽENÝ GRAF JE STROM

3,1 Definice: *Graf G se nazývá* rovinným, *jestliže jej lze zobrazit na rovinu tak, aby různým uzlům odpovídaly různé body roviny a hranám oblouky* (oblouk je každá množina homeomorfní s intervalem $\langle 0,1 \rangle$), *přičemž žádné dva oblouky nemají kromě koncových bodů jiné společné body. Obrazu grafu G v rovině budeme říkat* umístění *a budeme pro ně užívat téže terminologie jako pro graf G.*

Učiňme ještě tuto úmluvu: Nebude-li řečeno jinak, pak při jakýchkoli úvahách o rovinném grafu již předem předpokládáme, že je dáno nějaké jeho umístění a veškeré úvahy se týkají pouze tohoto umístění.

V topologii se dokazuje, že každá množina homeomorfní s kružnicí (geometricky) rozděluje rovinu na dvě disjunktní oblasti, z nichž jedna se nazývá vnitřek, druhá vnějšek. Budeme pokládat tyto pojmy a věty za známé a v dalších jich bez poznámky užívat. Speciálně tedy každá kružnice (viz 1,1) rovinného grafu rozděluje rovinu na vnitřek a vnějšek této kružnice.

Budeme říkat, že dva grafy G_1 a G_2 mají stejnou strukturu, *existuje-li prosté zobrazení f množiny $\{G_1\}$ na $\{G_2\}$ takové, že $\langle x, y \rangle \in K\{G_1\} \Rightarrow \langle f(x), f(y) \rangle \in K\{G_2\}$.*

V grafu G zaveďme místo hrany uv nový uzel x a hrany ux, xv. Budeme říkat, že takto sestrojený graf G' vznikl z grafu G půlením hrany uv. *Grafy G_1 a G_2 jsou* homeomorfní, *když buď mají stejnou strukturu nebo když půlením některých hran (postupným) je lze převést na grafy téže struktury.*

3,2 *Budeme říkat, že graf G má vlastnost (R), jestliže*

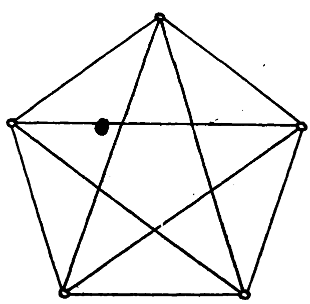
I. Stupeň každého uzlu $u \in G$ je nejvýše 3.

II. Každá hrana $uv \in G$ leží v nějaké kružnici.

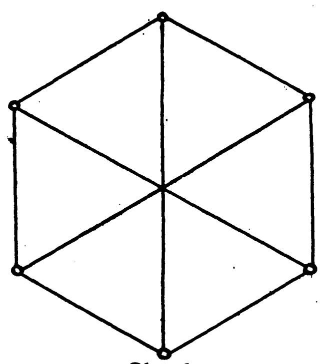
III. G není homeomorfní s grafem z obr. 6.

Věta: *Souvislý graf G, který má vlastnost (R) je rovinný.*

Důkaz: Kdyby graf G nebyl rovinný, musel by podle věty Pontrjagina-Kuratowského obsahovat jako částečný podgraf graf homeomorfní s některým z následujících grafů (viz např. (3), str. 231), což podle I. a III. není možné.



Obr. 5.



Obr. 6.

3,3 *Mějme dvě cesty* $u_1u_2\ldots u_k$, $v_1v_2\ldots v_l$ *grafu G. Jejich* spojením *nazveme množinu všech uzlů a hran, které se vyskytují alespoň v jedné z nich.*

Dvě cesty $u_1u_2\ldots u_k$, $v_1v_2\ldots v_l$ *grafu G nazveme* disjunktní, *jestliže nemají žádné společné hrany.*

Kružnici $u_1u_2\ldots u_n = u_1$ *grafu G nazveme* prostou v G (nebude-li hrozit nedorozumění, budeme říkat též jen prostou), *jestliže pro žádné* u_i, u_j $(1 \leqq i, j \leqq n)$ *neexistuje v G cesta z* u_i *do* u_j *ležící uvnitř* $u_1u_2\ldots u_n$ (rozumí se při daném umístění, viz 3,1).

Lemma: *Buď G graf s alespoň jednou hranou, který má vlastnost (R). Pak ke každé hraně uv G existuje alespoň jedna prostá kružnice U taková, že uv leží na U.*

Důkaz: Jelikož $\{G\}$ je konečná množina, je *i* množina všech prostých posloupností uzlů konečná, tedy tím spíše je počet všech kružnic grafu *G* konečný. Podle předpokladu existuje v *G* kružnice U_1, která obsahuje hranu *uv*. Je-li U_1 prostá, jsme hotovi. V opačném případě existuje v *G* cesta, která U_1 rozděluje na dvě různé kružnice U_2, U_3, přičemž jako U_3 jsme označili tu, která obsahuje hranu *uv*. Stejným postupem pokračujeme dále. Kdyby U_3 nebyla prostá, obdrželi bychom kružnice U_4, U_5, kde U_5 obsahuje hranu *uv* atd. Je jasné, že po konečném počtu kroků dospějeme ke kružnici U_{2k+1}, která je prostá a obsahuje hranu *uv*, neboť v opačném případě dostáváme spor s konečností všech kružnic v *G*.

3,4 Věta: *Graf alespoň s jednou hranou, který má vlastnost (R), lze rozložit na konečný počet kružnic prostých v G, jejichž spojením obdržíme celé G.*

Důkaz: Buď nejprve *G* souvislý. Zvolme libovolně hranu *uv* z *G*. Ta podle 3,3 leží v některé prosté kružnici U_1. Není-li U_1 celé *G*, existuje v *G* hrana, která leží vně U_1 a má s U_1 alespoň jeden společný koncový uzel *w*. Tato hrana však leží opět v nějaké prosté kružnici U_2 grafu *G*, která je různá od U_1.

Mějme již sestrojeny prosté kružnice $U_1, U_2, \ldots, U_k$. Není-li jejich spojení celé *G* existuje v *G* hrana, která neleží ve spojení $U_1, U_2, \ldots, U_k$, ale má s tímto spojením společný alespoň jeden koncový uzel, takže podle 3,3 existuje prostá kružnice U_{k+1} různá od všech $U_1, U_2, \ldots, U_k$.

Vzhledem ke konečnosti $K\{G\}$ je zřejmé, že po konečném počtu kroků obdržíme *p* prostých kružnic $U_1, U_2, \ldots, U_p$, jejichž spojením je celé *G*.

Je-li *G* nesouvislý provedeme důkaz pro každou komponentu zvlášť.

Poznámka: Uvědomme si ještě toto: Jsou-li $U_1, U_2, \ldots, U_p$ všechny prosté kružnice grafu *G*, jest $p \leqq q$. Může se totiž stát, že prováděním předchozího postupu nedostaneme všechny prosté kružnice, avšak ty kružnice, jež zbudou, budou jistě prosté (neboť by jinak existovala v *G* hrana, která by nebyla ve spojení U_1, $U_2, \ldots, U_p$), jak je vidět na obr. 7.

Věta 3,4 nás opravňuje k této definici:

3,5 Definice: *Buď G graf s vlastností (R).* Sdruženým grafem $\tilde{G}$ *ke grafu G* (krátce: sdruženým grafem) *nazveme graf definovaný takto*:

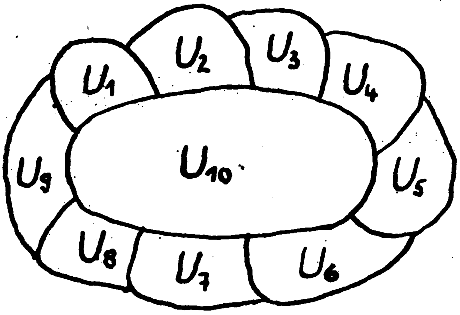
1. *Uzly* $\tilde{G}$ *jsou všechny prosté kružnice* $U_1, U_2, \ldots, U_k$ *grafu G, označme je* (1), (2), ..., (*k*).

2. $(u)(v) \in K\{\tilde{G}\}$, *existuje-li v G cesta společná oběma kružnicím* U_u, U_v $1 \leqq u$, $v \leqq k)$ *grafu G.*

Název sdružený graf jistě nepovede k nedorozumění s týmž pojmem zavedeným v 2,5. Naopak, jak uvidíme později u grafů, které budou kombinacemi grafů z § 2 a 3, nám tato terminologie usnadní vyjadřování, přičemž bude ze souvislosti jasně patrné, oč se jedná.

3,6 Úmluva: V celém tomto paragrafu, nebude-li řečeno jinak, se budeme zabývat souvislými grafy *G* s těmito vlastnostmi:

1. G má vlastnost (R), každá prostá kružnice má více než tři uzly, každé dvě prosté kružnice mají společnou nejvýše jednu hranu a sdružený graf je strom. (Grafy 1. typu).
2. Grafy 2. typu 1. řádu dostaneme z grafů 1. typu tím, že z některé prosté kružnice grafu G (1. typu) vynecháme cestu disjunktní s ostatními kružnicemi, při čemž nevznikne graf 1. typu. Sdružený graf ke grafu 2. typu 1. řádu zůstane týž jako u příslušného grafu 1. typu. Analogicky definujeme grafy 2. typu 2. řádu z grafů 1. řádu atd.



Obr. 7.

Nechť graf H 2. typu k-tého řádu vznikne z grafu G 1. typu, odstraněním jistých cest z kružnic U_1, U_2, ..., U_k. Zbylé části těchto kružnic nazýváme neúplné kružnice v H.

Definovali jsme tedy grafy 2. typu z grafů 1. typu. Vyslovíme nyní definici, která z pojmu grafu 1. typu nevychází. Říkáme, že graf H je 2. typu k-tého řádu, jestliže existuje graf G 1. typu takový, že H vznikne z G předchozím postupem, přitom klademe $\tilde{H} = \tilde{G}$.

3,7 Definice: *Nechť U_1, U_2 jsou prosté kružnice grafu G a uv jejich společná hrana. Hranu uv nazýváme* hranicí mezi kružnicemi U_1, U_2. *Dále hranu uv nazýváme* hranicí grafu G, *existují-li v G dvě prosté kružnice U_1, U_2 takové, že uv je hranicí mezi kružnicemi U_1, U_2.*

Buď $\tilde{C}$ souvislý podgraf grafu $\tilde{G}$. Hranu uv, která je hranicí mezi některými dvěma kružnicemi z C (C je příslušný podgraf grafu G, jehož tvar je z předchozího zřejmý) *nazveme* vnitřní hranicí *vzhledem k C. Hranice grafu G, které nejsou vnitřními hranicemi* (vzhledem k C) *nazveme* vnější hranice *vzhledem k C.*

3,8 Věta: *Nechť ij je hranicí grafu G, $ii_1 i_2 \ldots i_{k-1} j$ libovolná cesta z i do j. Pak platí: Je-li U libovolná prostá kružnice v G, pak nastane právě jeden z těchto tří případů:*
a) U nemá s $ii_1i_2 \ldots i_{k-1}j$ žádnou společnou hranu,
b) U má s $ii_1i_2 \ldots i_{k-1}j$ společnou jedinou hranu. Tato hrana je hranicí mezi U a některou jinou prostou kružnicí z G,
c) U má s $ii_1i_2 \ldots i_{k-1}j$ společné všechny hrany s výjimkou nejvýše těch, které jsou hranicemi mezi U a některou jinou prostou kružnicí z G.

Důkaz: Hrany, které nejsou hranami v G, budeme v tomto důkaze pro stručnost nazývat volné hrany. Mezi každými dvěma hranami libovolné prosté kružnice grafu G leží alespoň jedna volná hrana, neboť v opačném případě by $\tilde{G}$ nebyl strom.

Označme $i = i_0$, $j = i_k$ a přiřaďme nyní cestě $i_0 i_1 \ldots i_k$ konečnou posloupnost uzlů sdruženého grafu $\tilde{G}$ (ne nutně prostou) takto: $i_0 i_1$ je volná hrana (neboť ij je hranice) jisté prosté kružnice U_{j_1}. Mějme již určeny kružnice U_{j_1}, U_{j_2}, ..., U_{j_l} ($l \geqq 1$) a nechť hrany $i_0 i_1$, $i_1 i_2$, ..., $i_{p-1} i_p$ leží v těchto kružnicích a $i_p i_{p+1}$ ($1 \leqq p \leq \leq k-1$) je volná hrana G a nepatří k U_{j_l}. Pak ovšem patří k jisté prosté kružnici $U_{j_{l+1}}$ (ne nutně různé od U_{j_1}, U_{j_2}, ..., $U_{j_{l-1}}$, avšak zřejmě různé od U_{j_l}). Tím je zřejmě jednoznačně definována konečná posloupnost uzlů (j_1), (j_2), ..., (j_s) grafu $\tilde{G}$ taková, že $(j_m)(j_{m+1}) \in K\{\tilde{G}\}$ ($m = 1, 2, \ldots, s-1$).

Nejprve je $(j_1) = (j_s)$, neboť v opačném případě by v $\tilde{G}$ existovala kružnice (viz (3), str. 7, Satz 4 a poznámka pod čarou). Dále buď (j_r) $(1 \leqq r \leqq s)$ libovolný uzel. Jestliže po odstranění hrany $(j_r)(j_{r+1})$ z $\widetilde{G}$ leží (j_r) a (j_1) v téže komponentě, pak se nutně uzel (j_r) vyskytuje v posloupnosti $(j_1), (j_2), \ldots, (j_s)$ ještě jednou s indexem větším než r (jinak by zase existovala v $\widetilde{G}$ kružnice). Odtud plyne c. Konečně kdyby prostá kružnice U měla s $i_0 i_1 \ldots i_k$ společné alespoň dvě hranice $\widetilde{G}$ a žádnou volnou hranu, existovala by opět $v G$ kružnice. Odtud již dokazované tvrzení snadno plyne.

3,9 Vraťme se nyní ke vzorci (3) z věty 1,8. Z tvaru cesty $i i_1 \ldots i_{k-1} j$ je ihned vidět tvar determinantu $D_{\binom{i, i_1, \ldots, j}{i, i_1, \ldots, j}}$, takže jej můžeme bez obav psát jednoduše D_R. Přepišme tedy vzorec (3) z 1,8:

$$D = D_{ij} - \overset{\frown}{\underset{\smile}{ij}}\, D_R - \sum \overset{\frown}{\underset{\smile}{i i_1 \ldots i_{k-1} j}}\, D_R, \tag{1}$$

kde sčítáme přes všechny cesty délky alespoň dvě z i do j grafu G_A.

Mějme nyní graf G_A (viz 3,6), ij buď hranicí grafu G_A, $\widetilde{G}_A$ buď sdružený graf ke G_A. Budeme říkat, že jsme odstranili hranici ij, uvažujeme-li v (1) pouze člen D_{ij}, dále že jsme odstranili hranu $(l_1)(l_2)$ grafu $\widetilde{G}_A$, jestliže uvažujeme pouze člen $\overset{\frown}{\underset{\smile}{ij}}\, D_R$ (ij je ovšem hranice mezi kružnicemi U_{l_1}, U_{l_2}). Buď nyní $i i_1 \ldots i_{k-1} j$ libovolná cesta délky alespoň dvě z i do j grafu G_A. Buďte $U_{j_1}, U_{j_2}, \ldots, U_{j_p}$ všechny prosté kružnice grafu G_A pro něž nastane případ c) z věty 3,8. Pak říkáme, že jsme odstranili uzly $(j_1), (j_2), \ldots, (j_p)$ z grafu $\widetilde{G}_A$, jestliže uvažujeme pouze člen $\overset{\frown}{\underset{\smile}{i i_1 \ldots i_{k-1} j}}\, D_R$.

3,10 Označení: Buď $\widetilde{C}$ libovolný souvislý podgraf grafu $\widetilde{G}_A$. Nechť $\widetilde{C}$ má uzly $(i_1), (i_2) \ldots, (i_k)$. Označme $f_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ determinant částečného podgrafu D grafu G definovaného takto:

1. Uzly D dostaneme z uzlů C vynecháním všech koncových uzlů vnějších hranic vzhledem k C (tvar C je z předchozího jistě zřejmý).

2. Hrany D dostaneme tak, že v podgrafu grafu G_A, indukovaném množinou uzlů 1. vynecháme všechny vnitřní hranice vzhledem k C.

Buď nyní $\widetilde{G}$ libovolný částečný podgraf grafu $\widetilde{G}_A$. Nechť podgraf grafu $\widetilde{G}_A$, indukovaný množinou uzlů $\{\widetilde{G}_A\} - \{\widetilde{G}\}$ (budeme jej nazývat komplementární podgraf ke $\widetilde{G}$ nebo krátce komplement) ma p komponent souvislosti. Dále nechť $\widetilde{H}_1, \widetilde{H}_2, \ldots, \widetilde{H}_s$ jsou komponenty grafu $\widetilde{G}$ a nechť l je počet dvojic uzlů (a), (b) takových, že (a), (b) leží v různých komponentách $\widetilde{G}$ a jsou sousední uzly v $\widetilde{G}_A$. Jestliže každé komponentě H_r přísluší jisté $f_{i_1^r i_2^r \ldots i_{k_r}^r}$, pak $\widetilde{G}$ přiřadíme číslo

$$h_{\widetilde{G}} = (-1)^l (-2)^p \prod_{r=1}^{s} f_{i_1^r i_2^r \ldots i_{k_r}^r}. \tag{2}$$

3,11 Věta: *Buď G_A graf 2. typu k-tého řádu, $U_{j_1}, U_{j_2}, \ldots, U_{j_k}$ buďte jeho neúplné kružnice. Pak platí*

$$D = \sum_{\widetilde{G}} h_{\widetilde{G}}, \tag{3}$$

kde sčítáme přes všechny částečné podgrafy $\widetilde{G}$ grafu $\widetilde{G}_A$, které obsahují uzly $(j_1), (j_2), \ldots, (j_k)$. ($D$ podle 1,9 značí det G_A).

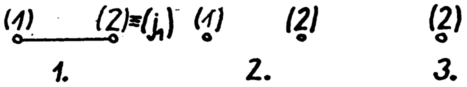
Důkaz: provedeme indukcí podle k.

1. Věta platí pro $k = 1$: Důkaz provedeme indukcí podle počtu h hranic grafu G_A.

$a)$ $h = 1$: Podle (1) jest

$$D = D_{-ij} - \widehat{ij}\, D_R - \sum \widehat{ii_1\ldots i_{k-1}j}\, D_R = f_{12} - f_1 f_2 - 2f_2, \tag{4}$$

neboť existují jen tři částečné podgrafy grafu G_A, které obsahují (j_1) (viz obr. 8), jimž podle 3,10 odpovídají po řadě členy $f_{12}, -f_1, -f_1 f_2, -2f_2$.



Obr. 8.

b) Nechť věta platí pro všechny grafy 2. typu 1. řádu s menším počtem hranic než h. Užijme větu 1,8 na některou hranici grafu G_A, označme ji ij, která leží v U_{j_1} a v jisté U_{k_1}. Jest

$$D = D_{-ij} - \widehat{ij}\, D_R - \sum \widehat{ii_1\ldots i_{k-1}j}\, D_R, \tag{1}$$

kde D_{-ij} je determinant částečného grafu G_1 grafu G_A, vzniklého odstraněním hrany ij, D_R příslušný hraně ij je determinant podgrafu G_2 grafu G_A, vzniklého odstraněním uzlů i, j.

Označme U'_{j_1} neúplnou kružnici grafu G_1. Podle indukčního předpokladu jest

$$D_{-ij} = \sum_{\tilde{G}} h_{\tilde{G}^1}, \tag{5}$$

kde sčítáme přes všechny částečné podgrafy grafu $\tilde{G}_1$, které obsahují uzel (j'_1), čili jak je patrné přes všechny částečné podgrafy grafu $\tilde{G}_A$, které obsahují hranu $(k_1)(j_1)$.

Dále podle 3,9 a 3,10 a indukčního předpokladu jest

$$\widehat{ij}\, D_R = -\sum_{\tilde{G}} h_{\tilde{G}^2}, \tag{6}$$

kde sčítáme přes všechny částečné podgrafy $\tilde{G}^2$ grafu $\tilde{G}_A$, které obsahují uzly (k_1), (j_1), ale neobsahují hranu $(k_1)(j_1)$. Znamení minus je zde proto, že v indukčním předpokladu nevystupují uzly (k_1), (j_1) jako sousední.

Dále podle věty 3,8 je každý sčítanec v $\sum \widehat{ii_1\ldots i_{k-1}j}\, D_R$ v (1) determinant podgrafu G_3 grafu G_A takového, že z $\tilde{G}_A$ je odstraněna nějaká souvislá část obsahující (k_1). Tedy podle indukčního předpokladu je zřejmě

$$\sum \widehat{ii_1\ldots i_{k-1}j}\, D_R = -\tfrac{1}{2} \sum_{\tilde{G}} h_{\tilde{G}^3}, \tag{7}$$

kde sčítáme přes všechny částečné podgrafy grafu $\tilde{G}_A$, které neobsahují (k_1) a obsahují (j_1). $-\frac{1}{2}$ je zde proto, že komplement $\tilde{G}^3$ má v $\tilde{G}_3$ o jednu komponentu méně než v $\tilde{G}_A$.

Zřejmě dosazením (5), (6) a (7) do (1) dostaneme (3).

2. Z předpokladu, že věta platí pro $k—1$ neúplných kružnic, dokážeme, že platí i pro k touto úvahou: Doplňme neúplnou kružnici U_{j_k} na kružnici (viz 3,6). Vznikne graf 2. typu $(k—1)$. řádu. Na něj užijeme indukční předpoklad. Nyní však členy, které odpovídají částečným podgrafům grafu $\widetilde{G}_A$, které neobsahují (j_k) musíme vynechat, neboť ty vzniknou vynecháním všech volných hran kružnice U_{j_k} (pomocí cesty $ii_1 \ldots i_{k-1}j$), to však v G_A nelze provést.

3,12 **Věta**: (hlavní): *Buď G_A graf* 1. *typu. Pak platí*

$$D = \sum_{\widetilde{G}} h_{\widetilde{G}}, \tag{8}$$

kde sčítáme přes všechny částečné podgrafy grafu $\widetilde{G}_A$.

Důkaz: se provádí analogicky jako u věty 3,11, použijeme-li věty 1,8 na hranici mezi koncovou kružnicí (odpovídá koncovému uzlu grafu $\widetilde{G}_A$) a kružnicí jí sousední, při použití předchozí věty.

3,13 Vyšetřeme nyní speciální případ, kdy $\widetilde{G}_A$ je řetězec. Očíslujme jeho uzly (1), (2), ..., (n) tak, že $(k)\,(k+1) \in K\{\widetilde{G}_A\}$ pro $k = 1, 2, \ldots, k—1$. Definujme nyní čísla a_i^j pro $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $i \leqq j$ jako čísla přiřazená podle 3,10 podgrafu $\widetilde{G}_A$ o uzlech $(i), (i+1), \ldots, (j-1), (j)$.

Buď nyní k přirozené číslo nejvýš rovné n. Buď $\{i_1 j_1, i_2, j_2, \ldots, i_k, j_k\}$ konečná posloupnost s těmito vlastnostmi:

$$\begin{aligned} &1.\ j_1 \geq 1, j_k \leq n \\ (9)\quad &2.\ i_l \leq j_l \text{ pro všechna } l = 1, 2, \ldots, k \\ &3.\ j_l < i_{l+1} \text{ pro všechna } l = 1, 2, \ldots, k-1 \end{aligned}$$

Buď p' počet dvojic j_l, i_{l+1} $(l = 1, 2, \ldots, k-1)$ pro něž $i_{l+1} - j_l > 1$.

$$\text{Jestliže} \quad \begin{Bmatrix} i_1 = 1, j_k = n \\ i_1 = 1, j_k \neq n \\ i_1 \neq 1, j_k = n \\ i_1 \neq 1, j_k \neq n \end{Bmatrix} \quad \text{položme} \quad \begin{Bmatrix} p = p' \\ p = p' + 1 \\ p = p' + 1 \\ p = p' + 2 \end{Bmatrix}.$$

Dále položme $q = k - 1 - p'$ a definujme $sgn\,\{i_1, j_1, i_2, j_2, \ldots, i_k, j_k = (-1)^q (-2)^p$.

Nyní z věty 3,12 a z odstavce 3,10 snadno plyne:

3,14 **Věta**: *Buď $\widetilde{G}_A$ graf* 1. *typu, $\widetilde{G}_A$ buď řetězec. Při označení z* 3,13 *platí*

$$D = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\{i_1, j_1, \ldots, i_k, j_k\}} a_{i_1}^{j_1} a_{i_2}^{j_2} \ldots a_{i_k}^{j_k}\, sgn\,\{i_1, j_1, i_2, j_2, \ldots, i_k, j_k\}, \tag{10}$$

kde sčítáme přes všechny možné konečné posloupnosti $\{i_1, j_1, i_2, j_2, \ldots, i_k, j_k\}$, s vlastností (9).

Analogicky z věty 3,11 a odstavce 3,10 se odvodí:

Věta: *Buď G_A graf* 2. *typu s-tého řádu, $\widetilde{G}_A$ buď řetězec, $U_{m_1}, U_{m_2}, \ldots, U_{m_s}$ buďte neúplné kružnice v G_A. Nechť posloupnost $\{i_1, j_1, i_2, j_2, \ldots, i_k, j_k\}$ splňuje* (9) *a*

$$\begin{aligned} (11)\quad &4.\ \textit{Každé } m_r\ (r = 1, 2, \ldots, s) \textit{ splňuje pro jisté} \\ &l\ (l = 1, 2, \ldots, k) \textit{ nerovnosti } i_l \leqq m_r \leqq j_l. \end{aligned}$$

Pak platí (10), *kde sčítáme přes všechny možné posloupnosti $\{i_1, j_1, i_2, j_2, \ldots, i_k, j_k\}$ s vlastnostmi* (9) *a* (11).

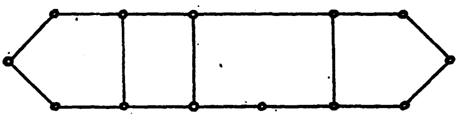
3,15 Podáme ještě návod k postupu v obecném případě, kdy G má vlastnost (R), přičemž nemusí každé dvě prosté kružnice mít společnou jen jednu hranu a sdružený graf nemusí být strom. Abychom mohli aplikovat větu 1,8 potřebujeme znát všechny cesty z i do j. Úvahy tohoto odstavce bychom mohli formulovat matematicky přesně, avšak jelikož to není cílem této práce, obejdeme se bez tohoto komplikovaného postupu a vystačíme s naivní představou. Vyjděme z uzlu i a v každém rozvětvovacím uzlu jděme vpravo. Jakmile se dostaneme do j, nebo do uzlu, v kterém jsme byli, vraťme se na nejbližší rozvětvovací uzel v němž jsme šli vpravo a jděme vlevo (a ovšem v dalších rozvětvovacích uzlech opět vpravo). Zřejmě tímto vyčerpáme všechny cesty z i do j.

(Tento postup je analogický úloze o bludišti, viz např. (2) str. 76).

3,16 Poznámka: Matice tvaru (6) z § 1 se vyskytují při geodetické triangulaci. Jelikož, jak se snadno zjistí, nemohou mít v grafech těchto matic žádné dvě prosté kružnice společnou více než jednu hranu, je tímto v podstatě řešena. V následujícím paragrafu přineseme ještě některá zobecnění, která jak ukážem nebudou samoúčelná, nýbrž bude jich možno použít i na matice, jež obdržíme z triangulace (viz 4,9).

V odstavci 3,6 jsme vyloučili grafy, které obsahují kružnice o třech uzlech. Také tento případ nemůže při triangulaci nastat, kdybychom však jej chtěli do naší teorie zahrnout, učinili bychom podobně jako v 2,8 úmluvu, že je-li U_t kružnice je f_t definováno podle 3,10 jestliže U_t neobsahuje sousední vnější hranice a je to nula v opačném případě. Analogicky pro libovolný souvislý podgraf grafu G. Věta 3,12 by platila stejně, důkaz bychom museli rozdělit na dvě části analogicky jako v 2,10.

3,17 Příklady: 1. Podle věty 3,14 spočtěme determinant grafu z obr. 9, jehož sdružený graf je vyznačen na obr. 10:



Obr. 9.

Obr. 10.

Jest (místo $sgn\,\{i_1, j_1, i_2, j_2, \ldots, i_k, j_k\}$ píšeme u jednotlivých členů jen sgn):

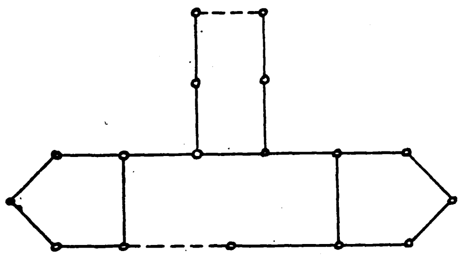
$k = 1$:	$a_1^1 = 21\ sgn = -2$	$k = 2$:	$a_1^1 a_2^2 = 21\ sgn = (-1)(-2)$
	$a_2^2 = 1\ sgn = (-2)^2$		$a_1^1 a_3^3 = 63\ sgn = (-2)^2$
	$a_3^3 = 3\ sgn = (-2)^2$		$a_1^1 a_4^4 = 441\ sgn = -2$
	$a_4^4 = 21\ sgn = -2$		$a_2^2 a_3^3 = 3\ sgn = (-1)(-2)^2$
	$a_1^2 = 144\ sgn = -2$		$a_2^2 a_4^4 = 21\ sgn = (-2)^2$
	$a_2^3 = 21\ sgn = (-2)^2$		$a_3^3 a_4^4 = 63\ sgn = (-1)(-2)$
	$a_3^4 = 377\ sgn = -2$		$a_1^2 a_3^3 = 432\ sgn = (-1)(-2)$
	$a_1^3 = 2\,584\ sgn = -2$		$a_1^2 a_4^4 = 3\,024\ sgn = -2$
	$a_2^4 = 2\,584\ sgn = -2$		$a_1^1 a_2^3 = 441\ sgn = (-1)(-2)$
	$a_1^4 = 317\,811\ sgn = 1$		$a_2^3 a_4^4 = 441\ sgn = (-1)(-2)$
$k = 3$:	$a_1^1 a_2^2 a_3^3 = 63\ sgn = (-1)^2(-2)$		$a_1^1 a_3^4 = 7\,917\ sgn = -2$
	$a_1^1 a_2^2 a_4^4 = 441\ sgn = (-1)\ (-2)$		$a_2^2 a_3^4 = 377\ sgn = (-1)(-2)$
	$a_1^1 a_2^2 a_4^4 = 1\,323\ sgn = (-1)\ (-2)$		$a_1^2 a_3^4 = 54\,288\ sgn = -1$
	$a_2^2 a_3^3 a_4^4 = 63\ sgn = (-1)^2(-2)$		$a_1^3 a_4^4 = 54\,264\ sgn = -1$
	$a_1^2 a_3^3 a_4^4 = 9\,072\ sgn = (-1)^2$		$a_1^1 a_2^4 = 54\,264\ sgn = -1$

$$a_1^1 a_2^3 a_4^4 = \ 9\,261 \; sgn = (-1)^2$$
$$a_1^1 a_2^2 a_3^4 = \ 7\,917 \; sgn = (-1)^2$$
$$k = 4\colon a_1^1 a_2^2 a_3^3 a_4^4 = 1323 \; sgn = (-1)^3$$

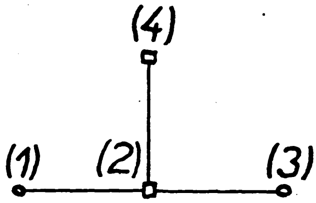
Celkem tedy je podle (10)

$$D = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\{i_1, \ldots j_k\}} a_{i1}^{j1}\, a_{i2}^{j2} \ldots a_{ik}^{jk}\, sgn\,\{i_1, j_1, i_2, j_2, \ldots, i_k, j_k\} = 153\,946.$$

2. Jako aplikaci věty 3,11 spočtěme determinant grafu z obr. 11: Čárkovaně je vyznačen příslušný graf 1. typu (jeden z mnoha). Sdružený graf má tvar (čtverečkem jsou označeny „pevné" uzly):



Obr 13.

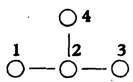
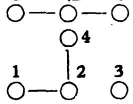
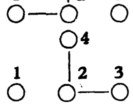
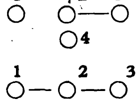
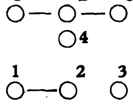
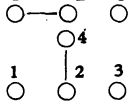
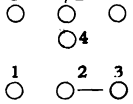
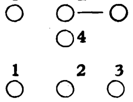


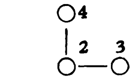
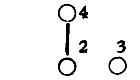
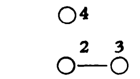
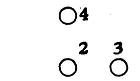
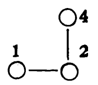
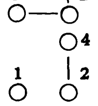
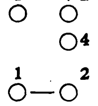
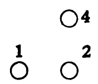
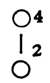
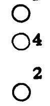
Obr. 14.

Jest:

$f_1 = 21$	$f_{12} = 432$	$f_{123} = 54\,284$
$f_2 = 3$	$f_{23} = 377$	$f_{124} = 162\,792$
$f_3 = 21$	$f_{24} = 1131$	$f_{234} = 162\,792$
$f_4 = 64$		

$$f_{1234} = 17\,480\,760$$

	$\tilde{G}$		$h_{\tilde{G}}$
1.		17 480 760	= 17 480 760
2.		(— 1) . 21 . 162 792	= — 3 418 632
3.		(—(1) . 21 . 162 792	= — 3 418 632
4.		(— 1) . 64 . 54 284	= — 3 474 176
5.		(— 1)^2 . 21 . 64 . 432	= 580 608
6.		(— 1)^2 . 21 . 21 1131	= 498 771
7.		(— 1)^2 . 21 . 64 . 377	= 506 688
8.		(— 1)^3 . 21 . 3 . 21 . 64	= — 84 672

	$\widetilde{G}$			$h_{\widetilde{G}}$
9.		$(-2) . 1\,627\,792$	$= -$	325 584
10.		$(-1) . (-2) . 21 . 1131$	$=$	47 502
11.		$(-1) . (-2) . 64 . 377$	$=$	18 256
12.		$(-1)^2(-2) . 3 . 21 . 64$	$= -$	8 064
13.		$(-2) . 162\,792$	$= -$	325 584
14.		$(-1)(-2) . 21 . 1131$	$=$	47 502
15.		$(-1) . (-2) . 64 . 432$	$=$	55 296
16.		$(-1)^2 . (-2) . 21 . 3 . 64$	$= -$	8 064
17.		$(-2)^2 . 1131$	$=$	4 524
18.		$(-1)(-2)^2 . 3 . 64$	$= -$	768

Celkem tedy jest podle (3)

$$D = \sum_{\widetilde{G}} h_{\widetilde{G}} = 8\,205\,731.$$

4. NĚKTERÉ DALŠÍ PŘÍKLADY

4,1 Multigrafem *nazýváme neprázdnou konečnou množinu uzlů a hran, přičemž každé dva uzly mohou být spojeny několika hranami. Multigraf G nazýváme* p-grafem, *jestliže každé dva uzly jsou spojeny nejvýše p hranami, přičemž alespoň jedna dvojice uzlů je spojena právě p hranami.*

Ponechme v platnosti odstavce 3,1—3,5, v úmluvě 3,6 vynechme při definici grafu 1. typu požadavek, aby dvě prosté kružnice měly společnou nejvýše jednu hranu, zbytek 3,6 ponechme beze změny.

Nechť U_1, U_2 jsou dvě prosté kružnice grafu G. Cestu $ii_1 \dots i_{k-1}j$ společnou oběma kružnicím takovou, že U_1, U_2 nemají žádnou jinou společnou hranu (to má smysl, neboť $\widetilde{G}$ je strom), nazveme hranicí mezi kružnicemi *U_1, U_2. Dále cestu $ii_1 \dots i_{k-1}$ nazýváme* hranicí grafu *G, existují-li v G dvě prosté kružnice U_1, U_2 takové, že $ii_1 \dots i_{k-1}j$ je hranicí mezi kružnicemi U_1, U_2. Je nyní nasnadě, jak upravíme* *definici* vnitřní a vnější hranice *vzhledem k C, když $\widetilde{C}$ je souvislý podgraf grafu G.*

V každé hranici grafu G zvolme libovolně jednu hranu a nazvěme ji vlastní hranicí (ta bude v dalším pevná).

Analogicky jako věta 3,8 se dokáže:

4,2 Věta: *Nechť ij je vlastní hranicí grafu G, $ii_1 \ldots i_{k-1}j$ libovolná cesta z i do j délky alespoň dvě. Pak platí: Je-li U libovolná prostá kružnice v G, pak nastane právě jeden z těchto tří případů:*

a) U nemá s $ii_1 \ldots i_{k-1}j$ společnou žádnou hranu,

b) U má s $ii_1 \ldots i_{k-1}j$ společnou právě jednu hranici grafu G,

c) U má s $ii_1 \ldots i_{k-1}j$ společné všechny hrany s výjimkou nejvýše těch, které leží na hranicích grafu G.

Z důkazu věty 3,8 je dále patrné toto: Jestliže pro dvě sousední prosté kružnice U_1, U_2 nastává případ *c*) pak cesta $ii_1 \ldots i_{k+1}j$ neobsahuje žádnou hranu z hranice mezi U_1, U_2.

4,3 Definice: *Nechť graf G má alespoň jednu hranici delší než* 1. *Definujme nyní* zobecněný sdružený graf $\widetilde{G}^t$ *jako 2-graf takto: Uzly $\widetilde{G}^t$ jsou tytéž jako u $\widetilde{G}$, přičemž (i) a (j) jsou spojeny hranou, jestliže hranice mezi U_i, U_j je hrana a (i), (j) jsou spojeny dvěma hranami, je-li hranice mezi U_i a U_j délky větší než* 1. *Jestliže (i) a (j) jsou spojeny dvěma hranami, nazvěme jednu z nich* volnou, *druhou* vázanou, *jsou-li spojeny jednou hranou, pak tato hrana je* volná.

4,4 Opišme opět vzorec (1) z 3,9

$$D = C_{-ij} - \widehat{ij}\, D_R - \sum \widehat{ii_1 \ldots i_{k-1}j}\, D_R, \tag{1}$$

kde sčítáme přes všechny cesty délky alespoň dvě z i do j grafu G_A, přičemž ij je vlastní hranicí grafu G_A.

Budeme říkat, že jsme odstranili vlastní hranici ij, uvažujeme-li v (1) pouze člen D_{-ij}, dále, že jsme odstranili volnou hranu $(l_1)(l_2)$ grafu $\widetilde{G}^t_A$, jestliže uvažujeme pouze člen $\widehat{ij}\, D_R$ (ij je ovšem část hranice mezi kružnicemi U_{l_1}, U_{l_2}). Buď nyní $ii_1 \ldots i_{k-1}j$ libovolná cesta z i do j grafu G_A délky alespoň dvě. Buďte U_{j_1}, U_{j_2}, $\ldots$, U_{j_p} všechny prosté kružnice grafu G_A, pro nějž nastane případ *c*) z věty 4,2. Pak říkáme, že jsme odstranili uzly (j_1), (j_2), $\ldots$, (j_p) z grafu $\widetilde{G}^t_A$, jestliže uvažujeme pouze člen $ii_1 \ldots i_{k-1} D_R$.

Částečný graf, který vznikne z grafu $\widetilde{G}^t_A$, vynecháním některých volných hran nazveme zobecněný částečný graf.

Buď $\{(i_1), (i_2), \ldots, (i_k)\}$ množina uzlů z $\widetilde{G}^t_A$, označme $\widetilde{C}^t\,(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ podgraf grafu $\widetilde{G}^t_A$ indukovaný touto množinou (je jasné oč se jedná). *Zobecněný částečný graf $\widetilde{C}$ grafu $\widetilde{C}_t\,(i_1, i_2, \ldots, i_k)$, nazveme* zobecněným částečným podgrafem *grafu $\widetilde{G}^t_A$.*

4,5 Označení: V dalším budeme volné hrany grafu $\widetilde{G}^t_A$ značit l_t. Buď $\widetilde{C}$ libovolný souvislý zobecněný částečný podgraf grafu $\widetilde{G}^t_A$. Nechť $\widetilde{C}$ má uzly (i_1), (i_2), $\ldots$, (i_k) a vznikne z $\widetilde{C}^t\,(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ odstraněním volných hran l_{j_1}, l_{j_2}, $\ldots$, l_{j_s}. Označme $f^{j_1 j_2 \ldots j_k}_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ determinant částečného podgrafu D grafu G_A, definovaného takto:

1. Uzly D dostaneme z uzlů C (C odpovídá $\widetilde{C}^t\,(i_1, i_2, \ldots, i_k)$) vynecháním všech uzlů vnějších hranic vzhledem k C a koncových uzlů každé vlastní hranice, která je

částí hranice mezi některými dvěma prostými kružnicemi U_{i_r}, U_{i_s} z C, přičemž (i_r) a (i_s) jsou v C spojeny jen vázanou hranou.

2. Hrany D dostaneme tak, že v podgrafu grafu G_A, indukovaném množinou uzlů 1. vynecháme všechny vlastní hranice.

Položme $g_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_s} = 0$, jestliže alespoň pro jednu vynechanou hranu l_{i_p} je nejvýše jeden koncový uzel vlastní hranice vnitřním uzlem příslušné hranice. V opačném případě buď $g_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_s}$ determinant částečného podgrafu F grafu G_A, definovaného takto:

1. Uzly F tvoří všechny vnitřní uzly vnitřních hranic vzhledem k C s výjimkou koncových uzlů každé vlastní hranice, která je částí hranice mezi některými dvěma prostými kružnicemi U_{i_r}, U_{i_s} z C, přičemž (i_r) a (i_s) jsou v $\widetilde{C}$ spojeny jen vázanou hranou.

2. Hrany F dostaneme tak, že v podgrafu grafu G_A indukovaném množinou uzlů 1. vynecháme všechny vlastní hranice.

Buď nyní $\widetilde{G}$ libovolný podgraf grafu $\widetilde{G}_A^t$. Označme $\widetilde{H}$ graf komplementární ke $\widetilde{G}$ v $\widetilde{G}_A^t$ (viz 3,8) a nechť $\widetilde{H}$ má p komponent. Buď $\widetilde{C}$ zobecněný částečný graf grafu $\widetilde{G}$, nechť $\widetilde{C}$ vznikne odstraněním volných hran $l_{j_1}, l_{j_2}, \dots, l_{j_s}$ z $\widetilde{G}$ a nechť $\widetilde{C}$ má r komponent $K_{u_1}, K_{u_2}, \dots, K_{u_r}$. Každé komponentě K_{u_v} přísluší jisté $f_{i^a_{\alpha_1} \dots i^v_{\alpha_v}}^{j^v_{\beta_1} \dots j^v_{\beta_v}}$ Přiřaďme grafu C číslo $x_{\widetilde{C}} = (-1)^s \prod_{v=1}^{p} f_{i^v_{\alpha_1} \dots i^v_{\alpha_v}}^{j^v_{\beta_1} \dots j^v_{\beta_1}}$.

Podobně přiřaďme každému zobecněnému částečnému grafu $\widetilde{D}$ grafu $\widetilde{H}$ číslo $y_{\widetilde{D}} = (-1)^q \prod_{k=1}^{m} g_{i^k_{\gamma_1} \dots i^k_{\gamma_k}}^{j^k_{\delta_1} \dots j^k_{\delta_k}}$, kde opět q je počet odstraněných volných hran a m je počet komponent D.

Nyní přiřaďme grafu $\widetilde{G}$ číslo $h_{\widetilde{G}}$ takto:

$$h_{\widetilde{G}} = (-2)^p \cdot (\sum x_{\widetilde{C}}) \cdot (\sum y_{\widetilde{D}}), \tag{2}$$

kde první suma je přes všechny zobecněné částečné grafy grafu $\widetilde{G}$ a druhá přes všechny zobecněné částečné grafy grafu $\widetilde{H}$.

4,6 **Hlavní věta**: *Buď G_A graf 2. typu k-tého řádu, $U_{j_1}, U_{j_1}, \dots, U_{j_k}$ buďte jeho neúplné kružnice.*

Pak platí

$$D = \sum_{\widetilde{G}} h_{\widetilde{G}}, \tag{3}$$

kde sčítáme přes všechny podgrafy $\widetilde{G}$ grafu $\widetilde{G}_A^t$, které obsahují uzly $(j_1), (j_2), \dots, (j_k)$.

Důkaz: se provádí úplně stejně jako důkaz věty 3,11. Stačí, uvážíme-li, že položíme-li $\overline{h}_{\widetilde{C}} = (-2)^p \, x_{\widetilde{C}} \sum y_{\widetilde{D}}$, kde $\widetilde{D}$ je nějaký zobecněný částečný graf grafu $\widetilde{G}$ (ježto $\widetilde{C}$ určuje jednoznačně $\widetilde{G}$, má $\sum y_{\widetilde{D}}$ smysl,) můžeme místo (3) psát

$$D = \sum_{\widetilde{C}} \overline{h}_{\widetilde{C}}, \tag{4}$$

kde sčítáme přes všechny zobecněné částečné podgrafy $\widetilde{C}$ grafu $\widetilde{G}_A^t$. Z tohoto tvaru je již vidět analogie s 3,11. Pro komplementární členy $(\sum y_{\widetilde{D}})$ je nutno provést úvahu analogickou jako v 2,10.

4,7 **Věta**: *Buď G_A graf 1. typu. Pak platí*

$$D = \sum_{\tilde{G}} h_{\tilde{G}}, \tag{5}$$

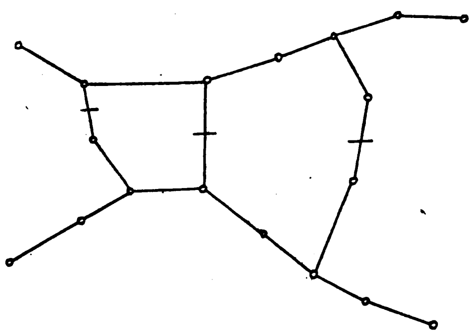
kde sčítáme přes všechny podgrafy $\tilde{G}$ grafu $\tilde{G}^t_A$.

Důkaz: Jako 3,12.

4,8 **Poznámka**: Jestliže $\tilde{G}^t_A$ je graf (tj. každé dva uzly jsou spojeny nejvýše jednou hranou), pak se snadno zjistí, že (3) je přesně totéž jako (3) z § 3 a (5) přesně totéž jako (8) z § 3, jinými slovy věty 4, 6 a 4, 7 jsou zobecněním vět 3, 11 a 3, 12.

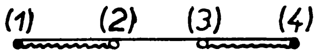
Uvedeme nyní příklad na větu 4, 6, čímž zároveň ukážeme, že toto zobecnění není samoúčelné (viz 3, 17).

4,9 **Příklad**: Spočteme determinant následujícího grafu (vlastní hranice jsou přetrženy):



Obr. 13.

Zobecněný sdružený graf má tvar:



Obr. 14.

Na obr. 14 jsou vlnovkou vyznačeny vázané hrany a černá kolečka značí uzly, které každý podgraf musí obsahovat.

Jest:

	$\tilde{G}$	$h_{\tilde{G}}$
1.	●¹ ●²	$(-2) . 24 . 64 = 3072$
2.	●¹≂○² ●⁴	$(-2) . (440 . 64 + (-1) . 63 . 64) = -56\,256$

zde členy v závorce odpovídají po řadě těmto zobecněným částečným podgrafům grafu 2.

●¹≂○² ●⁴ ●¹∽○² ●⁴

Analogicky

3. ●¹ ○³≂●⁴ $(-2)(24 . 19\,881 + (-1) . 24 . 5025) = -809\,088$

4. ●¹≂○²—○³≂●⁴ Zde máme osm následujících zobecněných částečných grafů:

a)	●≂○—○≂●	$42\,493\,976$	*e*)	●≂○ ○∽●	$(-1)^2 . 1\,331\,000$
b)	●≂○—○∽●	$(-1) . 6\,514\,200$	*f*)	●∽○—○∽●	$(-1)^2 . 1\,116\,262$
c)	●≂○ ○≂●	$(-1) . 8\,747\,640$	*g*)	●∽○ ○≂●	$(-1)^2 . 1\,252\,503$
d)	●∽○—○≂●	$(-1) . 7\,285\,400$	*h*)	●∽○ ○∽●	$(-1)^3 . 190\,575$

Sečtením obdržíme 23 454 946.

Celkem tedy je podle (3) $D = \sum_{\tilde{G}} h_{\tilde{G}} = 22\,586\,540.$

4,10 Budeme se nyní zabývat grafy, které jsou v jistém smyslu zobecněním grafů z §§ 2 a 3.

*Říkáme, že graf G o $n + k$ uzlech je H-*graf, *jestliže platí:*

1. *uzly* $1, 2, \ldots, n$ *tvoří řetězec, přičemž* $\langle i, i + 1\rangle \in K\{G\}$ *pro* $i = 1, 2, \ldots, n-1$.
2. *je dáno* $k + 1$ *celých nezáporných čísel* $l_1, l_2, \ldots, l_{k+1}$, *pro něž* $\sum_{i=1}^{k+1} l_i + k = n$
3. $\langle \sum_{i=1}^{j} l_i + j; n + j\rangle \in K\{G\}$ *pro* $j = 1, 2, \ldots, k$
4. *G nemá žádné jiné hrany.*

Determinant H-grafu budeme značit $(l_1, l_2, \ldots, l_{k+1})_H$

Pozn.: $(l_1)_H$ je prostě determinant řetězce délky l_1.

Označme ještě $(l_1, \overbrace{0, \ldots, 0}^{r \text{ nul}}, l_2)_H = (l_1, 0^r, l_2)_H$.

4,11 Lemma: *Je-li* $l_1 \,.\, l_2 \,.\, l_3 \neq 0$, *platí*

$$(6)\ (l_1, 0^r, l_2, 0^s, l_3)_H = (l_1, 0^{r-1}, 2)_H \,.\, (l_2, 0^s\, l_3)_H - $$
$$- z\, (l_1, 0^{r-2}, 2)_H \,.\, (l_2 - 1, 0^s\, l_3)_H \text{ pro } r \geqq 2,\ l_2 > 1.$$

$$(7)\ (l_1, 0, l_2, 0^s, l_3)_H = (l_1, 2)_H\, (l_2, 0^s, l_3)_H - z\, (l_1 + 2)_H\, (l_2 - 1, 0^s, l_3)_H \text{ pro } l_2 > 1$$

$$(8)\ (l_1, 0^r, 1, 0^s\, l_3)_H = (l_1, 0^{r-1}, 2)_H\, (1, 0^s, l_3)_H - $$
$$- z\, (l_1, 0^{r-2}, 2)_H\, (2, 0^{s-1}, l_3)_H \text{ pro } r \geqq 2.$$

$$(9)\ (l_1, 0, 1, 0^s, l_3)_H = (l_1, 2)_H (1, 0^s, l_3)_H - z\, (l_1 + 2)_H \,.\, (2, 0^{s-1}, l_3)_H.$$

Důkaz: Aplikací lemmatu 2,4 na hranu $\langle l_1 + r + 1, l_1 + r + 2\rangle$.

4,12 Věta: *Každý* $(l_1, l_2, \ldots, l_2)_H$ *se dá převést na polynom v* z, *jehož koeficienty jsou součty (algebraické) součinů (konečných) determinantů tvaru* $(l_{i_1}, l_{i_2}, \ldots, l_{i_j})_H$, *kde* l_{i_k}, $k = 1, 2, \ldots, j$ *jsou vesměs nenulové a* $(l_1, 0^s, l_2)_H$.

Důkaz: plyne ihned ze 4,11.

4,13 Lemma: *Platí*

$$(10)\ (l_1, l_2, \ldots, l_k)_H = u\, (l_1, l_2, \ldots, l_{k-2}, l_{k-1} + l_k + 1)_H - $$
$$- (l_1, l_2, \ldots, l_{k-1})_H\, (l_k)_H \text{ pro } l_{k-1} \neq 0$$

$$(11)\ (l_1, l_2, \ldots, l_k)_H = z\, (l_1, l_2, \ldots, l_{k-2}, l_{k-1} + l_k + 1)_H - $$
$$- (l_1, l_2, \ldots, l_{k-2} + 2)_H\, (l_k)_H \text{ pro } l_{k-1} = 0$$

$$(12)\ (l_1, l_2, \ldots, l_k)_H = z\, (l_1, l_2 + 1, l_3, \ldots, l_k)_H - $$
$$- (l_1)_H\, (l_2, l_3, \ldots, l_k)_H \text{ pro } l_2 \neq 0$$

$$(13)\ (l_1, l_2, \ldots, l_k)_H = z\, (l_1 + l_2 + 1, l_3, \ldots, l_k)_H - $$
$$- (l_1)_H\, (l_3 + 2, l_4, \ldots, l_k)_H \text{ pro } l_2 = 0$$

Důkaz: (10) a (11) dokážeme užitím lemmatu (2,4 na hranu $\langle \sum_{i=1}^{k} l_i + k, n + k\rangle$, (12) a (13) užitím téhož lemmatu na hranu $\langle l_1 + 1, n + 1\rangle$.

4,14 Věta: *Buď G H-graf,* $(l_1, l_2, \ldots, l_k)_H$ *jeho determinant, přičemž* l_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ *buďte čísla vesměs od nuly různá. Pak platí*

$$(14)\ (l_1, \ldots, l_k)_H = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i z^{k-1-i} \sum_{1 \leq j_0 < j_1 < \ldots < j_i = k-1} (l_1 + l_2 + \ldots + l_{j_0} + j_0 - 1)_H \times \ldots$$
$$\ldots \times (l_{j_{i-1}+1} + \ldots + l_{j_i} + j_i - j_{i-1} - 1)_H$$

přičemž druhá suma značí sčítání přes všechny uvedené volby čísel $1 \leqq j_0 < j_1 < \ldots$
$\ldots > j_i = k$.

Důkaz: Indukcí podle k.

1. $k = 2$: plyne ihned z (10).
2. Nechť věta platí pro $k - 1$, dokážeme, že platí i pro k.

Podle indukčního předpokladu jest

$$(15)\ (l_1, \ldots, l_{k-1})_H = \sum_{i=0}^{k-2} (-1)^i z^{k-2-i} \sum_{1 \leq j_0 < j_1 < \ldots < j_i = k-1} (l_1 + \ldots + l_{j_0} + j_0 - 1)_H \times \ldots$$
$$\ldots \times (l_{j_{i-1}+1} + \ldots + l_{j_i} + j_i - j_{i-1} - 1)_H$$

Dosaďme do (10) podle (15):

$$(l_1, \ldots, l_k)_H\, z = \sum_{i=0}^{k-2} (-1)^i z^{k-2-i} \sum_{1 \leq j_0 < j_1 < \ldots < j_i = k-1} (l_1 + \ldots + l_{j_0} + j_0 - 1)_H \times \ldots .$$
$$\ldots \times (l_{j_{i-1}+1} + \ldots + l_{k-1} + l_k + 1 + k - 1 - j_{i-1} - 1)_H -$$
$$- \sum_{i=0}^{k-2} (-1)^i z^{k-2-i} \sum_{1 \leq j_0 < j_1 < \ldots < j_i = k-1} (l_1 + \ldots + l_{j_0} + j_0 - 1)_H \times \ldots$$
$$\ldots \times (l_{j_{i-1}+1} + \ldots + l_{k-1} + k - 1\, j_{i-1} - 1)_H\, (l_k)_H.$$

Vytkněme z prvního součtu člen $i = 0$, z druhého $i = k - 2$, položme v druhém součtu $j = i + 1$, ale pišme zase hned i místo j. Obdržíme

$$(l_1, \ldots, l_k)_H = z^{k-1} (l_1 + \ldots + l_k - 1)_H +$$
$$+ (-1)^{k-1} (l_1)_H (l_2)_H \ldots (l_{k-1})_H (l_k)_H +$$
$$(16)\quad + \sum_{i=0}^{k-2} (-1)^i z^{k-1-i} \Big[\sum_{1 \leq j_0 < j_1 < \ldots < j_i = k-1} (l_1 + \ldots + l_{j_0} + j_0 - 1)_H \times \ldots$$
$$\ldots \times (l_{j_{i-1}+1} + \ldots + l_{k-1} + l_k + k - j_{i-1} - 1)_H +$$
$$+ \sum_{1 \leq j_0 < j_1 < \ldots < j_{i-1} = k-1} (l_1 + \ldots + l_{j_0} + j_0 - 1)_H \times \ldots$$
$$\ldots \times (l_{j_{i-2}+1} + \ldots + l_{k-1} + k - 1 - j_{i-2} - 1)_H\, (l_k)_H \Big].$$

V prvním součtu v závorce je $j_{i-1} < k - 1$ a vzhledem k tvaru posledního činitele můžeme položit $j_i = k$, V druhém součtu je $j_{i-1} = k - 1$ a můžeme položit $j_i = k$.

Odtud a ze (16) dokazované tvrzení ihned plyne.

4,15 **Věta**: *Buď G H-graf,* $(l_1, 0^{s-1}, l_2)_H$ *jeho determinant* ($l_1 \neq 0 \neq l_2$). *Pak platí*

$$(17)\ (l_1, 0^{s-1}, l_2)_H = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i^s\, [l_1, 0^{s-1}, l_2]\, .\, z^i$$

kde $\alpha_s^s\, [l_1, 0^{s-1}, l_2] = (l_1 + l_2 + s)_H$

$$\alpha_0^s = (-1)^{\frac{s+1}{2}} (l_1)_H\, (2)_H^{\frac{s-1}{2}}\, (l_2)_H \text{ pro } s \text{ liché}$$

$$\alpha_0^s = (-1)^{\frac{s}{2}} (l_1)_H\, (2)_H^{\frac{s}{2}-1} (l_2 + 2)_H \text{ pro } s \text{ sudé}$$

a $\quad \alpha_i^s\,[l_1, 0^{s-1}, l_2] = \alpha_{i-1}^{s-1}\,[l_1 + 1, 0^{s-2}, l_2] - (l_1)_H\, \alpha_i^{s-2}\,[2, 0^{s-3}, l_2]$
pro $i = 1, 2, \ldots, s - 1$

(přitom ovšem $(2)_H^K = \overbrace{(2)_H\,(2)_H \ldots (2)_H}^{K\text{-krát}}$).

Důkaz: $\alpha_s^s\,[l_1, 0^{s-1}, l_2] = (l_1 + l_2 + s)_H$ plyne několikanásobnou aplikací vzorce (13) ze 4,13 vždy na nově získaný první člen pravé strany. Podobně obdržíme i další α_i^s z téhož vzorce.

4,16 **Definice:** *Říkáme, že graf G o $n + k$ uzlech je* $\mathcal{J}$-graf, *jestliže platí*

1. *uzly* $1, 2, \ldots n$ *tvoří kružnici, přičemž* $\langle i; i + l\rangle \in K\{G\}$ *pro* $i = 1, 2, \ldots, n - 1$ a $\langle n; 1\rangle \in K\{G\}$,
2. *je dáno* k *celých nezáporných čísel* $l_1, l_2, \ldots, l_k$, *pro něž* $\sum_{i=1}^{k} l_i + k = n$,
3. $\langle \sum_{i=1}^{j} l_i + j; n + j\rangle \in K\{G\} \qquad j = 1, 2, \ldots, k$,
4. G *nemá žádné jiné hrany.*

Determinant $\mathcal{J}$*-grafu budeme značit* $[l_1, l_2, \ldots, l_k]_J$.

4,17 **Lemma:** *Buď* G $\mathcal{J}$*-graf,* $[l_1, l_2, \ldots, l_k]_J$ *jeho determinant.*
Pak platí

$$(18)\; (l_1, l_2, \ldots, l_k)_J = (l_1, l_2, \ldots, l_k + 2)_H - z\,(l_1 + 1, l_2, \ldots, l_k)_H - 2z^k \quad \text{pro } l_1 > 1,$$

$$(19)\; (l_1, l_2, \ldots, l_k)_J = (l_1, l_2, \ldots, l_k)_H + 2 - z\,(l_2 + 2, l_3, \ldots, l_k)_H - 2z^k \quad \text{pro } l_1 = 1$$

$$(20)\; (l_1, l_2, \ldots, l_k)_J = (l_1 + 2, l_2, \ldots, l_k + 2)_H - z^2\,(l_2, l_3, \ldots, l_k)_H - 2z^k \quad \text{pro } l_1 = 0.$$

Důkaz: plyne ihned z 1,8 vezmeme-li za ij hranu $\langle n, 1\rangle$.

Poznámka: Je zřejmé, že platí $[l_1, l_2, \ldots, l_k]_J = [l_{s+1}, \ldots, l_k, l_1, \ldots, l_s]_J$ $(1 \leq s \leq k - 1)$, takže vzorce bychom mohli psát též pro libovolnou jinou hranu ij různou od $\langle n, 1\rangle$. Tímto je determinant $\mathcal{J}$-grafu převeden na determinanty H-grafů, které již umíme počítat.

4,18 **Definice:** *Říkáme, že graf G o $n + k$ uzlech je* zobecněný $\mathcal{J}$-graf, *jestliže platí:*

1. *uzly* $1, 2, \ldots, n$ *tvoří graf* 1. *typu z odst.* 3,6, *tj. pro* $i = 1, 2, \ldots, n - 1$ *je* $\langle i, i{+}1\rangle \in K\{G\}$ a $\langle n, 1\rangle \in K\{G\}$ *a pro některá* u, v; $1 \leq u, v \leq n$; $u \neq v + 1$; *jest* $uv \in K\{G\}$.
2. *platí* 2., 3., 4. *z odst.* 4,16.

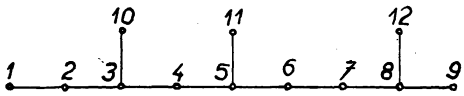
4,19 **Poznámka:** Determinant zobecněného $\mathcal{J}$-grafu převedeme podle § 3 za pomoci poznámky analogické 2,6 na determinant $\mathcal{J}$-grafu a determinanty H-grafů a řetězců.

Mohli bychom jít dále a aplikovat výsledky počátečních odstavců tohoto paragrafu, ale to je zbytečné, neboť z této poznámky je již dostatečně zřejmé jak bychom si počínali.

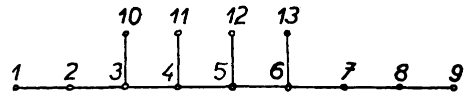
Výsledky těchto odstavců opět nejsou samoúčelné, neboť v § 2 nejsme odkázáni na převádění determinantu stromu na determinanty řetězců, ale můžeme používat i determinanty H-grafů. Podobně v § 3.

Na závěr uvedeme ještě tři příklady na výše vyloženou teorii:
4,20 **Příklady**: 1. Podle 4,44 spočteme $(2, 1, 2, 1)_H$, což jest determinant grafu z obr. 15.

$$\text{Jest: } (2, 1, 2, 1)_H = z^3 (9)_H - z^2 ((2)_H (6)_H + (4)_H (4)_H + (7)_H (1)_H) + \\ + z ((4)_H (2)_H (1)_H + (2)_H (4)_H (1)_H + (2) (1)_H (4)_H) - \\ - (2)_H (1)_H (2)_H (1)_H = 112\,941.$$



Obr. 15.



Obr. 16.

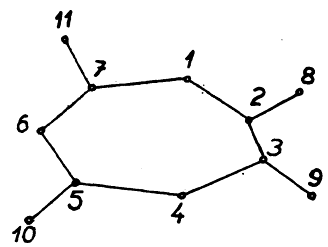
2. Podle 4,15 spočteme $(2, 0, 0, 0, 3)_H$ (viz obr. 16).
Budeme psát jen α_i^s místo $\alpha_i^s\,(2, 0^3, 3)$ a místo $(l_1, l_2, \ldots, l_k)_H$ jen $(l_1, l_2, \ldots, l_k)$ (k nedorozumění jistě nepovede).

Koeficienty zapíšeme do schematu:

	$i = 4$	$i = 3$	$i = 2$	$i = 1$	$i = 0$
$s = 1$				$(l_1 + l_2 + 1)$	$-(l_1)(l_2)$
$s = 2$			$(l_1 + l_2 + 2)$	$-(l_1 + 2)(l_2)$	$-(l_1)(l_2 + 2)$
$s = 3$		$(l_1 + l_2 + 3)$	$- l_1 + 2)(l_2)$	$-(l_1 + 1)(l_2 + 2-$ $-(l_1)(l_2 + 3)$	$(l_1)(2)(l_2)$
$s = 4$	$(l_1 + l_2 + 4)$	$-(l_1 + 3)(l_2)$	$-(l_1+2)(l_2+2)-$ $-(l_1 + 1)(l_2 + 3)-$ $-(l_1)(l_2 + 4)$	$(l_1 + 1)(2)(l_2) +$ $\times (l_1)(3)(l_2)$	$(l_1)(2)(l_2 + 2)$

Dosadíme nyní $l_1 = 2$, $l_2 = 3$ a máme

$$\alpha_4^4 = (9)$$
$$\alpha_3^4 = - (5)(3)$$
$$\alpha_2^4 = - ((4)(5) + (3)(6) + (2)(7))$$
$$\alpha_1^4 = (3)(2)(3) + (2)(3)(3)$$
$$\alpha_0^4 = (2)(2)(5)$$



Obr. 17.

takže podle (17) jest $(2, 0^3, 3) = \sum_{i=0}^{4} \alpha_i^4 z^i = 283\,104.$

3. Mějme $\mathcal{J}$-graf podle obr. 17.
Podle 4,17 jest $(1, 0, 1, 1,)_J = (1, 0, 1, 3)_H - z\,(2, 1, 1)_H - 2z^4$, což dále počítat nebudeme.

SEZNAM LITERATURY

[1] Konrad Friedrich, Werner Jenne: Geometriche-anschauliche Auflösung linearer mit Nullkoeffizienten ausgestatteter Gleichungssysteme.
[2] K. Berž: Těorijà grafov i jejo priměněnija.
[3] Dénés König: Theorie der Endlichen und Unendlichen Graphen.
[4] M. M. Postnikov: Těorija Galua.
[5] Jiří Sedláček: O konečných orientovaných grafech.
Čas. pro pěst. mat. 1958 (:82:).

SUMMARY

In this paper are given the metods of numeration determinants of symetrical matrix, which on the main diagonal have z and the others elements are 0 or —1, supposing that every row contains at most three non-zero non-diagonal elements.

To every matrix A which has this property correspond a graph G_A with points $1, 2, \ldots, n$, where ij is an edge if and only if $a_{ij} \neq 0$. To the graph G_A is defined associated graph $\widetilde{G}_A$ (see 2,5; 3,5), respectively generalizated associated graph $\widetilde{G}_A^z$ (see 4,3). According to the structure of the graph G_A either every partial graph $\widetilde{G}$ of graph $\widetilde{G}_A$ or every (generalizated) partial subgraph $\widetilde{G}$ of the graph $\widetilde{G}_A$ $(\widetilde{G}_A^z)$ corresponds by certain way a number $h_{\widetilde{G}}$ (see 2,8 ; 3,10; (4,5). Then for determinant D o the graph G_A (understand: of matrix A) we have this results:

$$D = \sum_{\widetilde{G}} h_{\widetilde{G}}$$

where again by the structure of the graph G_A we add either over all the partial graphs $\widetilde{G}$ of the graph G_A, or over all the (generalizated) partial subgraphs $\widetilde{G}$ of the graph $\widetilde{G}_A$ $(\widetilde{G}_A^z)$. (See theorems 2,10; 3,11; 3,12; (4,6; 4,7).

The last part of this work give some algebraical consequences of earlier theories. In this part are obtained the formulas for numeration determinants of some special classes of graphs (H-graph, $\mathcal{J}$-graph).

РЕЗЮМЕ

В работе даются методы вычисленний определителей симметрических матриц, которые в главной диагонали имеют z и остальные элементы равны или 0 или -1, при этом каждая строка не имеет больше чем трех от нулья отличных недиагональных элементов.

Каждой такой матрици **A** отвечает граф G_A с точками $1, 2, \ldots, h$, причем ij ребро тогда и только тогда когда $a_{ij} \neq 0$, и к нему определен сопраженный граф $\widetilde{G}_A$ (смотри 2:5, 3:5), или обобщенный сопраженный граф $\widetilde{G}_A^z$ (смотри 4:3). Для поведения графа G_A отвечает или каждому частичному графу $\widetilde{G}$ графа $\widetilde{G}_A$, или каждому (обобщенному) частичному подграфу $\widetilde{G}$ $(\widetilde{G}_A^z)$ графа $\widetilde{G}_A$ определенным способом число $h_{\widetilde{G}}$ (смотри 2:8, 3:10, (4:5). Для определителя D графа G_A (этим подрозумеваем: матрици A) после того платит:

$$\mathrm{D} = \sum_{\widetilde{G}} h_{\widetilde{G}}$$

где опять для поведения графа G_A сумируем через всем частичные графы $\widetilde{G}$ графа $\widetilde{G}_A$, или через все (обобщеные) частичные подграфы $\widetilde{G}$ графа $\widetilde{G}_A$ $(\widetilde{G}_A^z)$. (Смотри теоремы 2:10, 3:11, 3:12, (4:6, 4:7).

Последняя часть работы указывает некоторые алгебраические следствия предыдущих теорий. В ней выводятся формули для вычисления определителей некоторых специальных классов графов (H-граф, $\mathcal{J}$-граф).