1964 ACTA UNIVERSITATIS CAROLINAE—MATHEMATICA ET PHYSICA 2 PAG. 1–19

O DICMANOVĚ ZOBECNĚNÍ p-PODGRUPY A SYLOWOVY PODGRUPY

JAROSLAV BLAŽEK

Katedra algebry a geometrie matematicko-fyzikální fakulty University Karlovy, Praha

V pracích [1] a [2] zavádí A. P. Dicman pojem $|\pi, H_A|$-podgrupy, který je velkým zobecněním pojmu π-podgrupy (a tedy i pojmu p-podgrupy). V této práci se pro $|\pi, H_A|$-podgrupy dokazují výsledky analogické výsledkům R. Baera a P. A. Golberga*) jednak o konjugovanosti Sylowových π-podgrup lokálně normálních a lokálně řešitelných grup (v § 1.), jednak větám o existenci a konjugovanosti Sylowových π-basí π-oddělitelných a lokálně π-oddělitelných grup (v § 2.).

ÚVOD

V této úvodní části práce uvedeme Dicmanovu definici a některé výsledky z prací [1] a [2], jichž budeme v dalším užívat.

Nejprve si zavedeme tato označení:

a) Symboly $A = [\alpha]$, $B = [\beta]$ budeme značit libovolné množiny indexů,

b) symboly $H_A = [H_\alpha]$, $H_B = [H_\beta]$ množiny podgrup dané grupy G,

c) symbolem π označíme libovolnou neprázdnou množinu (kladných) prvočísel a

d) symbolem π' podmnožinu množiny přirozených čísel skládající se z čísla 1 a ze všech těch přirozených čísel, jež mají za prvočíselné dělitele pouze prvočísla z π.

Definice (i). *Prvek a grupy G nazveme $|\pi, H_A|$-prvkem, když ke každému indexu $\alpha \in A$ je možno nalézt číslo $d(\alpha) \in \pi'$ takové, že $a^{d(\alpha)} \in H_\alpha$.*

Množinu všech $|\pi, H_A|$-prvků grupy G nazveme $|\pi, H_A|$-množinou v G a označíme $\mathbf{M}|\pi, H_A, G|$.

Podgrupu $P \subset G$ nazveme $|\pi, H_A|$-podgrupou v G, je-li P podmnožinou v $\mathbf{M}|\pi, H_A, G|$.

$|\pi, H_A|$-podgrupu $P \subset G$ nazveme maximální $|\pi, H_A|$-podgrupou v G, když není vlastní podgrupou žádné $|\pi, H_A|$-podgrupy v G.

Je ihned vidět, že v případě, když množina A obsahuje jediný index 1 a když $H_1 = \{j\}$**), bude $|\pi, H_A|$-podgrupa π-podgrupou a maximální $|\pi, H_A|$-podgrupa Sylowovou π-podgrupou grupy G.

*) Viz práce [3], [4], [5] a [6].

**) j značí jednotkový prvek grupy G; pro každý komplex K v G označíme symbolem $\{K\}$ podgrupu v G vytvořenou komplexem K; tedy speciálně $\{j\}$ značí jednotkovou podgrupu v G.

Věta (ii). *Každá* $|\pi, H_A|$*-podgrupa grupy* G *je obsažena v nějaké maximální* $|\pi, H_A|$*-podgrupě v* G.*)

Věta (iii). *Budiž* $\overline{G}$ *podgrupa,* P $|\pi, H_A|$*-podgrupa grupy* G, $P \subset \overline{G}$. *Označme* $\overline{H}_\alpha = H_\alpha \subset \overline{G}$ *pro každý index* $\alpha \in A$. *Pak platí*

a) $\mathbf{M}|\pi, H_A, G| \cap \overline{G} \subset \mathbf{M}|\pi, \overline{H}_A, \overline{G}|$,

b) P *je* $|\pi, \overline{H}_A|$*-podgrupou v* $\overline{G}$.**)

Definice (iv). *Systémy podgrup* H_A, H_B *grupy* G *budeme nazývat* π*-ekvivalentní, když*

$$\mathbf{M}|\pi, H_A, G| = \mathbf{M}|\pi, H_B, G|.\text{***)}$$

Věta (v). *Budiž* H_A *libovolný systém podgrup grupy* G. *Označme* $D = \bigcap_{\alpha \in A} H_\alpha$. *Pak systémy* H_A *a* D *jsou* π*-ekvivalentní právě tehdy, když ke každému* $|\pi, H_A|$*-prvku* $a \in G$ *je možno určit přirozené číslo* m *tak, že ke každému indexu* $\alpha \in A$ *existuje číslo* $d \leqq m$, $d \in \pi'$ *takové, že* $a^d \in H_\alpha$.†)

Věta (vi). *Nechť* H_A *je libovolný systém normálních podgrup grupy* G *a nechť* $[P_\beta]$ *je libovolná třída konjugovaných maximálních* $|p, H_A|$*-podgrup grupy* G. *Pak všechny maximální* $|p, H_A|$*-podgrupy v* G *jsou konjugovány právě tehdy, když ke každé maximální* $|p, H_A|$*-podgrupě* $Q \subset G$ *je možno nalézt takovou podgrupu* $P \in [P_\beta]$, *že třída podgrup konjugovaných s* P *v grupě* $R = \{P, Q\}$ *je konečná.*††)

§ 1, OTÁZKY KONJUGOVANOSTI MAXIMÁLNÍCH $|\pi, H_A|$-PODGRUP

V tomto odstavci nejprve odvodíme některé další vlastnosti $|\pi, H_A|$-podgrup grupy G. Zesílením Dicmanovy věty (iii) je

Věta 1,1. *Za předpokladů uvedených ve větě (iii) platí:*

a) $\mathbf{M}|\pi, H_A, G| = \mathbf{M}|\pi, \overline{H}_A, \overline{G}|$,

b) P *je* $|\pi, \overline{H}_A|$*-podgrupou v* $\overline{G}$ *právě tehdy, když je* $|\pi, H_A|$*-podgrupou v* G.

Důkaz: a) Budiž x libovolný prvek z $\mathbf{M}|\pi, \overline{H}_A, \overline{G}|$. Podle definice množiny $\mathbf{M}|\pi, \overline{H}_A, \overline{G}|$ existuje ke každému indexu $\alpha \in A$ číslo $d \in \pi'$ tak, že $x^d \in \overline{H}_\alpha = H_\alpha \cap \overline{G} \subset H_\alpha$. Tedy $x^d \in H_\alpha$, což znamená $\mathbf{M}|\pi, H_A, G| \supset M|\pi, \overline{H}_A, \overline{G}|$. Protože evidentně $\overline{G} \supset \mathbf{M}|\pi, \overline{H}_A, \overline{G}|$ je $\mathbf{M}|\pi, H_A, G| \cap \overline{G} \supset \mathbf{M}|\pi, \overline{H}_A, \overline{G}|$. Z tohoto vztahu a z tvrzení a) věty (iii) plyne a).

b) Budiž P $|\pi, \overline{H}_A|$-podgrupa v $\overline{G}$, potom každý její prvek leží v $\mathbf{M}|\pi, \overline{H}_A, \overline{G}|$ a tedy podle a) též v $\mathbf{M}|\pi, H_A, G|$, což znamená, že P je $|\pi, H_A|$-podgrupou v G. Obrácené tvrzení je tvrzení b) z věty (iii).

---

*) Viz [1], lemma 3, str. 138.
**) Viz tamtéž, lemma 6 a příslušný důsledek, str. 138.
***) Viz [1], definice 4, str. 139.
†) Viz tamtéž, věta 1, str. 140.
††) Viz [2], věta 1, str. 1235.

Věta 1,1 nám dovoluje učinit tuto úmluvu: Jestliže $\overline{G}$ je podgrupa grupy G, H_A systém podgrup v G, budeme $|\pi, H_A|$-podgrupou v $\overline{G}$ rozumět podgrupu, jež je $|\pi, \overline{H}_A|$-podgrupou v $\overline{G}$, kde $\overline{H}_\alpha = H_\alpha \cap \overline{G}$ pro každé $\alpha \in A$.

Věta 1,2. *Budiž N normální podgrupa grupy G. Pak pro libovolný systém H_A podgrup v G takový, že $N \subset H_\alpha$ pro každé $\alpha \in A$, platí:*

$$x \in \mathbf{M}|\pi, H_A, G| \Leftrightarrow xN \in \mathbf{M}\left|\pi, \frac{H_A}{N}, \frac{G}{N}\right| {}^{*)},$$

kde $\frac{H_A}{N}$ značí množinu všech podgrup $\frac{H_\alpha}{N}$ grupy $\frac{G}{N}$ pro $\alpha \in A$.

Důkaz plyne ze vztahu

$$x^{\mathrm{d}} \in H_\alpha \Leftrightarrow x^{\mathrm{d}}N = (xN)^{\mathrm{d}} \in \frac{H_\alpha}{N},$$

o jehož platnosti se lze snadno přesvědčit.

Věta 1,3. *Budiž N normální podgrupa grupy G taková, že platí $N \subset H_\alpha$ pro každé $\alpha \in A$. Podgrupa P grupy G obsahující N je maximální $|\pi, H_A|$-podgrupou v G právě tehdy, když $\frac{P}{N}$ je maximální $\left|\pi, \frac{H_\alpha}{N}\right|$-podgrupou v $\frac{G}{N}$.*

Důkaz: Nechť P je maximální $|\pi, H_A|$-podgrupa v G, $P \supset N$. Z věty 1,2 plyne, že $\frac{P}{N}$ je $\left|\pi, \frac{H_A}{N}\right|$-podgrupa v $\frac{G}{N}$. Podle věty (ii) existuje maximální $\left|\pi, \frac{H_A}{N}\right|$-podgrupa $\frac{Q}{N}$ grupy $\frac{G}{N}$ obsahující $\frac{P}{N}$. Podle věty 1,2 je Q $|\pi, H_A|$-podgrupou v G a přitom $Q \supset P$. Z maximálnosti P plyne, $P = Q$, takže $\frac{P}{N} = \frac{Q}{N}$ je rovněž maximální.

Zcela obdobně se dokáže tvrzení v obráceném směru.

V dalším s výhodou užijeme označení, jež zavádí

Definice 1,4. *Jestliže systém H_A podgrup grupy G s každou podgrupou obsahuje i všechny podgrupy s ní asociované, resp. jsou-li všechny podgrupy z H_A normální v G, označíme $|\pi, H_A|$-prvek grupy G jako $[\pi, H_A]$-prvek, resp. (π, H_A)-prvek. Obdobná označení zavedeme i pro $|\pi, H_A|$-podgrupy a množiny $\mathbf{M}|\pi, H_A, G|$.*

Věta 1,5. *Budiž p prvočíslo, G konečná grupa, N normální, P maximální (p, H_A)-podgrupa v G. Potom průnik $D = N \cap P$ je maximální (p, H_A)-podgrupa v N.*

Důkaz: Evidentně je D (p, H_A)-podgrupa v N. Podle věty (ii) existuje maximální (p, H_A)-podgrupa $\overline{M}$ v N obsahující D. Podgrupa $\overline{M}$ je rovněž (p, H_A)-podgrupou v G a leží tudíž v nějaké maximální (p, H_A)-podgrupě $M \subset G$, při čemž zřejmě $M \cap N = \overline{M}$. Podle věty (vi) jsou všechny maximální

*) Symbolem $\frac{X}{Y}$ budeme v celé práci značit faktorovou grupu grupy X podle (normální) podgrupy Y. Nedopatřením tiskárny nebyl sázen obvyklý symbol X/Y.

(p, H_A)-podgrupy v G spolu konjugovány a tedy existuje prvek $x \in G$ tak, že platí

$$x^{-1}Mx = P.$$

Potom však (neboť N je normální v G)

$$x^{-1}\overline{M}x = x^{-1}(M \cap N)\, x = x^{-1}Mx \cap N = P \cap N = D.$$

Konečné podgrupy $\overline{M}$ a D jsou tedy spolu konjugovány v G, což znamená, že mají stejný řád, z čehož vzhledem k $\overline{M} \supset D$ plyne $\overline{M} = D$, takže D je maximální (p, H_A)-podgrupa v N.

Věta 1,6. *Nechť P je podgrupa lokálně normální*) grupy G. Pak následující dvě tvrzení* (A) *a* (B) *jsou ekvivalentní:*

(A) *Pro každou konečnou normální podgrupu N v G je $P \cap N$ maximální (p, H_A)-podgrupa v N.*

(B) *P je maximální (p, H_A)-podgrupa v G.*

Důkaz: 1. Nechť pro podgrupu P platí (A). Budiž x libovolný prvek z P a X konečná normální podgrupa v G obsahující x. Prvek x patřící do $P \cap X$ je podle (A) (p, H_A)-prvkem v X a tedy podle věty 1,1 $x \in \mathbf{M}(p, H_A, G)$. To znamená, že P je (p, H_A)-podgrupa v G.

Budiž Q libovolná (p, H_A)-podgrupa v G, pro níž platí

$$(1) \qquad P \subset Q,$$

y libovolný prvek z Q a budiž Y konečná normální podgrupa v G obsahující y. Průnik $Q \cap Y$ je zřejmě (p, H_A)-podgrupa v Y a z (1) plyne $(P \cap Y) \subset \subset (Q \cap Y)$. Podle předpokladu o P je $P \cap Y$ maximální (p, H_A)-podgrupa v Y, takže $(P \cap Y) = (Q \cap Y)$. Je tedy $y \in P$, takže $P = Q$ a P je maximální (p, H_A)-podgrupa v G.

2. Nechť podgrupa $P \subset G$ splňuje (B). Označme $\mathfrak{N}$ systém všech konečných normálních podgrup grupy G a pro každou podgrupu $N \in \mathfrak{N}$ označme $M(N)$ množinu všech těch maximálních (p, H_A)-podgrup v N, jež obsahují průnik $P \cap N$. Systém množin $M(N)$ pro všechny podgrupy $N \in \mathfrak{N}$ označme $\mathfrak{M}$. Ukážeme nyní, že $\mathfrak{M}$ má vlastnosti a) až d) uvedené dále:

a) Každá množina $M(N) \in \mathfrak{M}$ je neprázdná a konečná. Podle věty 1,1 je $P \cap N$ (p, H_A)-podgrupa v N a podle věty (ii) existuje maximální (p, H_A)-podgrupa U v N tak, že $(P \cap N) \subset U$, takže $U \in M(N)$.

b) Definujeme-li v $\mathfrak{M}$ částečné uspořádání tímto způsobem:

$$(2) \qquad N, L \in \mathfrak{N}, \quad M(N) \leqq M(L) \Leftrightarrow N \subset L,$$

existuje k libovolným množinám $M(X)$, $M(Y) \in \mathfrak{M}$ $(X, Y \in \mathfrak{N})$ podgrupa $Z \in \mathfrak{N}$, tak, že $M(X) \leqq M(Z)$, $M(Y) \leqq M(Z)$.

Za podgrupu Z stačí vzít kteroukoliv konečnou normální podgrupu v G obsahující (konečnou) množinu $X \cup Y$. Existence Z plyne z lokální normálnosti grupy G.

Pro libovolné množiny $M(N)$, $M(L) \in \mathfrak{M}$, pro něž platí $M(N) \leqq M(L)$, definujeme zobrazení φ_{LN} množiny $M(L)$ do množiny $M(N)$ tímto způsobem:

$$(3) \qquad Q \in M(L) \Rightarrow \varphi_{LN}(Q) = Q \cap N.$$

*) Lokálně normální grupou rozumíme grupu, jejíž každá konečná množina prvků leží v konečné normální podgrupě.

Podgrupa $Q \cap N$ je podle věty 1,5 maximální (p, H_A)-podgrupou v N, neboť podle (2) N je normální podgrupa v L. Dále je zřejmé, že $P \cap N \subset Q \cap N$, takže $Q \cap N \in M(N)$.

Další dvě vlastnosti c) a d) systému $\mathfrak{M}$ jsou zřejmé:

c) Nechť $M(N)$, $M(L)$, $M(K) \in \mathfrak{M}$, $M(N) \leqq M(L)$, $M(L) \leqq M(K)$. Pak φ_{KN} vznikne složením zobrazení φ_{KL} a φ_{LN}.

d) Pro libovolnou množinu $M(N) \in \mathfrak{M}$ je φ_{NN} identické zobrazení množiny $M(N)$ na sebe.

Systém $\mathfrak{M}$ splnuje tedy podmínky známé věty*) a podle ní existuje množina $\mathfrak{P}$ podgrup grupy G, obsahující z každé množiny $M(N) \in \mathfrak{M}$ právě jednu podgrupu P_N, přičemž k libovolným podgrupám P_N, $P_L \in \mathfrak{P}$ existuje podgrupa $P_K \in \mathfrak{P}$ $(P_K \in M(K))$ tak, že $\varphi_{KL}(P_K) = P_L$ a $\varphi_{KN}(P_K) = P_N$.

Sjednocení všech podgrup z $\mathfrak{P}$ označme P'. Nechť x, $y \in P'$, pak existují N, $L \in \mathfrak{N}$ tak, že $x \in P_N$, $y \in P_L$. Podle vlastnosti systému $\mathfrak{P}$ existuje podgrupa $P_K \in \mathfrak{P}$ tak, že $P_N = P_K \cap N$, $P_L = P_K \cap L$. Je tedy $x \in P_K$, $y \in P_K$, takže $xy \in P_K \subset P'$ i $x^{-1} \in P_K \subset P'$. Podgrupa P_N je podle definice $M(N)$ (p, H_A)-podgrupou v N, takže $x \in \mathbf{M}(p, H_A, N)$. Podle věty 1,1 je rovněž $x \in \mathbf{M}(p, H_A, G)$. Množina P' je tedy (p, H_A)-podgrupa v G; z jejího sestrojení je ihned vidět, že $P' \supset P$, takže předpoklad o maximálnosti P dává $P' = P$. Je tedy pro každou podgrupu $N \in \mathfrak{N}$ $P \cap N = P' \cap N = P_N$ maximální (p, H_A)-podgrupa v N, takže P má vlastnost (A).

K vyšetřování dalších vlastností $|\pi, H_A|$-podgrup je účelné zobecnit poněkud pojem řešitelné grupy.

Definice 1,7. *Budiž G konečná grupa, H_A systém podgrup v G takový, že průnik $D = \bigcap_{\alpha \in A} H_\alpha$ je normální podgrupa v G. Grupu G nazveme H_A-řešitelnou, když faktorová grupa $\frac{G}{D}$ je řešitelná.*

Obdobně jako v poznámce za větou 1,1 učiníme tuto úmluvu: Budiž G grupa, H její podgrupa a H_A systém podgrup v G. Pod tvrzením, že H je H_A-řešitelná budeme rozumět tvrzení, že H je H'_A-řešitelná, kde $H'_A = [H'_\alpha]$ a $H'_\alpha = H_\alpha \cap H$ pro každé $\alpha \in A$.

Věta 1,8. *Budiž G konečná H_A-řešitelná grupa, H podgrupa v G. Pak H je rovněž H_A-řešitelná grupa.*

Důkaz: Označme $H'_A = [H'_\alpha]$, kde $H'_\alpha = H_\alpha \cap H$ pro každé $\alpha \in A$ a $D = \bigcap_{\alpha \in A} H_\alpha$. Zřejmě je $\bigcap_{\alpha \in A} H'_\alpha = D \cap H$. Protože D je normální podgrupa v G, je $D \cap H$ normální v H. Pomocí známé Zassenhausovy věty o čtyřech podgrupách**) získáme tento výsledek

$$D \cdot \frac{H}{D} \cong \frac{H}{D \cap H}.$$

Grupa $\frac{DH}{D}$ jakožto podgrupa řešitelné grupy $\frac{G}{D}$ je sama řešitelná a tedy je řešitelná i grupa $\frac{H}{H \cap D}$.

*) Viz např. Kuroš [7], str. 351—354.
**) Viz např. Kuroš [7], str. 68.

Věta 1,9. *Budiž G konečná H_A-řešitelná grupa, π libovolná (neprázdná) množina prvočísel. Pak platí:*

a) *v G existuje alespoň jedna maximální $|\pi, H_A|$-podgrupa;*

b) *všechny maximální $|\pi, H_A|$-podgrupy v G jsou konjugovány v G.*

Důkaz: Označme $D = \bigcap_{\alpha \in A} H_\alpha$. Protože G je konečná, obsahuje systém H_A pouze konečný počet podgrup od sebe různých a tedy systémy H_A a D jsou podle věty (v) π-ekvivalentní.

Protože $\frac{G}{D}$ je řešitelná a protože ke každé množině prvočísel π existuje sylowovský dělitel řádu grupy $\frac{G}{D}$ dělitelný pouze prvočísly z π, obsahuje $\frac{G}{D}$ podle známé Hallovy věty*) alespoň jednu Sylowovu π-podgrupu, tj. maximální $\left(\pi, \frac{D}{D}\right)$-podgrupu $\frac{S}{D}$ a všechny takové podgrupy jsou spolu konjugovány v $\frac{G}{D}$. Podle věty 1,3 je S maximální (π, D)-podgrupa a tedy i $|\pi, H_A|$-podgrupa v G. Jestliže $\frac{S_1}{D}$ a $\frac{S_2}{D}$ jsou Sylowovy π-podgrupy v $\frac{G}{D}$, jsou podle Hallovy věty konjugovány v $\frac{G}{D}$ a tudíž podgrupy S_1 a S_2 jsou konjugovány v G.

Definice 1,10. *$|\pi, H_A|$-podgrupu P grupy G nazveme slabě maximální $|\pi, H_A|$-podgrupou v G, když pro každé prvočíslo $p \in \pi$ každá maximální $|p, H_A|$-podgrupa v P je současně maximální $|p, H_A|$-podgrupou v G.*

Věta 1,11. *Podgrupa H lokálně normální grupy G je slabě maximální (π, H_A)-podgrupou v G, právě tehdy, když průnik H s libovolnou konečnou normální podgrupou $N \subset G$ je slabě maximální (π, H_A)-podgrupa v N.*

Důkaz: 1. Nechť H je podgrupa v G taková, že její průnik s každou konečnou normální podgrupou N v G je slabě maximální (π, H_A)-podgrupa v N. Nechť x je libovolný prvek z H a X je konečná normální podgrupa v G obsahující x. Potom x je prvkem (π, H_A)-podgrupy $H \cap X$ v X, takže $x \in \mathbf{M}(\pi, H_A, X) \subset \subset \mathbf{M}(\pi, H_A, G)$, což znamená, že H je (π, H_A)-podgrupou v G.

Budiž p libovolné prvočíslo z π. Označme P maximální (p, H_A)-podgrupu v H a N libovolnou konečnou normální podgrupu v G. Protože $H \cap N$ je konečná normální podgrupa v H, je podle věty 1,6 $(H \cap N) \cap P = N \cap P$ maximální (p, H_A)-podgrupa v $H \cap N$. Podle předpokladu je $H \cap N$ slabě maximální (p, H_A)-podgrupa v N, což znamená, že $N \cap P$ je maximální (p, H_A)-podgrupa v N. Protože N byla libovolná konečná normální podgrupa v G, znamená to opět podle věty 1,6, že P je maximální (p, H_A)-podgrupa v G a tudíž H je slabě maximální (π, H_A)-podgrupa v G.

2. Nechť H je slabě maximální (π, H_A)-podgrupa v G, N libovolná konečná normální podgrupa v G a p libovolné prvočíslo z π. Označme $N' = H \cap N$ a P' maximální (p, H_A)-podgrupu v N'. Podle věty (ii) existuje v H maximální (p, H_A)-podgrupa P obsahující P'. Podle předpokladu o podgrupě H je P maximální (p, H_A)-podgrupa v G. Protože

*) Viz Ph. Hall [8].

$$P' = N' \cap P = (H \cap N) \cap P = N \cap P,$$

plyne z věty 1,6, že P' je maximální (p, H_A)-podgrupa v N, což znamená, že $N' = H \cap N$ je slabě maximální (π, H_A)-podgrupa v N.

V následujících větách si ukážeme vztah mezi slabě maximálními a maximálními (π, H_A)-podgrupami konečné, resp. lokálně normální grupy.

Věta 1,12. *Budiž G konečná grupa, H_A systém podgrup v G takový, že $\bigcap_{\alpha \in A} H_\alpha = D$ je normální podgrupa v G. Potom každá slabě maximální $|\pi, H_A|$-podgrupa v G je současně maximální $|\pi, H_A|$-podgrupou v G.*

Důkaz: Podle věty (v) jsou systémy H_A a D π-ekvivalentní, takže místo $|\pi, H_A|$-podgrup můžeme vyšetřovat (π, D)-podgrupy v G. Budiž H slabě maximální (π, D)-podgrupa v G, pak jistě $D \subset H$, neboť D je evidentně (π, D)-podgrupou v G pro libovolnou množinu π. Budiž M maximální (π, D)-podgrupa v G obsahující H, jež existuje podle věty (ii). Potom, jak snadno plyne z věty 1,3, je $\frac{H}{D}$ slabě maximální π-podgrupa a $\frac{M}{D}$ Sylowova π-podgrupa v $\frac{G}{D}$. Protože pro konečné grupy platí, že každá slabě maximální π-podgrupa je současně Sylowovou π-podgrupou, je $\frac{H}{D} = \frac{M}{D}$ Sylowova π-podgrupa v $\frac{G}{D}$ a tedy opět podle věty 1,3 H je maximální (π, D)- neboli $|\pi, H_A|$-podgrupou v G.

Věta 1,13. *Budiž G lokálně normální grupa. Potom každá slabě maximální (π, H_A)-podgrupa v G je současně maximální (π, H_A)-podgrupou v G.*

Důkaz: Budiž H slabě maximální (π, H_A)-podgrupa v G. Podle věty (ii) leží H v nějaké maximální (π, H_A)-podgrupě $M \subset G$. Budiž m libovolný prvek z M a N konečná normální podgrupa v G obsahující m; potom $m \in M \cap N$. Podle věty 1,11 je $H \cap N$ slabě maximální (π, H_A)-podgrupa v N, a protože N je konečná, je podle věty 1,12 $H \cap N$ maximální (π, H_A)-podgrupa v N. Tedy platí $H \cap N \subset M \cap N$, neboť $M \cap N$ je evidentně (π, H_A)-podgrupa v N. Je tudíž $m \in H$, což vzhledem k tomu, že m byl libovolný prvek z M a vzhledem k $H \subset M$ znamená $H = M$.

Věty 1,12 a 1,13 nelze pro obecné konečné, resp. lokálně normální grupy obrátit. Obrácené věty dokážeme pro H_A-řešitelné, resp. lokálně H_A-řešitelné grupy:

Věta 1,14. *Budiž G konečná H_A-řešitelná grupa. Pak každá maximální $|\pi, H_A|$-podgrupa v G je siučasně slabě maximální $|\pi, H_A|$-podgrupou v G.*

Důkaz: Podle věty (v) se můžeme omezit na (π, D)-podgrupy, kde $D = \bigcap_{\alpha \in A} H_\alpha$. Budiž M maximální (π, D)-podgrupa v G. Podle věty 1,3 je $\frac{M}{D}$ maximální $\left(\pi, \frac{D}{D}\right)$-podgrupa neboli Sylowova π-podgrupa v $\frac{G}{D}$. Protože $\frac{G}{D}$ je řešitelná grupa, je řád podgrupy $\frac{M}{D}$ podle známé Hallovy věty*) roven sy-

*) Viz Ph. Hall [8].

lowovskému děliteli $\left(\text{řádu grupy } \frac{G}{D}\right)$, který obsahuje všechna ta prvočísla z π, jež dělí řád grupy $\frac{G}{D}$. Z toho okamžitě plyne, že $\frac{M}{D}$ je slabě maximální $\left(\pi, \frac{D}{D}\right)$-podgrupou v $\frac{G}{D}$ a tedy podle věty 1,3 je M slabě maximální podgrupa v G.

Definice 1,15. *Grupa G se nazývá lokálně H_A-řešitelnou, když každá konečná množina prvků z G leží v konečné H_A-řešitelné podgrupě v G.*

Věta 1,16. *Budiž G lokálně normální a lokálně H_A-řešitelná grupa, π libovolná neprázdná množina prvočísel, $\pi' \subset \pi$. Potom libovolná (π', H_A) podgrupa grupy G leží v nějaké slabě maximální (π, H_A)-podgrupě v G.*

Důkaz: Použijeme opět Kurošovy „metody projekce" jako v části 2. důkazu věty 1,6 a užijeme též obdobného označení. Budiž H libovolná (π', H_A)-podgrupa v G. Označíme opět $\mathfrak{N}$ množinu všech konečných normálních podgrup v G. Nechť $N \in \mathfrak{N}$, pak z lokální H_A-řešitelnosti grupy G plyne, že N leží (v konečné) H_A-řešitelné grupě a tedy podle věty 1,8 je sama H_A-řešitelná. Označme $M(N)$ množinu všech těch slabě maximálních (π, H_A)-podgrup v N, jež obsahují průnik $N \cap H$. Podle věty 1,14 je $M(N) \neq \emptyset$. Systém všech množin $M(N)$ pro všechny podgrupy $N \in \mathfrak{N}$ označíme $\mathfrak{M}$ a částečné uspořádání v $\mathfrak{M}$ definujeme vztahem (2). Pro $M(N)$, $M(L) \in \mathfrak{M}$, $M(N) \leqq M(L)$ definujeme φ_{LN} vztahem (3). Průnik $Q \cap N$ je podle věty 1,11 slabě maximální (π, H_A)-podgrupou v N a je prvkem z $M(N)$. Systém $\mathfrak{M}$ má zřejmě vlastnosti a) až d) a tedy existuje příslušná množina $\mathfrak{P}$. Sjednocení všech podgrup z $\mathfrak{P}$ označme H'. Obdobně jako v důkazu věty 1,6 lze ukázat, že H' je (π, H_A)-podgrupa v G a z věty 1,11 plyne, že H' je slabě maximální (π, H_A)-podgrupa v G. Z konstrukce H' je jasné, že $H' \supset H$.

Z vět 1,13 a 1,16 plyne snadno tento důsledek:

Věta 1,17. *V lokálně normální a lokálně H_A-řešitelné grupě G jsou pojmy maximální (π, H_A)-podgrupa v G a slabě maximální (π, H_A)-podgrupa v G ekvivalentní.*

Snadným důsledkem věty 1,16 je rovněž věta:

Věta 1,18. *Budiž G lokálně normální a lokálně H_A-řešitelná grupa; potom ke každé množině prvočísel π existuje v G (slabě) maximální (π, H_A)-podgrupa.*

Věta 1,19. *Libovolné dvě maximální (π, H_A)-podgrupy lokálně normální a lokálně H_A-řešitelné grupy G jsou lokálně konjugovány v G.*

Důkaz: Užijeme opět Kurošovy „metody projekce": Nechť R a S jsou libovolné maximální (π, H_A)-podgrupy v G, nechť $\mathfrak{N}$ je množina všech konečných normálních podgrup v G a nechť $N \in \mathfrak{N}$. Stejně jako v důkazu věty 1,16 lze ukázat, že N je H_A-řešitelná. Podle věty 1,11 a 1,17 jsou průniky $R \cap N$ a $S \cap N$ maximální (π, H_A)-podgrupy v N a tedy podle tvrzení b) věty 1,9 jsou konjugovány v N. Označme $M(N)$ množinu všech těch automorfismů grupy N, jež vzniknou transformováním N pomocí nějakého prvku z G a převádějí $R \cap N$ v $S \cap N$. Protože $R \cap N$ a $S \cap N$ jsou konjugovány v N, je množina $M(N)$ neprázdná a protože N je konečná, je konečná i množina $M(N)$. Systém všech množin $M(N)$ pro každou podgrupu $N \in \mathfrak{N}$ označme $\mathfrak{M}$.

Částečné uspořádání v $\mathfrak{M}$ definujeme pomocí (2). Nechť $M(N) \leqq M(L)$ jsou libovolné množiny z $\mathfrak{M}$. Zobrazení množiny $M(L)$ do $M(N)$ definujeme takto: automorfismu $\varphi \in M(L)$ přiřadíme automorfismus φ' indukovaný automorfismem φ v podgrupě N. Je ihned zřejmo, že $\varphi' \in M(N)$. Rovněž snadno se lze přesvědčit, že systém $\mathfrak{M}$ má vlastnosti a) až d). Existuje tedy množina $\mathfrak{P}$ obsahující z každé množiny $M(N)$ právě jeden automorfismus φ_N. Sestrojíme nyní automorfismus μ grupy G tímto způsobem: Budiž g libovolný prvek z G a N libovolná konečná normální podgrupa v G obsahující g. Pak definujme $g^\mu = g^{\varphi_N}$. Z vlastností množiny $\mathfrak{P}$ je ihned zřejmo, že g^μ nezávisí na výběru množiny N, že $R^\mu = S$ a že μ je lokálně vnitřní automorfismus grupy G.

Věta 1,20. *Budiž G lokálně normální grupa. Pak libovolné dvě maximální (p, H_A)-podgrupy grupy G jsou lokálně konjugovány v G.*

Důkaz lze vést obdobně jako důkaz předcházející věty pouze s tím rozdílem, že místo věty 1,11 se užije věta 3,6, pro niž nepotřebujeme lokální H_A-řešitelnost grupy G.

Věta 1,21. *Budiž G lokálně normální a lokálně H_A-řešitelná grupa, M její maximální (π, H_A)-podgrupa taková, že třída podgrup s ní konjugovaných v G je konečná. Potom libovolné dvě maximální (π, H_A)-podgrupy v G jsou konjugovány v G.*

Důkaz: Označme třídu podgrup konjugovaných v G s M tímto způsobem:

$$M_1, M_2, \ldots, M_n, \quad M_1 = M, \quad n \text{ přiroz. č.} \tag{4}$$

Předpokládejme, že v G existuje maximální (π, H_A)-podgrupa M', jež není konjugována s M v G. Za tohoto předpokladu lze nalézt v M' prvky $m'_1, m'_2, \ldots, m'_n$ takové, že

$$m'_i \text{ non} \in M_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{5}$$

Podle věty 1,19 jsou podgrupy M a M' lokálně konjugovány v G. Tedy — jak plyne z definice lokálně vnitřního automorfismu — existuje v M množina prvků $m_1, m_2, \ldots, m_n$ a existuje prvek $g \in G$ tak, že

$$g^{-1}m_ig = m'_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{6}$$

Poněvadž $g^{-1}Mg$ je jedna z podgrup (4), můžeme psát $g^{-1}Mg = M_k$, kde k je některé z čísel 1, 2, ..., n. Podle (6) je tedy m'_k prvkem podgrupy M'_k, což je ve sporu s (5). Jsou tudíž všechny maximální (π, H_A)-podgrupy v G konjugovány s M, čímž je důkaz proveden.

Výsledky obsažené v tomto paragrafu ukazují, že základní věty týkající se existence a konjugovanosti Sylowových podgrup a Sylowových π-podgrup (viz zejména práce [3] a [4]) lze při vhodném zobecnění některých pojmů dokázat i pro daleko obecnější případ maximálních $|\pi, H_A|$-podgrup.

§ 2. OTÁZKY EXISTENCE A KONJUGOVANOSTI SYLOWOVÝCH $|\pi, H_A|$-BASÍ

V této části práce se budeme zabývat zobecněním známých vět o Sylowových basích pro Dicmanův pojem $|\pi, H_A|$-podgrupy.

Nejprve je třeba zavést některé pojmy a odvodit několik vět pomocného rázu.

Definice 2,1. *Nechť H_A je libovolný systém podgrup grupy G, π libovolná množina prvočísel. Množinu $\mathfrak{S}$ podgrup grupy G nazveme Sylowovou $|\pi, H_A|$-basí grupy G, když*

a) *každá podgrupa $S \in \mathfrak{S}$ je maximální $|p, H_A|$-podgrupou v G pro vhodné prvočíslo $p \in \pi$,*

b) *ke každému prvočíslu p z π existuje v $\mathfrak{S}$ právě jedna (maximální) $|p, H_A|$-podgrupa S_p.*

c) *je-li π' libovolná konečná podmnožina množiny π, je podgrupa vytvořená všemi podgrupami $S_p \in \mathfrak{S}$, pro něž $p \in \pi'$, $|\pi', H_A|$-podgrupou v G.*

Označíme-li π_0 množinu všech těch prvočísel z π, pro něž příslušná $|p, H_A|$-podgrupa S_p z $\mathfrak{S}$ není triviální), budeme Sylowovou $|\pi, H_A|$-basí grupy G rozumět Sylowovu $|\pi_0, H_A|$-basi.*

Je-li množina π (anebo π_0) prázdná, definujeme Sylowovu $|\pi, H_A|$-basi grupy G jako množinu skládající se z jediné podgrupy $D = \bigcap_{\alpha \in A} H_\alpha$.

Je zřejmé, že v případě, když systém H_A obsahuje jedinou podgrupu, jež je jednotkovou podgrupou v G, je Sylowova $|\pi, H_A|$-base v G Sylowovou π-basí grupy G.

Definice 2,2. *Budiž G konečná grupa a nechť π a H_A mají týž význam jako v definici 2,1. Normální (konečný) řetězec*

$$G = N_0 \supset N_1 \supset \ldots \supset N_r = E = \{j\} \tag{7}$$

se nazývá $|\pi, H_A|$-oddělitelným řetězcem v G, když pro každý index k, $1 \leqq k \leqq r$ platí: v grupě $\frac{N_{k-1}}{N_k}$ existují netriviální $|p, H_A(k)|$-podgrupy nejvýše pro jedno prvočíslo $p \in \pi$, přičemž $H_\alpha(k) = \frac{(N_{k-1} \cap H_\alpha)\, N_k}{N_k}$ pro každé α z A a $H_A(k)$ je množina všech $H_\alpha(k)$ pro $\alpha \in A$.

Grupa G se nazývá $|\pi, H_A|$-oddělitelná, když v ní existuje $|\pi, H_A|$-oddělitelný řetězec.

Věta 2,3. *Budiž N normální maximální (π, H_A)-podgrupa grupy G; pak* $\mathbf{M}(\pi, H_A, G) = N$.

Důkaz: Budiž x libovolný prvek z $\mathbf{M}(\pi, H_A, G)$; označme $M = \{x, N\}$. Protože N je normální podgrupa v G, má každý prvek z M tvar $x^k n$, kde $n \in N$. Protože x je (π, H_A)-prvek a N (π, H_A)-podgrupa v G, existují ke každému $\alpha \in A$ čísla d a d' z π' tak, že $x^d \in H_\alpha$, $(x^k n)^d = x^{kd}\bar{n}$, $\bar{n} \in N, (\bar{n})^{d'} \in H_\alpha$. Protože H je normální podgrupa v G, existuje $h \in H$ tak, že $(x^{kd}\bar{n})^{d'} = h(\bar{n})^{d'}$, tedy dohromady

$$(x^k n)^{dd'} \in H. \tag{8}$$

Existuje tudíž ke každému indexu $\alpha \in A$ číslo $d.d'$ zřejmě z π' tak, že platí (8), což znamená, že $x^k n$ je (π, H_A)-prvkem v G a tedy je M (π, H_A)-podgrupou v G. Ze sestrojení M plyne $M \supset N$ a protože N je maximální (π, H_A)-pod-

*) $|p, H_A|$-podgrupu P grupy G nazveme triviální $|p, H_A|$-podgrupou v G, když $P \subset \bigcap_{\alpha \in A} H_\alpha$.

grupa v G, musí být $M = N$, takže $x \in N$. Tedy $\mathbf{M}(\pi, H_A, G) \subset N$ a vzhledem k tomu, že vztah $\mathbf{M}(\pi, H_A, G) \supset N$ je splněn pro každou (π, H_A)-podgrupu, je $\mathbf{M}(\pi, H_A, G) = N$.

Věta 2,4. *Budiž G grupa, N normální podgrupa konečného indexu v G a p prvočíslo. Potom následující dvě tvrzení jsou ekvivalentní:*

(a) $\mathbf{M}(p, N, G) = N$,
(b) *index N v G je nesoudělný s p.*

Důkaz: Nechť neplátí (b), tj. nechť index podgrupy N v G je dělitelný p. Potom řád faktorové grupy $\frac{G}{N}$ je dělitelný p a tedy v ní existuje prvek xN řádu p, tj. $(xN)^p = N$, takže $x^p \in N$ a $x \in \mathbf{M}(p, N, G)$. Nemůže však být $x \in N$, neboť pak by $xN = N$. Tedy je $\mathbf{M}(p, N, G) \neq N$.

Nechť neplatí (a), tj. nechť $\mathbf{M}(p, N, G) \neq N$. Protože je $\mathbf{M}(p, N, G) \supset N$, musí existovat prvek x tak, že $x \in \mathbf{M}(p, N, G)$ a x non $\in N$. Podle definice množiny $\mathbf{M}(p, N, G)$ existuje pro prvek x celé nezáporné číslo k tak, že $x^{p^k} \in N$. Potom řád xN jakožto prvku v $\frac{G}{N}$ je dělitelem čísla p^k a poněvadž x non $\in N$, musí být řád xN větší než 1. Tedy podle Cauchyovy věty je řád $\frac{G}{N}$ dělitelný prvočíslem p, takže neplatí (b).

Z věty 2,4 plyne snadno tento výsledek: Budiž G (konečná) $|\pi, H_A|$-oddělitelná grupa, H_A systém podgrup takový, že $D \bigcap\limits_{\alpha \in A} H_\alpha$ je normální podgrupa v G a nechť π obsahuje všechna prvočísla, jež jsou děliteli řádu grupy $\frac{G}{D}$; potom $\frac{G}{D}$ je řešitelná a tedy G je H_A-řešitelná grupa.

Skládá-li se systém H_A podgrup $|\pi, H_A|$-oddělitelné grupy G z jediné podgrupy $H_1 = E$, je zřejmě podgrupa

$$H_1(k) = \frac{(N_{k-1} \cap E)\, N_k}{N_k} \quad (k = 1, 2, \ldots, r)$$

z definice 2,2 rovna jednotkové podgrupě v $\frac{N_{k-1}}{N_k}$ a tedy podle věty 3,4 a definice π-oddělitelného řetězce je řetězec (7) π-oddělitelný, takže grupa G je π-oddělitelná. Pojem $|\pi, H_A|$-oddělitelné grupy je tedy zobecněním pojmu π-oddělitelné grupy.

Věta 2,5. *Budiž G grupa, D, M, N její normální podgrupy takové, že DM má konečný index v G a že $G \supset M \supset N$, p prvočíslo. Potom platí*

$$\mathbf{M}\left(p, \frac{DN}{N}, \frac{G}{N}\right) = \frac{DN}{N} \Rightarrow \mathbf{M}\left(p, \frac{DM}{M}, \frac{G}{M}\right) = \frac{DM}{M}.$$

Důkaz plyne z věty 2,4, jež nám dovoluje převést otázku na nesoudělnost indexu $\frac{DN}{N}$ v $\frac{G}{N}$ a $\frac{DM}{M}$ v $\frac{G}{M}$ s p.

Věta 2,6. *Budiž D normální podgrupa grupy G, p prvočíslo. Pak všechny (p, D)-podgrupy v G jsou triviální právě tehdy, když $\mathbf{M}(p, D, G) = D$.*

Důkaz: Nechť $\mathbf{M}(p, D, G) \neq D$; potom — vzhledem k $\mathbf{M}(p, D, G) \supset D$ — existuje (p, D)-prvek $x \in G$ neležící v D. Protože D je normální (p, D)-podgrupa v G, je $P = \{x, D\}$ rovněž (p, D)-podgrupou v G (viz např. důkaz věty 2,3) a protože x non $\in D$, není P triviální (p, D)-podgrupa v G. — V obráceném směru je důkaz evidentní.

Věta 2,7. *Budiž G $[\pi, H_A]$-oddělitelná grupa a (7) $[\pi, H_A]$-oddělitelný řetězec v G. Pak každé zjemnění řetězce (7) je opět $[\pi, H_A]$-oddělitelný řetězec v G.*

Důkaz: Protože G je konečná grupa, je každé (vlastní) zjemnění řetězce (7) konečný řetězec a tedy stačí větu dokázat pro zjemnění tvaru

$$(9) \qquad G = N_0 \supset N_1 \supset \ldots \supset N_{i-1} \supset M \supset N_i \supset \ldots \supset N_r \quad (1 \leqq i \leqq r).$$

Rovněž z konečnosti G plyne, že systém H_A obsahuje pouze konečný počet různých podgrup, takže podle věty (v) je $\mathbf{M}[\pi, H_A, G] = \mathbf{M}(\pi, D, G)$, kde $D = \bigcap\limits_{\alpha \in A} H_\alpha$ je normální podgrupa v G.

Označme $D_i = (N_{i-1} \cap D)\, N_i$, $D_M = (N_{i-1} \cap D)\, M$, $D'_M = (M \cap D)\, N_i$. Protože všechny faktory $\dfrac{N_{k-1}}{N_k}$ pro $k = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, r$ jsou stejné jak v řetězci (7), tak i v (9), stačí k důkazu (π, D)-oddělitelnosti řetězce (9) ukázat, že pro každé prvočíslo $p \in \pi$, pro něž jsou všechny $\left(p, \dfrac{D_i}{N_i}\right)$-podgrupy v $\dfrac{N_{i-1}}{N_i}$ triviální, jsou triviální i všechny $\left(p, \dfrac{D_M}{M}\right)$-podgrupy v $\dfrac{N_{i-1}}{M}$ a všechny $\left(p, \dfrac{D_M}{N_i}\right)$-podgrupy v $\dfrac{M}{N_i}$. Podle věty 2,6 stačí tedy dokázat implikace (pro všechna prvočísla $p \in \pi$):

$$(10) \qquad \mathbf{M}\left(p, \frac{D_i}{N_i}, \frac{N_{i-1}}{N_i}\right) = \frac{D_i}{N_i} \Rightarrow \mathbf{M}\left(p, \frac{D_M}{M}, \frac{N_{i-1}}{M}\right) = \frac{D_M}{M},$$

$$(11) \qquad \mathbf{M}\left(p, \frac{D_i}{N_i}, \frac{N_{i-1}}{N_i}\right) = \frac{D_i}{N_i} \Rightarrow \mathbf{M}\left(p, \frac{D'_M}{N_i}, \frac{M}{N_i}\right) = \frac{D'_M}{N_i}.$$

Vztah (10) plyne ihned z věty 2,5, když místo D, resp. N, resp. G, resp. M položíme $N_{i-1} \cap D$, resp. N_i, resp. N_{i-1}, resp. M. Vztah (11) dokážeme takto: Nechť platí levá strana implikace (11) a nechť xN_i je libovolný prvek z $\mathbf{M}\left(p, \dfrac{D'_M}{N_i}, \dfrac{M}{N_i}\right)$. Potom — protože $\dfrac{N_{i-1}}{N_i} \supset \dfrac{M}{N_i}$ a $\dfrac{D_i}{N_i} \supset \dfrac{D'_M}{N_i}$ a tedy $\mathbf{M}\left(p, \dfrac{D_i}{N_i}, \dfrac{N_{i-1}}{N_i}\right) \supset \mathbf{M}\left(p, \dfrac{D'_M}{N_i}, \dfrac{M}{N_i}\right)$ — je $xN_i \in \mathbf{M}\left(p, \dfrac{D_i}{N_i}, \dfrac{N_{i-1}}{N_i}\right) = \dfrac{D_i}{N_i}$, tj. $x \in D_i = (N_{i-1} \cap D)\, N_i$. Poněvadž xN_i je prvek grupy $\dfrac{M}{N_i}$, je $x \in M$ a tedy $x \in D'_M = (M \cap D)\, N_i$. Tedy

$$\mathbf{M}\left(p, \frac{D'_M}{N_i}, \frac{M}{N_i}\right) \subset \frac{D'_M}{N_i}$$

a protože triviálně platí inkluse obrácená, je tím (11) dokázáno.

Po těchto přípravných větách můžeme již přistoupit k důkazu první z hlavních vět tohoto paragrafu.

Věta 2,8. *Budiž G $[\pi, H_A]$-oddělitelná grupa, π' libovolná podmnožina množiny prvočísel π; pak v G existuje alespoň jedna Sylowova $[\pi', H_A]$-base a všechny Sylowovy $[\pi', H_A]$-base v G jsou konjugovány v G.*

Důkaz: Provedeme indukcí podle řádu grupy G. Pro $G = E$ věta zřejmě platí, budiž tedy grupa G řádu $n > 1$ a nechť věta platí pro všechny grupy, jejichž řád je menší než n. Protože pro každé prvočíslo p, jež nedělí n, je každá $[p, H_A]$-podgrupa v G triviální, můžeme bez omezení obecnosti předpokládat, že množina π obsahuje pouze prvočísla dělící n a tedy je konečná. Nechť π' se skládá z prvočísel $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Pro $k = 1$ je věta speciálním případem věty (vi); tedy v dalším budeme předpokládat $k > 1$. Protože G je konečná grupa a tedy systém H_A obsahuje pouze konečný počet navzájem různých podgrup, můžeme se podle věty (v) omezit na systém o jediné podgrupě $D = \bigcap_{\alpha \in A} H_\alpha$, jež je normální v G. Budiž

$$G = N_0' \supset N_1' \supset \ldots \supset N_s' = E \tag{12}$$

(π, D)-oddělitelný řetězec v G. Společné zjemnění (bez opakování) řetězce (12) a řetězce $G \supset D \supset E$ označme

$$G = N_0 \supset N_1 \supset \ldots \supset N_r = E. \tag{13}$$

V případě $D = G$ je $\mathbf{M}(\pi, D, G) = G$ pro libovolnou množinu prvočísel π a věta je splněna triviálně. Budeme tedy v dalším předpokládat $G \neq D$.

Podle věty 2,7 je řetězec (13) (π, D)-oddělitelný. Ukážeme nyní, že pro podgrupu N_1 řetězce (13) platí $G \neq N_1 \neq E$: Je-li $D \neq E$, je toto tvrzení evidentní, neboť (13) je zjemněním (bez opakování) řetězce $G \supset D \supset E$. Je-li $D = E$, je řetězec (13) π-oddělitelný a z předpokladu $k > 1$ ihned plyne dokazované tvrzení. Je tedy řád N_1 menší než n. V dalším označíme $N_1 = M$.

1. Nechť pro všechna prvočísla z π' jsou všechny $\left(p_i, \frac{M}{M}\right)$-podgrupy (tj. vlastně p_i-podgrupy) v $\frac{G}{M}$ triviální, takže podle věty 2,6 platí

$$\mathbf{M}\left(p_i, \frac{M}{M}, \frac{G}{M}\right) = \frac{M}{M}$$

pro každé prvočíslo p_i z π'. Budiž

$$\mathfrak{S} = (S_1, S_2, \ldots, S_k), \tag{14}$$

(kde S_i je (p_i, D)-podgrupa v M) libovolná Sylowova (π', D)-base v M, jež existuje podle indukčního předpokladu. Budiž $\bar{S}_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, k$ maximální (p_i, D)-podgrupa v G obsahující S_i a x její libovolný prvek. Tudíž $x \in \mathbf{M}(p_i, D, G)$ a tím spíše $x \in \mathbf{M}(p_i, M, G)$ (neboť evidentně $D \subset M$), takže podle věty 1,2 $xM \in \mathbf{M}\left(p_i, \frac{M}{M}, \frac{G}{M}\right) = \frac{M}{M}$, což znamená $x \in M$ a tedy $x \in M \cap \bar{S}_i$, avšak podle věty 1,5 je $M \cap \bar{S}_i = S_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, k$, takže $x \in S_i$, z čehož plyne $\bar{S}_i = S_i$. Tedy base (14) je současně Sylowovou (π', D)-basí v G. — Zcela obdobně lze ukázat, že každá Sylowova (π', D)-base v G je rovněž Sylowovou

(π', D)-basí v M. Dále je zřejmé, že Sylowovy (π', D)-base v M konjugované v M jsou současně konjugovány i v G; tedy v tomto případě plyne platnost dokazované věty pro grupu G ihned z indukčního předpokladu o M.

2. Nechť pro (právě) jedno prvočíslo z π' — budeme předpokládat, že je to p_1 — platí $\mathbf{M}\left(p_1, \frac{M}{M}, \frac{G}{M}\right) \neq \frac{M}{M}$. Potom podle věty 2,4 je index $\frac{M}{M}$ v $\frac{G}{M}$ čili index M v G dělitelný prvočíslem p_1. Nechť je dělitelný právě p^b, $b \geqq 1$. Budiž (14) (π', D)-base v M (jež podle předpokladu existuje), přičemž S_i je pro $i = 1, 2, \ldots, k$ maximální (p_i, D)-podgrupa v M. Protože D je (p_i, D)-podgrupou v M pro každé prvočíslo p_i a protože D je normální v G a tedy i v M, je $D \subset S_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Označme $\frac{G}{D} = \overline{G}$, $\frac{M}{D} = \overline{M}$, $\frac{S_i}{D} = \overline{S}_i$ $(i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, k)$. Podle věty 1,3 je

$$\mathfrak{S}_d = (\overline{S}_1, \overline{S}_2, \ldots, \overline{S}_k)$$

Sylowovou π'-basí v $\overline{M}$. Nechť řád (Sylowovy p_1-podgrupy) S_1 je roven $p_1^{c'}$, $c \geqq 0$, pak — vzhledem k tomu, že p_1^b je nejvyšší mocnina p_1 dělící index M v G a tedy i $\overline{M}$ v $\overline{G}$ — je p_1^c, $c = b + c'$ nejvyšší mocnina p_1 obsažená v řádu $\bar{n}$ grupy $\overline{G}$.

Označme dále $\mathbf{N}(\mathfrak{S}_D, M)$, resp. $\mathbf{N}(\mathfrak{S}_D, G)$ normalisátor množinového sjednocení podgrup z $\mathfrak{S}_D$ v $\overline{M}$, resp. v $\overline{G}$. Podle indukčního předpokladu jsou všechny Sylowovy (π', D)-base v M konjugovány v M a tedy i všechny Sylowovy π'-base $\mathfrak{S}_D$ v $\overline{M}$ konjugovány v $\overline{M}$. Index $\mathbf{N}(\mathfrak{S}_D, \overline{M})$ v $\overline{M}$, který označíme h, je zřejmě roven počtu všech π'-basí v $\overline{M}$ a protože $\overline{M}$ je normální podgrupa v $\overline{G}$, je index $\mathbf{N}(\mathfrak{S}_D, \overline{G})$ v $\overline{G}$ roven témuž číslu h. Nechť p_1^e je nejvyšší mocnina p_1 obsažená v h. Protože $\overline{S}_1$ je Sylowovou p_1-podgrupou v $\overline{M}$, je $\overline{S}_1 \cap \mathbf{N}(\mathfrak{S}_D, \overline{M})$ Sylowova p_1-podgrupa v $\mathbf{N}(\mathfrak{S}_D, \overline{M})$ a tedy má řád $p_1^{c'-e}$. Podgrupa $\overline{S}_1 \cap \mathbf{N}(\mathfrak{S}_D, \overline{M})$ leží v jisté Sylowově p_1-podgrupě $\overline{S}_1' = \frac{S_1'}{D}$ v normalisátoru $\mathbf{N}(\mathfrak{S}_D, \overline{G})$, přičemž řád $\overline{S}_1'$ je roven p_1^{c-e}. Protože

$$\overline{S}_1' \subset \mathbf{N}(\gamma_D, \overline{G}) \subset \mathbf{N}(\overline{S}_1, \overline{G}),$$

je $\overline{S}_1$ záměnná s $\overline{S}_1'$ a podgrupa $\overline{S}_1 . \overline{S}_1' = \overline{S}_1'' = \frac{S_1''}{D}$ bude p_1-podgrupou v $\overline{G}$. Zřejmě je $\overline{S}_1 \cap \overline{S}_1' = \overline{S}_1 \cap \mathbf{N}(\mathfrak{S}_D, \overline{M})$ a tedy $\overline{S}_1''$ má řád rovný

$$p_1^{c' + (c-e) - (c'-e)} = p_1^c,$$

což znamená, že je Sylowovou p_1-podgrupou v $\overline{G}$. Protože rovněž

$$\overline{S}_1' \subset \mathbf{N}(\mathfrak{S}_D, \overline{G}) \subset \mathbf{N}(\overline{S}_i, \overline{G}) \quad (i = 2, 3, \ldots, k),$$

je

$$\overline{S}_i . \overline{S}_1' = \overline{S}_1' . \overline{S}_i \quad (i = 2, 3, \ldots, k).$$

Tedy systém podgrup

$$(\overline{S}_1'', \overline{S}_2, \ldots, \overline{S}_k) = \left(\frac{S_1''}{D}, \frac{S_2}{D}, \ldots, \frac{S_k}{D}\right)$$

tvoří Sylowovu π'-basi v $\overline{G}$. Podle věty 1,3 je tedy

$$S_1'', S_2, \ldots, S_k$$

Sylowova (π', D)-base v G.

Zbývá ještě dokázat konjugovanost libovolných Sylowových (π', D)-basí v G. Budtež

$$S_1, S_2, \ldots, S_k, \tag{15}$$

$$R_1, R_2, \ldots, R_k \tag{16}$$

takové base, přičemž S_i resp. R_i pro $i = 1, 2, \ldots, k$ je maximální (p_i, D)-podgrupa v G. Průniky $S_1' = M \cap S_1$ a $R_1' = M \cap R_1$ jsou podle věty 1,5 maximální (π', D)-podgrupy v M a tedy

$$S_1', S_2, \ldots, S_k \quad \text{a} \quad R_1', R_2, \ldots, R_k \tag{17}$$

jsou Sylowovy (π', D)-base v M, jež podle indukčního předpokladu jsou konjugovány v M. Existuje tedy prvek $x \in M$ tak, že

$$S_1' = x^{-1}R_1'x, \quad S_i = x^{-1}R_ix \quad (i = 2, 3, \ldots, k).$$

Tento prvek x transformuje basi (16) v basi

$$x^{-1}R_1x = T_1, S_2, S_3, \ldots, S_k. \tag{18}$$

Nyní ukážeme, že base (18) a (15) jsou konjugovány v G: Označme

$$X = \{S_1 S_2, \ldots, S_k\}, \qquad Y = \{T_1, S_2, \ldots, S_k\}.$$

Protože je

$$x^{-1}(R_1 \cap M)\, x = x^{-1}R_1'x = S_1' = S_1 \cap M,$$

platí $T_1 \cap M = S_1 \cap M$ a poněvadž pro $i = 2, 3, \ldots, k$ je $S_i \subset M$, je rovněž $X \cap M = Y \cap M$. Nazvěme tento průnik H. Podgrupa H je normální v X a v Y a tedy i v podgrupě $\{X, Y\}$. Maximální (p_1, D)-podgrupy S_1 a T_1 v $\{X, Y\}$ jsou podle věty (vi) konjugovány v $\{X, Y\}$ a tudíž jsou v této podgrupě konjugovány i podgrupy $\{H, S_1\}$ $(= X)$ a $\{H, T_1\}$ $(= Y)$, takže base (18) je konjugována s jistou (π', D)-basí grupy X.

Jestliže X je vlastní podgrupa v G, pak z indukčního předpokladu ihned plyne dokazované tvrzení.

Jestliže $X = G$, je nutně i $Y = G$, což může nastat pouze tehdy, když π obsahuje všechny prvočíselné dělitele n a $\pi' = \pi$. Označme pro $i = 2, 3, \ldots, k$.

$$X_i = \{S_1, S_2, \ldots, S_{i-1}, S_{i+1}, \ldots, S_k\},$$

$$Y_i = \{T_1, S_2, \ldots, S_{i-1}, S_{i+1}, \ldots, S_k\}.$$

Stejným způsobem jako byla dokázána konjugovanost X a Y lze dokázat, že X_i a Y_i jsou konjugovány v G pro $i = 2, 3, \ldots, k$. Poněvadž $G = Y = Y_i . S_i$, je možno nalézt prvek $y_i \in S_i$ tak, že

$$y_i^{-1}Y_iy_i = X_i \quad (i = 2, 3, \ldots, k). \tag{19}$$

Budiž j některé z čísel $2, 3, \ldots, k$, různé od i; potom

$$y_i^{-1}S_jy_i \subset \{S_i, S_j\}$$

a podle (19) je $y_i^{-1}S_jy_i \subset X_i$, takže

(20) $$y_i^{-1}S_jy_i = \{S_i, S_j\} \cap X_i = S_j \quad (i \neq j,\ i, j = 2, 3, \ldots, k).$$

Nechť $y_2, y_3, \ldots, y_k$ jsou prvky z $S_2, S_3, \ldots, S_k$ vybrané tak, že platí (19). Potom z (20) plyne pro prvek $y = y_2y_3, \ldots, y_k$

(21) $$y^{-1}S_iy = S_i \quad (i = 2, 3, \ldots, k)$$

Pro T_1 lze odvodit vztah

$$y^{-1}T_1y \subset X_i \quad (i = 2, 3, \ldots, k),$$

takže $y^{-1}T_1y \subset \bigcap_{i=2}^{k} X_i = S_1$. Z maximálnosti T_1 a S_1 plyne

(22) $$y^{-1}T_1y = S_1.$$

(21) a (22) ukazují, že base (18) a (15) jsou konjugovány v G a tím je **důkaz** věty 2,8 i v tomto případě proveden.

Věta 2,9. *Budiž $\overline{G}$ podgrupa $[\pi, H_A]$-oddělitelné grupy G. Pak $\overline{G}$ je $[\pi, \overline{H}_A]$-oddělitelná grupa, kde $\overline{H}_\alpha = H_\alpha \cap \overline{G}$ a $\overline{H}_A$ je systém všech podgrup $\overline{H}_\alpha$ pro $\alpha \in A$.*

Důkaz: Protože G je konečná grupa a tedy systém H_A obsahuje pouze konečný počet různých podgrup, můžeme jej nahradit systémem skládajícím se z jediné podgrupy $D = \bigcap_{\alpha \in A} H_\alpha$, normální v G. Tedy G je (π, D)-oddělitelná a podle vět 2,4 a 2,6 je $\frac{G}{D}$ π-oddělitelná. Z dědičnosti π-oddělitelnosti plyne, že i $\frac{D\overline{G}}{D}$ je π-oddělitelná a tedy — neboť $\frac{D\overline{G}}{D} \cong \frac{\overline{G}}{D \cap \overline{G}}$ — rovněž $\frac{\overline{G}}{D \cap \overline{G}}$ je π-oddělitelná. Potom podle věty 1,2 je $\overline{G}$ $(\pi, \overline{D} \cap \overline{G})$-oddělitelná čili $(\pi, \overline{H}_A)$-oddělitelná.

Právě dokázaná věta nám umožnuje učinit pro podgrupy $|\pi, H_A|$-oddělitelných grup úmluvu analogickou úmluvě za větou 1,1. Ve zbývající části práce budeme i této úmluvy užívat.

Definice 2,10. *Grupa G se nazývá lokálně $|\pi, H_A|$-oddělitelnou, když každá konečná množina jejích prvků leží v (konečné) $|\pi, H_A|$-oddělitelné podgrupě grupy G.*

Věta 2,11. *Budiž G lokálně normální a lokálně (π, H_A)-oddělitelná grupa a budiž π' libovolná neprázdná část množiny π. Potom existuje v G alespoň jedna Sylowova (π', H_A)-base a všechny Sylowovy (π', H_A)-base grupy G jsou lokálně konjugovány v G.*

Důkaz provedeme podobně jako důkaz např. věty 1,6 pomocí Kurošovy „metody projekce“. Nechť opět $\mathfrak{N}$ je systém všech konečných normálních podgrup v G. Pro každé $N \in \mathfrak{N}$ označíme $M(N)$ množinu všech Sylowových (π, H_A)-basí v N. Protože G je lokálně (π, H_A)-oddělitelná, je N obsažena v (konečné) (π, H_A)-oddělitelné podgrupě grupy G, takže podle 2,10 (s následující úmluvou) je N sama (π, H_A)-oddělitelná a věta 2,8 zaručuje, že množina $M(N)$ je neprázdná. Konečnost množiny $M(N)$ je evidentní.

V systému $\mathfrak{M}$ všech takto definovaných množin $M(N)$ definujeme částečné uspořádání vztahem (2).

Budiž $B = [\beta]$ množina indexů taková, že množina prvočísel $p_B = [p_\beta\} = \pi$ a buďtež $M(N)$ a $M(K)$ libovolné množiny z $\mathfrak{M}$, pro něž platí $M(N) \leqq M(K)$. Projekci π_{KN} definujeme tímto způsobem: Je-li $\Sigma(K) = S_B(K) = [S_\beta(K)]$ libovolná Sylowova (π, H_A)-base v K (a ovšem $S_\beta(K)$ znamená maximální (p_β, H_A)-podgrupu v K pro každé $\beta \in B$), položíme $\pi_{KM}(\Sigma(K)) = S_\beta(K) \cap N$, což je — jak snadno plyne např. z věty 1,11 — Sylowova (π, H_A)-base v N.

Systém $\mathfrak{M}$ splňuje — jak se lze snadno přesvědčit — podmínky Kurošovy věty a tedy je možno vybrat pro každé $N \in \mathfrak{N}$ jistou basi $\Sigma(N) \in M(N)$ tak, že libovolné dvě takto vybrané base $\Sigma(N) \in M(N)$ a $\Sigma(L) \in M(L)$ jsou obrazy v projekci π_{KN} resp. π_{KL} téže base $\Sigma(K)$ vybrané z množiny $M(K)$, pro níž platí $M(K) \geqq M(N)$, $M(K) \geqq M(L)$.

Označme $C = [\gamma]$ množinu indexů takovou, že platí $p_C = [p_\gamma] = \pi'$ a budiž p_γ libovolné prvočíslo z π'. Nazvěme T_γ spojení (p_γ, H_A)-podgrup $S_\gamma(N)$ z uvedeným způsobem vybraných basí $\Sigma(N)$ pro všechny podgrupy $N \in \mathfrak{N}$. Zřejmě pro každé $K \in \mathfrak{N}$ je $T_\gamma \cap K = S_\gamma(K)$ a tedy podle věty 1,6 je T_γ maximální (p_γ, H_A)-podgrupou v G. Lze se přesvědčit, že systém $[T_\gamma]$ pro $\gamma \in C$ tvoří (π', H_A)-basi v grupě G.

Zbývá dokázat lokální konjugovanost libovolných Sylowových (π', H_A)-basí grupy G. V této části důkazu užijeme opět „metody projekce“: Nechť $[T_\gamma]$ a $[U_\gamma]$ jsou libovolné Sylowovy (π', H_A)-base v G. Pro každou podgrupu $N \in \mathfrak{N}$ jsou podle věty 1,6 a 1,11 $[T_\gamma \cap N]$ a $[U_\gamma \cap N]$ Sylowovy (π', H_A)-base (v N). Označme $A(N)$ množinu všech těch vnitřních automorfismů grupy N, jež převádějí basi $[T_\gamma \cap N]$ v basi $[U_\gamma \cap N]$. V systému $\mathfrak{A}$ všech $A(N)$ pro $N \in \mathfrak{N}$ definujeme částečné uspořádání pomocí (2) (s příslušnou změnou označení) a „projekci“ pomocí indukovaného automorfismu. Obdobným způsobem jako v poslední části důkazu věty 1,19 zkonstruujeme pak lokálně vnitřní automorfismus grupy G převádějící první z daných basí v druhou.

V paragrafu druhém byly odvozeny věty zobecňující věty o Sylowových π-basích (a věty s nimi související). Zejména věty 2,8 a 2,11 ukazují, že pro pojem $|\pi, H_A|$-podgrupy lze odvodit i silné věty o existenci a konjugovanosti Sylowových basí.

Větami v práci uvedenými nejsou nikterak vyčerpány všechny výsledky, jež lze na $|\pi, H_A|$-podgrupy přenést. Spíše jde o ukázku metody, které lze při zobecnování užít a o odvození některých základních vlastností $|\pi, H_A|$-podgrup, jichž lze pak při důkazech použít.

LITERATURA

[1] Dicman A. P., *On an extension of Sylow's theorem*, Ann. of Math., 48 (1947), 137—146.

[2] Dicman A. P., О теореме Силова, Dokl. ak. nauk, 59 (1948), 1235—1236.

[3] Baer R., *Sylow theorems for infinite groups*, Duke Math. Journ., 6 (1940), 598 až 614.

[4] Golberg P. A., Силовские π-подруппы локально нормальных групп,

[5] Golberg P. A., Силовские базы π-отделимых групп,

[6] Golberg P. A., Силовские базы весконечных групп,

[7] Kuroš A. G., Теория групп, 2. vyd.,

[8] Hall Ph., *A characteristic property of soluble groups*, Journ. Lond. Math. Soc., 12 (1937), 198—200.

ON DIETZMANN'S GENERALIZATION OF p-SUBGROUPS AND SYLOW SUBGROUPS

Summary

In the papers [1] and [2] by A. P. Dietzmann a very general extension of the concept of the p-subgroup — $|\pi, H_A|$-subgroup — has been defined. It is the purpose of this paper to prove other properties of this concept and to investigate the possibility of the generalization of some theorems concerning p-subgroups, π-subgroups and Sylow subgroups for the concept of the $|\pi, H_A|$-subgroup.

The paper begins (introductory paragraph) by restating Dietzmann's definition of the $|\pi, H_A|$-subgroup and some of his results (definition (i) and theorems (ii), (iii), (v), and (vi)).

In part 1 the concept of the H_A-soluble group is defined which is a generalization of the notion of the soluble group (definition 1,7), and some theorems are proved that are parallel to the results of Baer [3] and Goldberg [4] concerning: 1. conjugation of all the maximal $|\pi, H_A|$-subgroups of any H_A-soluble group (theorem 1,9), 2. relations betveen the maximal and weakly maximal $|\pi, H_A|$-subgroups (theorems 1,12—1,17), and 3. local conjugation of all the maximal $|\pi, H_A|$-subgroups of a locally normal*) and locally H_A-soluble group (theorem 1.19).

Part 2 gives the definition of the Sylow $|\pi, H_A|$-basis and of the $|\pi, H_A|$-separable group, which are generalizations of well known concepts of Sylow π-basis and π-separable group (definitions 2.1 and 2.2). The properties of these concepts are shown in lemmas 2.3—2.7. Theorem 2.8 is analogous to the theorem concerning the existence and the conjugation of Sylow π-bases of a π-separable group, as well as theorem 2.9 to the theorem concerning the existence and the local conjugation of Sylow π-bases of a locally normal and locally π-separable group (cf. [3], [4], [5] and [6]).

The results of this paper show that for the concept of the $|\pi, H_A|$-subgroup it is possible to obtain all the fundamental theorems valid for π-subgroups, Sylow π-subgroups, and Sylow π-bases.

ОБ ОБОБЩЕНИИ ПОНЯТИЯ p-ПОДГРУППЫ И СИЛОВСКОЙ ПОДГРУППЫ ВВЕДЕННЫМ А. П. ДИЦМАНОМ

Резюме

В работах (1) и (2) вводит А. П. Дицман понятие $|\pi, H_A|$-подгруппы, которое является большим обобщением понятия π-подгруппы (и следовательно, p-подгруппы). В настоящей работе доказываются некоторые свойства этого понятия и изучается возможность обобщения для $|\pi, H_A|$-подгрупп теорем, касающихся π-подгрупп, силовских π-подгрупп и силовских π-баз.

В вводной части работы припоминается определение Дицмана и некоторые его теоремы, с которыми мы будем встречаться в дальнейшем (определение (i) и теоремы (ii), (iii), (v) и (vi)).

В первой части работы определяется понятие H_A-разрешимой группы (1,7) являющееся обобщением понятия разрешимой группы и доказываются теоремы аналогичные теоремам Бэра (см. [3]) и Гольберта (см. [4]) касающиеся сопряженности всех максимальных $|\pi, H_A|$-подгрупп H_A-разрешимой группы (теорема

*) = Baer's "locally finite" in [3].

1,9), соотношений между максимальными и слабо максимальными (см. определение 1,10) $|\pi, H_A|$-подгруппами (теоремы 1,12 — 1,17) и локальной сопряженности всех максимальных $|\pi, H_A|$-подгрупп локально нормальной и локально H_A-разрешимой групп (теорема 1,19).

В другой части работы определяются понятия силовской $|\pi, H_A|$-базы и $|\pi, H_A|$-отделимой группы, которые являются обобщениями известных понятий (определения 2,1 и 2,2). Свойства этих понятий изучены в 2,2 — 2,7. Теорема 2,8 является аналогией теоремы о существовании и сопряженности силовских π-баз π-отделимой группы и теорема 2,9 опять является аналогией теоремы о существовании и локальной сопряженности всех силовских π-баз локально нормальной и локально π-отделимой группы (см. работы [3], [4], [5] и [6].

Из результатов этой работы следует, что на случай $|\pi, H_A|$-подгруппы можно перенести все основные теоремы полученные для π-подгрупп, силовских π-подгрупп и силовских π-баз.