Acta Universitatis Carolinae. Mathematica et Physica

Pavel Andrle

Některé problémy analytické teorie perturbací elementů planetárních drah

Acta Universitatis Carolinae. Mathematica et Physica, Vol. 4 (1963), No. 1, 11--123

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/142155`

1963 ACTA UNIVERSITATIS CAROLINAE — MATHEMATICA ET PHYSICA NO. 1, PAG. 11—123

NĚKTERÉ PROBLÉMY ANALYTICKÉ TEORIE PERTURBACÍ ELEMENTŮ PLANETÁRNÍCH DRAH

PAVEL ANDRLE*

Astronomický ústav University Karlovy v Praze,

ředitel prof. dr. J. M. Mohr

OBSAH

*) Nyní v Astr. ústavu ČSAV.

PŘEDMLUVA

V tomto pojednání jsem byl veden snahou zaplnit alespoň poněkud mezeru, která existuje v české literatuře z oboru nebeské mechaniky. Snažil jsem se zpracovat a uvést na jednotné hledisko nejdůležitější analytické metody určování poruch planetárních elementů. Vzorem mi byla celá řada zahraničních publikací, zejména monografie SUBBOTINOVA a pojednání TISSERANDOVA. Nechtěl jsem však pouze přebírat problémy, rozpracované hlavně v minulém století. Kde to bylo možné, dával jsem problematice moderní matematickou formu a snažil jsem se z velmi různorodého materiálu sestavit jednotnou práci. Někde mne tato snaha přinutila vybočit ze symboliky příslušných autorů. Domnívám se, že dostatečnou náhradou za uvedené „těžkosti" je, když celé pojednání má (až na malé výjimky zejména v dodatku, na něž je vždy upozorněno) jednotné značení všech důležitých veličin. Základním vodítkem v tomto směru mi bylo doporučení Mezinárodní astronomické unie, týkající se symboliky v nebeské mechanice [Transactions of the International Astronomical Union. Vol. VI. 1938 str. 345.]

Za hlavní přínos této práce považuji, že se mi podařilo na některých místech zobecnit úvahy, obvykle v literatuře uváděné. Pokud je to možné, dávám systematicky přednost vektorové symbolice, pomocí níž jsem zpracoval např. obecné úvahy o problému n těles, Lagrangeův případ problému tří těles atd. Dále se snažím uvádět až do nejzazších mezí obecné tvary rozvojů, což má význam hlavně pro teoretické úvahy. Tato zobecnění se mi podařila zejména v dodatku k této práci, který pojednává o rozvojích souřadnic eliptického pohybu v řady. Ve 4. kapitole jsem dokázal, že koeficienty v Gaussově transformaci mají po jednoduchých úpravách tensorový charakter.

V současné době, v důsledku nebývalého rozvoje elektronických počítacích strojů, se uplatňují při praktických výpočtech hlavně numerické metody. V důsledku toho však zdaleka nelze tvrdit, že by analytické metody ztrácely význam. I v moderní době jsou zcela nezbytné zejména pro teoretické úvahy a obecné důkazy různých vztahů.

Práce je rozdělena do čtyř kapitol. Prvá kapitola je věnována obecným úvahám o problému n těles a několika aplikacím odvozených zákonů — omezený problém tří těles (probléme rest reint), pohyb v odporujícím prostředí atd. Ve druhé kapitole jsou odvozeny diferenciální rovnice pro oskulační elementy; dále jsou zavedeny různé soustavy kanonických elementů, jež budou potřebné v dalších úvahách. Třetí kapitolu, která pojednává o rozvojích perturbační funkce, je možno rozdělit na dvě části: Prvá z nich je psána formou existenčních důkazů — to jest odvozují se zde pokud možno nejobecnější formy rozvojů perturbační funkce a jejich vlastnosti, aniž by se blíže zkoumala konkrétní podoba a způsoby nalezení jednotlivých členů řad. Naopak ve druhé části jsou voleny značně zjednodušené předpoklady (jediná rušící planeta) a ukázáno, jak v tomto případě postupovat od základních rovnic až k nalezení konečné podoby rozvoje. Čtvrtá kapitola celé pojednání uzavírá. Je v ní v základních rysech uvedena Leverrierova metoda určování perturbací, jedna aplikace kvalitativních metod nebeské mechaniky (Gauss-Hillova metoda pro určování sekulárních perturbací prvého řádu), Lagrangeova metoda nalezení poruch minimální hodnosti (rangu) a konečně návod pro přechod od perturbací elementů k perturbacím souřadnic.

Formálně je látka rozčleněna na kapitoly (prvá číslice), které se skládají z paragrafů (druhá číslice), jež jsou sestaveny z oddílů (třetí číslice). Důležité vztahy jsou číslovány průběžně v každé kapitole. Pokud se odkazy týkají rovnic téže kapitoly, je uvedeno pouze číslo příslušné formule. Je-li číslo uvedeno v hranaté závorce, značí odkaz na příslušnou publikaci podle seznamu.

Vzhledem ke značnému rozsahu látky bylo nutno z literatury vybírat, a to zejména v případě rozvojů perturbační funkce a v případě analytického určování perturbací.

Při této příležitosti bych chtěl poděkovat zvlášť vřele prof. dr. Mohrovi za to, že mi napsání této publikace navrhl a za celou řadu cenných rad, doc. dr. Nechvílemu, který mi na základě mnohaletých zkušeností pomohl překonat některá úskalí, doc. dr. Vanýskovi, odbornému asistentu Mayerovi a všem ostatním pracovníkům Astronomického ústavu KU v Praze.

Praha, květen 1961. Pavel Andrle

ÚVOD

Základním principem nebeské mechaniky je zákon všeobecné přitažlivosti. Objevil jej r. 1687 I. Newton. Tím byla definitivně učiněna tečka za středověkou nebeskou mechanikou, která po mnohasetletém tápání a Koperníkově objevu dosáhla svého vrcholu ve značně propracované Keplerově kinematice.

Už Newton odvodil z gravitačního zákona nejen Keplerovy zákony, ale i celou řadu odchylek od nich (např. rotační a paralaktickou nerovnost v pohybu Měsíce).

Z Newtonových pokračovatelů jsou nejvýznamnější EULER (rotace Země, pohyb Měsíce a planet atd), D'ALLEMBERT, CLAIRAUT, LAPLACE, LAGRANGE a jiní.

Ani Newtonův zákon nezvítězil ihned. Mnoho vědců vyslovovalo z různých příčin o Newtonově zákonu pochybnosti a zpravidla se domnívali, že není dostatečně obecný. Všechny tyto vědecké spory však byly vysvětleny buď nedostatky měřicích metod, nebo nedokonalým matematickým aparátem (nebo obojím). Když se však znovu objevila Halleyova kometa tak, jak bylo předpověděno (1759) a když byl Neptun dřív „vypočítán" než objeven (1846), přestali vědci hledat nový, dokonalejší zákon, ale na základě stávajícího a dostatečně obecného principu hledali nové, dokonalejší metody jeho uplatnění. A tak jsou v 19. století dále rozpracovávány a zpřesňovány starší metody. V tomto směru zvláště vynikly práce LEVERRIEROVY, HANSENOVY, NEWCOMBOVY a jiných.

V nebeské mechanice můžeme nalézt celou řadu snah o ryze periodická řešení (bez sekulárních členů). Takovéto rozvoje se pro pohyb Měsíce podařilo nalézt DELAUNAYOVI. Obdobný pokus pro planety skončil sice úspěšně, ale POINCARÉ později dokázal, že nalezené rozvoje nejsou konvergentní.

Další směr v nebeské mechanice, jehož základy položil již LAGRANGE, představuje JACOBI, POINCARÉ a jiní. Setkáváme se zde se snahou nalézt nejjednodušší řešení problému tří těles, jež jsou obrazem některých v přírodě pozorovaných jevů. Do této skupiny patří mimo jiné periodická řešení, asymptotická řešení atd.

Ne bez významu jsou rovněž tak zvané kvalitativní metody v nebeské mechanice, kdy realitu nahrazujeme určitým zjednodušeným modelem. Této problematice je např. věnována publikace Chilmiho, kde za pomoci nejmodernějších matematických metod jsou zdvozovány některé obecné vlastnosti problému n těles.

Už od samého počátku se nebeská mechanika vyvíjela dvěma směry. Vznikaly analytické a numerické metody. (Viz podrobněji ve vlastním pojednání.)

V poslední době — době elektronických počítacích strojů — vznikají pro nebeskou mechaniku nové úkoly, které hlavně pramení z vypouštění umělých družic a kosmických stanic. Jsou určovány dráhy letu k Měsíci (např. JEGOROV) a dráhy k nejbližším planetám. Při těchto výpočtech jsou hlavně využívány různé metody numerické integrace. Dalším oborem současného uplatnění nebeské mechaniky jest zpracovávání pozorování umělých družic, s jejichž pomocí jsou zpřesňovány různé údaje (tvar Země a jiné).

1. kapitola

PROBLÉM *n* TĚLES

1,1. FORMULACE PROBLÉMU A OBECNÉ VLASTNOSTI POHYBU

Problémem n těles nazýváme úlohu nalézt pohyb soustavy hmotných bodů, které na sebe působí podle Newtonova zákona.

Mějme pevnou kartézskou soustavu souřadnic a hmotné body m_j ($j = 0, 1, \ldots, n - 1$) se souřadnicemi ξ_j, η_j, ζ_j. Označme $\mathbf{r}_j^* = (\xi_j\, \eta_j, \zeta_j)$. Poněvadž Lagrangeův kinetický potenciál jest

$$L = \frac{1}{2} \sum_j m_j \dot{\mathbf{r}}_j^* \, . \, \dot{\mathbf{r}}_j^* + U$$

můžeme pohybové rovnice bodu m_j napsat ve tvaru:

$$m_j \ddot{\mathbf{r}}_j^* = \nabla_j^* U \tag{1}$$

kde

$$\nabla_j^* = \left(\frac{\partial}{\partial \xi_j} ; \frac{\partial}{\partial \eta_j} ; \frac{\partial}{\partial \zeta_j} \right)$$

$$U = \frac{1}{2} k^2 \sum_{i \neq j} \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}}$$

$$\Delta_{ij}^2 = (\xi_i - \xi_j)^2 + \ldots . = r_i^{*2} + r_j^{*2} - 2\, \mathbf{r}_i^* \, . \, \mathbf{r}_j^*$$

$k^2 \ldots \ldots$ gravitační konstanta.

při čemž **A** . **B** značí skalární součin vektorů **A** a **B**.

1,11 ZÁKONY ZACHOVÁNÍ

Provedeme-li v (1) sumaci přes j, dostaneme

$$\sum_{j=1}^{n-1} m_j \ddot{\mathbf{r}}_j^* = 0$$

a odtud integrací

$$\sum_{j=1}^{n-1} m_j \dot{\mathbf{r}}_j^* = \boldsymbol{\alpha} \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} m_j \mathbf{r}_j^* = \boldsymbol{\alpha} t + \boldsymbol{\beta} \tag{3}$$

Integrály (2) a (3) jsou matematickým vyjádřením faktu, že hmotný střed soustavy koná nejvýše přímočarou rovnoměrnou translaci.

(2) je zákon zachování hybnosti.

Násobme rovnici (1) vektorově zleva $\mathbf{r}_j^*$! Protože

$$\nabla_j^* \; U = k^2 \, m_j \sum_i m_i \frac{\mathbf{r}_i^* - \mathbf{r}_j^*}{\Delta_{ij}^3}$$

přičemž $i \neq j$, dostaneme

$$m_j \, \mathbf{r}_j^* \times \ddot{\mathbf{r}}_j^* = k^2 \, m_j \sum_i m_i \frac{\mathbf{r}_j^* \times \mathbf{r}_i^*}{\Delta_{ij}^3}$$

Sumací přes j obdržíme vzhledem k symetrii indexů i a j na pravé straně nulu, takže platí:

$$\sum_{j=1}^{n=1} m_j \, \mathbf{r}_j^* \times \ddot{\mathbf{r}}_j^* = \sum_{j=1}^{n=1} m_j \, (\mathbf{r}_j^* \times \ddot{\mathbf{r}}_j^* + \dot{\mathbf{r}}_j^* \times \dot{\mathbf{r}}_j^*) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{j=1}^{n=1} m_j \, \mathbf{r}_j^* \times \dot{\mathbf{r}}_j^* = 0$$

Integrací obdržíme výraz

$$\sum_{j=1}^{n-1} m_j \, \mathbf{r}_j^* \times \dot{\mathbf{r}}_j^* = \mathbf{C}^* \tag{4}$$

(4) je vyjádřením zákona zachování momentu hybnosti. Je to zobecnění 2. Keplerova zákona.

Přejdeme k odvození obecného integrálu energie (v astronomické literatuře bývá modifikace tohoto zákona nazývána integrálem živých sil). Násobme rovnici (1) skalárně $\dot{\mathbf{r}}_j^*$ a uvažme, že pro stacionární soustavu

$$\sum_{j=1}^{n-1} \dot{\mathbf{r}}_j^* \, . \, \nabla_j^* \; U = \dot{U} = \frac{\mathrm{d}\,U}{\mathrm{d}\,t}$$

Můžeme proto po integraci psát:

$$T = \tfrac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} m_j \, \dot{\mathbf{r}}_j^* \, . \, \dot{\mathbf{r}}_j^* = U + H$$

Neboli

$$T - U = H = \mathrm{const} \tag{5}$$

což vyjadřuje zákon zachování energie pro problém n těles.

1,12 NĚKTERÉ OBECNÉ VLASTNOSTI PROBLÉMU n TĚLES

(1) je soustavou diferenciálních rovnic řádu $6n$ (n trojic rovnic druhého řádu). (2), (3), (4), (5) představuje deset prvých integrálů, jimiž se dá snížit řád soustavy o 10. Vyloučíme-li čas a uvážíme-li, že působící síly jsou pouze funkcí vzdáleností (tzv. vyloučení uzlů — viz 3,12), můžeme ještě snížit řád o 2. Lze tedy v problému n těles obecně nalézt 12 prvých integrálů, což je právě dostatečný počet pro problém dvou těles. Kdyby se nám podařilo nalézt dalších $6(n - 2)$ prvých integrálů, byl by problém n těles zcela obecně řešitelný. Přes veškeré snahy nejlepších matematiků se však o více než o 12 nepodařilo řád soustavy snížit. Konec těmto snahám učinil roku 1889 POINCARÉ, který dokázal, že už v problému tří těles nemůže být žádný další prvý integrál jednoznačnou analytickou funkcí souřadnic a jejich prvých derivací.

1,13 ZAVEDENÍ RELATIVNÍCH SOUŘADNIC

Rovnice (2) a (3) dovolují vyloučit z (1) jeden průvodič a jeho derivace. Můžeme proto zvolit počátek soustavy v bodě m_0 a zavést kartézskou soustavu souřadnic, jejíž osy budou rovnoběžné s původními. Průvodič bodu m_j vůči této soustavě označme $\mathbf{r}_j = (x_j, y_j, z_j)$. Platí:

$$\mathbf{r}_j^* = \mathbf{r}_0^* + \mathbf{r}_j \quad ; \quad j = 1, 2, \ldots, n - 1$$

S použitím posledního vztahu můžeme rovnice (1) přepsat po jednoduchých úpravách na tvar:

$$\ddot{\mathbf{r}}_j + k^2 (m_0 + m_j) \frac{\mathbf{r}_j}{r_j^3} = \nabla_j R_j \tag{6}$$

kde

$$r_j^2 = \Delta_{0j}^2 = x_j^2 + y_j^2 + z_j^2 \, ; \qquad \nabla_j = \left(\frac{\partial}{\partial x_j} ; \frac{\partial}{\partial y_j} \; \frac{\partial}{\partial z_j} \right)$$

Veličinu

$$R_j = k^2 \sum_h m_h \left(\frac{1}{\Delta_{jh}} - \frac{\mathbf{r}_j \cdot \mathbf{r}_h}{r_h^3} \right) ; j = 1, \ldots n - 1, \, h \neq j. \tag{7}$$

nazýváme perturbační funkcí pro bod m_j.

Poznámka:

Obecnější než (6) jsou rovnice:

$$\ddot{\mathbf{r}}_j + k^2 (m_0 + m_j) \frac{\mathbf{r}_j}{r_j^3} = \mathbf{F}_j \tag{6$'$}$$

kde $\mathbf{F}_j$ je libovolné rušící zrychlení (kromě působení ostatních planet to může například být odpor prostředí, slapy od Galaxie ap). (6)$'$ platí i tehdy, neexistuje-li potenciální funkce U ve smyslu rovnic (1).

Jak bylo řečeno v 1,12, nelze problém n těles obecně řešit. Rovnice, jež jsme odvodili a které ještě odvodíme, se aplikují hlavně na pohyby ve sluneční soustavě, kde je hmota Slunce značně větší než součet hmot planet. Proto jsou velmi výhodné rovnice (6), které řešíme metodou postupných aproximací. Postupujeme tak, že nejdříve rozřešíme soustavu (6) bez pravých stran (keplerovský pohyb planet kolem Slunce) a při dalších aproximacích hledáme odchylky, které způsobují pravé strany (tzv. perturbace).

Rovnice (6) jsou soustavou ($6n$ — 6)-tého řádu. Podaří-li se nám ji rozřešit, můžeme s pomocí (3) snadno nalézt i „absolutní" pohyb.

Pomocí relativních souřadnic nyní vyjádříme zákon ploch. Místo (4) můžeme po jednoduchých úpravách napsat:

$$\mathfrak{M} \cdot \sum_{j=1}^{n-1} m_j \mathbf{r}_j \times \dot{\mathbf{r}}_j + \left(\sum_{j=1}^{n-1} m_j \mathbf{r}_j\right) \times \left(\sum_{j=1}^{n-1} m_j \dot{\mathbf{r}}_j\right) = \mathbf{C} \tag{8}$$

kde

$$\mathbf{C} = \mathfrak{M} . \mathbf{C}^* + \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta} \, ; \qquad \mathfrak{M} = \sum_{j=0}^{n-1} m_j \quad \ldots \text{ celková hmota soustavy.}$$

při čemž $\boldsymbol{\alpha}$ a $\boldsymbol{\beta}$ jsou konstanty z rovnic (2) a (3).

1,14 NEMĚNNÁ ROVINA LAPLACEOVA

Rovinu kolmou na směr úhrnného momentu hybnosti nazýváme neměnnou rovinou Laplaceovou. Její rovnice zřejmě bude

$$\mathbf{C}^* . (\mathbf{r}^* - \mathbf{A}) = 0 \tag{9}$$

kde $\mathbf{C}^*$ je konstantní vektor z rovnice (4), $\mathbf{A}$ je libovolný konstantní vázaný vektor.

Laplaceova rovina má tuto vlastnost: Součet průmětů „plošných hybností" (hmota planety znásobená její plošnou rychlostí) do této roviny je maximální.

Rovnice (9) se však k určování Laplaceovy roviny nehodí, neboť v ní potřebujeme znát „absolutní" pohyby všech planet. K určení roviny však není třeba znát vektor k ní kolmý, ale stačí znát jeho směr.

Poněvadž pro hmotný střed soustavy platí $\mathfrak{M} . \mathbf{R} = \boldsymbol{\alpha}\, t + \boldsymbol{\beta}$, kde $\mathfrak{M} = \sum_{j=0}^{n-1} m_j$, můžeme položit v rovnicích (1) $\mathbf{r}_j^* = \mathbf{r}_j^\circ + \mathbf{R}$ a rovnice (1) zcela zachovají svůj tvar. Zákon ploch v těchto souřadnicích bude mít tvar

$$\sum_j m_j \mathbf{r}_j^\circ \times \dot{\mathbf{r}}_j^\circ = \mathbf{C}^\circ \Rightarrow \mathbf{C}^\circ . (\mathbf{r}^\circ - \mathbf{A}^\circ) = 0 \tag{10}$$

Řešení soustavy (1) pomocí souřadnic $\mathbf{r}_j^*$ má naprosto stejný tvar jako řešení pomocí souřadnic $\mathbf{r}_j^\circ$. Hodnota konstant $\mathbf{C}^*$ popř. $\mathbf{C}^\circ$ závisí pouze na okrajových a počátečních podmínkách. Proto (10) můžeme považovat za rovnici stejné roviny jako (9). Můžeme tedy říci, že k určení Laplaceovy roviny stačí znát souřadnice všech planet vůči hmotnému středu soustavy (ve sluneční soustavě prakticky vůči Slunci).

Poznámky:

a) Laplaceova rovina je exaktnější pojem nežli ekliptika, jejíž poloha podléhá nejrůznějším perturbacím. V praxi se však Laplaceovy roviny většinou neužívá, poněvadž její poloha závisí na hmotách planet, které zatím neznáme tak přesně jako souřadnice jejich drah.

b) Planety nejsou hmotné body, ale reálná tělesa, u nichž zdaleka neznáme všechny potřebné charakteristiky (funkci hustoty ap). To je další důvod proti běžnému užívání Laplaceovy roviny.

c) Pro ekvinokcium 1950,0 má Laplaceova rovina přibližnou polohu $\Omega = 107°37'$; $i = 1°34',5$ a nalézá se mezi Jupiterovou a Saturnovou drahou.

O Laplaceově rovině viz též 3,12.

1,15 JACOBIHO SOUŘADNICE

Pro obecné úvahy se rovnice (6) nehodí, neboť každý bod má vlastní perturbační funkci. V obecných úvahách se vždy snažíme převést úlohu na ekvivalentní problém pohybu jediného hmotného bodu ve vhodně zvoleném fázovém prostoru. JACOBI umožňuje užít tohoto postupu bez zavedení „absolutních“ souřadnic. Označme:

$\mathbf{q}_1$ .... průvodič bodu m_1 vzhledem k počátku m_0
$\mathbf{q}_j$ .... průvodič bodu m_j vzhledem k počátku G_{j-1}

při čemž směr souřadnicových os je stále stejný jako v celém paragrafu 1,1, G_j je hmotný střed soustavy bodů $m_0, \ldots, m_j$. Nechť G_j má vůči „ohvězdičkované“ souřadné soustavě průvodič $\mathbf{R}_j$, nechť $\mathfrak{M}_j = \sum_{h=0}^{j} m_h$. Potom platí:

$$\mathfrak{M}_j \mathbf{R}_j = \sum_{h=0}^{j} m_h \mathbf{r}_h^*$$

$$\mathbf{q}_j = \mathbf{r}_j^* - \mathbf{R}_{j-1}$$

$$\mathfrak{M}_{j-1} \mathbf{q}_j = \sum_{h=0}^{j-1} m_h (\mathbf{r}_j^* - \mathbf{r}_h^*) = \mathfrak{M}_{j-1} \mathbf{r}_j^* - \sum_{h=0}^{j-1} m_h \mathbf{r}_h^* \tag{11}$$

$$\mathfrak{M}_j \mathbf{R}_j - \mathfrak{M}_{j-1} \mathbf{R}_{j-1} = m_j \mathbf{r}_j^* = (\mathfrak{M}_j - \mathfrak{M}_{j-1}) \mathbf{r}_j^*$$

$$\mathbf{r}_{j+1}^* - \mathbf{r}_j^* = \mathbf{q}_{j-1} - \frac{\mathfrak{M}_{j-1}}{\mathfrak{M}_j} \mathbf{q}_j$$

Přejdeme nyní k odvození pohybových rovnic v Jacobiho souřadnicích.

Z třetí identity (11) vyplývá s pomocí (1):

$$\mathfrak{M}_{j-1}\,\ddot{\mathbf{q}}_j = \mathfrak{M}_{j-1}\,\ddot{\mathbf{r}}_j^* - \sum_{h=0}^{j-1} m_h\,\ddot{\mathbf{r}}_h^* = \frac{\mathfrak{M}_{j-1}}{m_j}\,\nabla_j^*\,U - \sum_{h=0}^{j-1} \nabla_h^*\,U \ldots \quad (12)$$

Jelikož

$$\nabla_0^*\,U = -\nabla_1\,U - m_0 \sum_{h=2}^{n-1} \mathfrak{M}_{h-1}^{-1}\,\nabla_h\,U \quad ; \quad \nabla_j^* = \left(\frac{\partial}{\partial \xi_j}, \ldots\right)$$

$$\nabla_j^*\,U = \quad \nabla_j\,U - m_j \sum_{h=j+1}^{n-1} \mathfrak{M}_{h-1}^{-1}\,\nabla_h\,U \quad ; \quad \nabla_j = \left(\frac{\partial}{\partial q_{xj}}, \ldots\right)$$

nalezneme snadno

$$\frac{\mathfrak{M}_{j-1}}{m_j}\,\nabla_j^*\,U = \frac{\mathfrak{M}_{j-1}}{m_j}\,\nabla_j\,U - \mathfrak{M}_{j-1} \sum_{h=j+1}^{n-1} \frac{1}{\mathfrak{M}_{h-1}}\,\nabla_h\,U$$

$$\sum_{h=0}^{j-1} \nabla_h^*\,U = -\nabla_j\,U - \mathfrak{M}_{j-1} \sum_{h=j+1}^{n-1} \frac{1}{\mathfrak{M}_{h-1}}\,\nabla_h\,U$$

Po dosazení do (12) dostaneme

$$\mu_j\,\ddot{\mathbf{q}}_j = \nabla_j\,U \quad (13)$$

kde

$$\mu_j = m_j\,\frac{\mathfrak{M}_{j-1}}{\mathfrak{M}_j} = \frac{m_j \sum_{h=0}^{j-1} m_h}{\sum_{h=0}^{j} m_h}$$

Rovnice (13) mají formálně naprosto stejný tvar jako (1). Nepředpokládáme zde však znalost souřadnic vůči absolutní souřadné soustavě. Týmž postupem, jako jsme odvozovali (4) a (5), můžeme nalézt zákon zachování momentu hybnosti a zákon zachování energie ve tvaru:

$$\sum_{j=1}^{n-1} \mu_j\,\mathbf{q}_j \times \dot{\mathbf{q}}_j = \mathbf{K}$$

$$\tfrac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \mu_j\,\dot{\mathbf{q}}_j \,.\, \dot{\mathbf{q}}_j = U + H_1 \quad (14)$$

kde

$$H_1 = H + \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{M}_{n-1}\,\dot{\mathbf{R}}_{n-1}\,\dot{\mathbf{R}}_{n-1} = \text{const}\,.$$

Rovnic (13) se používá v teorii pohybu měsíců planet a při zkoumání násobných hvězdných skupin. Např. pro pohyb Měsíce bereme $m_1 = m_{☾}$, $m_2 = m_{\odot}$, $m_0 = m_{♁}$. Pro pohyb Slunce vzhledem ke hmotnému středu Země—Měsíc dostaneme s velmi dobrou přesností keplerovský pohyb.

1,16 POHYBOVÉ ROVNICE VE VÁLCOVÝCH SOUŘADNICÍCH

Vyjdeme z rovnic odstavce 1,13. Položme

$$x_j = \varrho_j \cos v_j \quad ; \quad y_j = \varrho_j \sin v_j \quad ; \quad z_j = z_j \tag{15}$$

Jelikož

$$T = \tfrac{1}{2} \sum_j m_j \left(\dot{\varrho}_j^2 + \varrho_j^2 \dot{v}_j^2 + \dot{z}_j^2\right)$$

můžeme podle Lagrangeových rovnic druhého druhu psát

$$\begin{aligned} \ddot{\varrho}_j - \varrho_j \dot{v}_j^2 &= \frac{\partial U_j}{\partial \varrho_j} = P_j \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} (\varrho_j^2 \dot{v}_j) &= \frac{\partial U_j}{\partial v_j} = \varrho_j T_j \\ \ddot{z}_j &= \frac{\partial U_j}{\partial z_j} = Z_j \end{aligned} \tag{16}$$

kde

$$U_j = \frac{k^2 (m_0 + m_j)}{r_j} + R_j$$

P_j je zrychlení ve směru ϱ_j.
T_j je zrychlení ve směru kolmém k ϱ_j v rovině $z_j = 0$,
Z_j je zrychlení ve směru z_j.

Poznámky:

a) Rovnice bez parciálních derivací (s rušícími zrychleními $P_j, \ldots$) jsou poněkud obecnější, neboť platí i tehdy, neexistuje-li potenciální funkce U_j.

b) Rovnic (16) přepsaných na tvar

$$\begin{aligned} \ddot{\varrho} - \varrho \dot{v}^2 + \frac{k_1^2 \varrho}{r^3} &= \frac{\partial R}{\partial \varrho} = S \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} (\varrho^2 \dot{v}) &= \frac{\partial R}{\partial v} = \varrho \,.\, T \\ \ddot{Z} + \frac{k_2^1 z}{r^3} &= \frac{\partial R}{\partial z} = W \end{aligned} \tag{16'}$$

kde indexy jsou pro jednoduchost vynechány, $k_1^2 = k^2 (1 + m)$, při čemž m je hmota planety v jednotkách sluneční hmoty, se užívá při numerických výpočtech poruch planetárních a komentárních drah.

1,2 NĚKTERÉ SPECIÁLNÍ PŘÍPADY PROBLÉMU TŘÍ TĚLES

Když byly bezvýsledné všechny snahy o obecné řešení problému tří a více těles, začali matematikové řešit různé zjednodušené případy problému tří těles. Tak např. LAGRANGE řešil problém: Určit množinu všech pohybů v problému tří těles, při nichž poměry mezi vzdálenostmi jsou konstantní. Základním myšlenkám Lagrangeova postupu věnujeme následující oddíly pojednání.

1,21 NEKOLINEÁRNÍ PŘÍPAD LAGRANGEOVA POHYBU

Mějme hmotné body m_j se souřadnicemi x_j, y_j, z_j ($j = 1, 2, 3$). Počátek nechť je v hmotném středu soustavy. Rovina, v níž body leží nechť má rovnici $z = 0$. Poněvadž předpokládáme, že poměry mezi vzdálenostmi jsou konstantní a poněvadž vzdálenosti vrcholů trojúhelníka od těžiště jsou úměrné rozměrům trojúhelníka, můžeme psát:

$$\mathbf{r}_j = \mathbf{a}_j\, \sigma \tag{17}$$

kde $\mathbf{a}_j = (a_{1j}, a_{2j}, 0/\mathbf{a}_j$ je ke konstantní vektor a σ je hledaná funkce času. Označme $\boldsymbol{\omega}$ vektor rotace naší soustavy vůči určité pevné souřadné soustavě. Rychlost a zrychlení budou mít vůči nepohyblivé soustavě tvar

$$\dot{\mathbf{r}}_j + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_j \tag{18}$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_j + 2\,\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}_j + \boldsymbol{\omega}\,(\boldsymbol{\omega}\,.\,\mathbf{r}_j) - \mathbf{r}_j\,\omega^2 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_j$$

Poznámka:

Odvození vztahů (18) je zcela stejné jako odvození vzorců pro zdánlivé síly a čtenář je nalezne ve většině učebnic mechaniky.

Z druhé strany můžeme zrychlení vůči pevné soustavě vyjádřit podle Newtonova zákona ve tvaru $\mathbf{A}_j\,\sigma^{-2}$, kde $\mathbf{A}_j = (A_{1j}, A_{2j}, 0)$ je vektor závislý na hmotách bodů a na veličinách $\mathbf{a}_j$. Srovnáním s (18) dostaneme:

$$\mathbf{A}_j\,\sigma^{-2} = \mathbf{a}_j\,\ddot{\sigma} + 2\,\dot{\sigma}\,\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}_j + \sigma\,\boldsymbol{\omega}\,(\boldsymbol{\omega}\,.\,\mathbf{a}_j) - \sigma\,\mathbf{a}_j\,\omega^2 + \sigma\,\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{a}_j \tag{19}$$

Neboli v rozepsaném tvaru

$$\begin{aligned} a_{1j}\,[\ddot{\sigma} - (\omega_y^2 + \omega_z^2)\,\sigma] - a_{2j}\,[2\,\omega_z\,\dot{\sigma} + (\dot{\omega}_z - \omega_x\,\omega_y)\,\sigma] &= A_{1j}\,\sigma^{-2} \\ a_{1j}\,[2\omega_z\,\dot{\sigma} + (\dot{\omega}_z + \omega_x\,\omega_y)\,\sigma] + a_{2j}\,[\ddot{\sigma} - (\omega_x^2 + \omega_z^2)\,\sigma] &= A_{2j}\,\sigma^{-2} \\ -\,a_{1j}\,]2\,\omega_y\,\dot{\sigma} + (\dot{\omega}_y - \omega_x\,\omega_z)\,\sigma] + a_{2j}\,[2\,\omega_x\,\dot{\sigma} + (\dot{\omega}_x + \omega_y\,\omega_z)\,\sigma] &= 0 \end{aligned} \tag{19'}$$

Za předpokladu, že body neleží na přímce (o tomto případu pojednáme v příštím oddíle), musí platit

$$\begin{aligned} &\ddot{\sigma} - (\omega_y^2 + \omega_z^2)\,\sigma = \alpha_1\,\sigma^{-2}\,; \quad && 2\,\omega_z\,\dot{\sigma} + (\dot{\omega}_z - \omega_x\,\omega_y)\,\sigma = \beta_1\,\sigma^{-2} \\ &\ddot{\sigma} - (\omega_x^2 + \omega_z^2)\,\sigma = \alpha_2\,\sigma^{-2}\,; \quad && 2\,\omega_z\,\dot{\sigma} + (\dot{\omega}_z + \omega_x\,\omega_y)\,\sigma = \beta_2\,\sigma^{-2} \\ &2\,\omega_y\,\dot{\sigma} + (\dot{\omega}_y - \omega_x\,\omega_z)\,\sigma = 0\,; \quad && 2\,\omega_x\,\dot{\sigma} + (\dot{\omega}_x + \omega_y\,\omega_z)\,\sigma = 0 \end{aligned} \tag{20}$$

Odkud vyplývá

$$\omega_x^2 - \omega_y^2 = (\alpha_1 - \alpha_2)\,\sigma^{-3}\,; \qquad \omega_x\,\omega_y = \tfrac{1}{2}\,(\beta_2 - \beta_1)\,\sigma^{-3}$$

Neboli

$$\omega_x = \alpha\,\sigma^{-\frac{3}{2}}\,; \qquad \omega_y = \beta\,\sigma^{-\frac{3}{2}} \tag{21}$$

kde α_1, α_2, β_1, ... , β jsou konstanty závislé na m_j *a* $\mathbf{a}_j$.

Dosadíme-li (21) do třetího řádku (20), dostaneme soustavu dvou homogenních rovnic pro ω_z, která může mít nenulové řešení jen tehdy, jsou-li tyto rovnice závislé, tj. platí-li

$$(\alpha^2 + \beta^2)\,\dot{\sigma} = 0 \tag{22}$$

Rovnici (22) lze vyhóvět dvěma způsoby:

1) $\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$ a podle (21) $\omega_x = \omega_y = 0$. Slovy lze dokázaný fakt vyjádřit tak, že všechny tři body se pohybují v rovině, jež nemění svoji polohu v prostoru.

2) $\dot{\sigma} = 0 \Rightarrow \sigma$, ω_x, ω_y jsou konstanty, $\omega_z = 0$. V tomto případě nemění tělesa vzájemnou polohu. Vhodným otočením souřadných os kolem osy z lze dosáhnout toho, že pouze jedna složka vektoru rotace je nenulová. Názorně lze říci, že v tomto případě se rovina, v níž body leží „převrací“ kolem osy v ní ležící.

Kdybychom provedli analýzu koeficientů A_j atd, zjistili bychom, že při nekolineárním Lagrangeově pohybu jsou uvažované body vrcholy rovnostranného trojúhelníka.

Protože souřadnice všech bodů jsou násobky jediné funkce času, lze každý průvodič vyjádřit jako násobek kteréhokoliv z ostatních. Proto podle (1) můžeme psát:

$$\ddot{\mathbf{r}}_j + \Lambda_j\,\frac{\mathbf{r}_j}{r_j^3} = 0 \tag{23}$$

kde Λ_j závisí pouze na hmotách bodů.

Rovnice (23) ukazuje, že při nekolineárním Lagrangeově pohybu jsou drahami bodů keplerovské elipsy.

1,22 KOLINEÁRNÍ PŘÍPAD LAGRANGEOVA POHYBU

Při studiu kolineárního Lagrangeova pohybu budeme postupovat obdobně jako při nekolineárním případě. Vyjdeme opět z rovnic (17). Jediný rozdíl spočívá v tom, že vektory $\mathbf{a}_j$ a $\mathbf{A}_j$ mají pouze jednu nenulovou složku (budeme předpokládat, že nenulovou je x-ová složka). Protože všechny body leží na ose x, mají podle Newtonova zákona i působící síly směr této přímky. Můžeme tedy zřejmě vybrat takovou pevnou souřadnou soustavu, aby $\omega_x \equiv 0$. Za těchto předpokladů dostaneme místo (19)′ rovnice:

$$\begin{aligned} 2\,\omega_y\,\dot{\sigma} + \dot{\omega}_y\,\sigma &= 0 \\ 2\,\omega_z\,\dot{\sigma} + \dot{\omega}_z\,\sigma &= 0 \\ \ddot{\sigma} - (\omega_y^2 + \omega_z^2)\,\sigma &= \frac{A_{1j}}{a_{1j}}\,\sigma^{-2} \end{aligned} \tag{24}$$

Z prvých dvou rovnic vyplývá

$$(\dot{\omega}_y \,.\, \omega_z - \omega_y \,\dot{\omega}_z)\,\sigma = 0$$

takže

$$\omega_y = \text{const.}\ \omega_z \tag{25}$$

Další specialisací volby pevné souřadné soustavy (otočením kolem osy x o určitý úhel) lze dosáhnout toho, že konstanta v rovnici (25) je rovna nule. Proto bez újmy na obecnosti lze říci, že přímka, na které body leží, vykonává rotační pohyb kolem osy k ní kolmé.

Poznámka:

Z poslední rovnice (24) je zřejmé, že předpoklad kolineárnosti není zbytečný. Kdyby neplatilo $\frac{A_{1j}}{a_{1j}} = c$ (c nezávislé na j), neměla by tato rovnice jediné řešení.

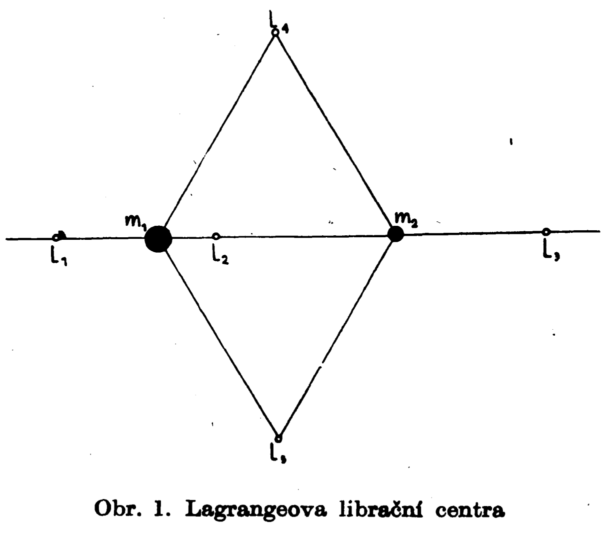
Předpokládejme

$$a_{11} < a_{12} < a_{13}$$

Substitucí:

$$\nu = \frac{a_{13} - a_{12}}{a_{12} - a_{11}}$$

a rozborem výrazů pro A_{1j} dostaneme rovnici pátého stupně vzhledem k ν, na níž je aplikovatelná Descartesova věta (počet kladných kořenů rovnice $a_0 x^n + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$ nemůže být větší než počet změn znaménka v posloupnosti koeficientů a_j; může být nanejvýš o sudé číslo menší), podle níž má právě jeden kladný kořen.



Obr. 1. Lagrangeova librační centra

Nehledíme-li na orientaci (pořadí m_1, m_2, m_3 je totéž jako pořadí m_3, m_2, m_1), můžeme v tomto případě umístit body na přímce třemi způsoby.

Předpokládejme, že zkoumáme libovolný pohyb, o němž víme, že je lagrangeovský a v němž známe polohy dvou těles. Hledejme místa, kam můžeme umístit třetí těleso. Podle toho, co jsme dokázali, je zřejmé, že těchto poloh je pět (viz obr. 1). Třetí těleso můžeme umístit do bodů L_1 až L_5, které nazýváme Lagrangeovými libračními centry.

1,23 OMEZENÝ PROBLÉM TŘÍ TĚLES

Omezeným problémem tří těles nazýváme úlohu určit pohyb hmotného bodu s nekonečně malou hmotou v gravitačním poli dvou těles, která kolem svého těžiště obíhají po kruhových drahách.

Označme m_0 hmotu planetky (tohoto názvu užíváme proto, že nalezení dráhy planetky nebo komety je častým případem aplikace této metody), $m_1 \geqq m_2$ hmoty obou těles, $z = 0$ rovinu, v níž „velká“ tělesa obíhají. Osu x zvolme, aby bod m_1 měl souřadnice $(-a_1, 0, 0)$, $m_2 \ldots (a_2, 0, 0)$, přičemž počátek je v těžišti soustavy. Protože se jedná o značně speciální problém, je složková symbolika jednodušší než vektorová (např. vektor rotace se redukuje na jediné konstantní číslo).

Poněvadž soustava rotuje s konstatní úhlovou rychlostí $n = k \sqrt{m_1 + m_2} \sqrt{(a_1 + a_2)^3}$, bude kinetická energie planetky vzhledem k (18) rovna (viz [II])

$$\tfrac{1}{2} m_0 \left[(\dot{x} - n y)^2 + (\dot{y} + n x)^2 + \dot{z}^2\right]$$

a její pohybové rovnice můžeme napsat ve tvaru

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2 n \dot{y} &= \frac{\partial \Omega}{\partial x}\,. \\ \ddot{y} + 2 n \dot{x} &= \frac{\partial \Omega}{\partial y} \\ \ddot{z} &= \frac{\partial \Omega}{\partial z} \end{aligned} \tag{26}$$

kde

$$\Omega = \tfrac{1}{2} n^2 (x^2 + y^2) + U = \tfrac{1}{2} n^2 (x^2 + y^2) + k^2 \left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}\right)$$

$$r_1^2 = (x + a_1)^2 + y^2 + z^2 \quad ; \quad r_2^2 = (x - a_2)^2 + y^2 + z^2$$

Soustava (26) má zřejmě prvý integrál:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 2\,\Omega - C \tag{27}$$

který nazýváme Jacobiho integrálem, jenž bude výchozí rovnicí dalšího studia omezeného problému. Veličinu C nazýváme Jacobiho konstantou a je základní charakteristikou daného pohybu.

Veličina na levé straně (27) je rovna čtverci relativní rychlosti planetky vůči rotující souřadné soustavě a je zřejmě nezáporná. Proto plocha

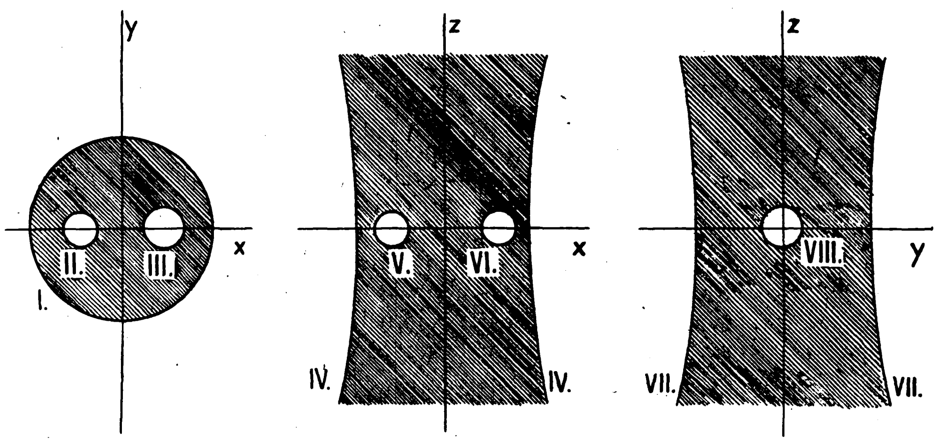
$$2\,\Omega - C = 0 \tag{28}$$

představuje hranici části prostoru, v níž je pohyb za daných podmínek možný. Nazýváme ji plochou nulové rychlosti (Hillovou plochou) a její rovnice podle (26) bude

$$x^2 + y^2 + \frac{2\,m_1}{r_1} + \frac{2\,m_2}{r_2} = C \tag{29}$$

přičemž jednotky délky, hmoty a času jsou voleny tak, aby

$$a_1 + a_2 = 1 \quad ; \quad m_1 + m_2 = 1 \quad ; \quad k^2 = 1$$



Obr. 2. Průsečnice Hillovy plochy se souřadnými rovinami

Průsečnice Hillovy plochy se souřadnými rovinami jsou načrtnuty na obr. 2. Vyšrafované plochy představují v dané rovině zakázané oblasti pro možnost výskytu planetky. Tvar příslušných křivek je závislý na Jacobiho konstantě (počátečních podmínkách). Analytické vyjádření těchto křivek pro velké hodnoty C — viz závěr kapitoly.

V dalším se budeme zabývat vlastnostmi kritických bodů plochy nulové rychlosti — tj. bodů, pro něž $\frac{\partial \Omega}{\partial x} = \frac{\partial \Omega}{\partial y} = \frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0$. Podle (26) jsou v těchto bodech nulové nejen všechny složky rychlosti (relativní), ale i zrychlení. Proto zůstávají vzájemné vzdálenosti všech tří těles stejné, takže můžeme učinit závěr, že kritické body plochy nulové rychlosti splývají s Lagrangeovými libračními centry.

Nyní bychom mohli zkoumat různé speciální případy omezeného problému. Poněvadž však hlavním úkolem tohoto pojednání je studium perturbací, musí se čtenář, mající hlubší zájem o různé speciální případy problému více těles, obrátit na některou podrobnou monografii. Zde si pouze uvedeme, kterým směrem se ubíralo studium problému tří těles a odvodíme jednu důležitou praktickou aplikaci omezeného problému.

Lagrangeův pohyb je pouze speciálním případem periodického řešení problému tří těles (řešení, kdy všechny souřadnice jsou periodickými funkcemi času). POINCARÉ dělí periodická řešení na tři skupiny:

a) Planetka se pohybuje ve stejné rovině jako „velká" tělesa, při čemž $m_1 \gg m_2 \gg m_0$ a excentricita dráhy planetky je nulová.

b) Planetka... (jako případ a) ... nenulová excentricita.

c) Ostatní periodické dráhy.

Nejpodrobněji jsou probádány pohyby v blízkosti libračních center (např. Trojané), dráhy kolem planet, které uvnitř neobsahují centrální těleso (měsíce planet), dráhy, kdy jsou oběžná doba planety a planetky v poměru malých celých čísel, atd.

1,24 TISSERANDOVO KRITÉRIUM

Mezi nově objevenými planetkami a kometami je vždy mnoho těch, které už známe z dřívějška. Identifikace bývá často značně obtížnou. V prvém přiblížení, kdy sluneční soustavu redukujeme na Slunce a kolem něj po kružnici obíhajícího Jupitera, nám může být dobrou pomůckou Jacobiho integrál a z něj vyplývající Tisserandovo kritérium: Dvě planetky (komety) mohou být identické jen tehdy, mají-li stejnou Jacobiho konstantu.

Abychom toto tvrzení matematicky vyjádřili a učinili analytické výrazy použitelnými v praxi, musíme přejít k pevné souřadné soustavě. Položme proto:

$$\begin{aligned} x + a_1 &= \xi \cos n't + \eta \,.\, \sin n't \\ y &= - \xi \sin n't + \eta \,.\, \cos n't \\ z &= \zeta \end{aligned}$$

kde n' je střední denní pohyb Jupitera.

Dosadíme-li poslední transformaci (a derivace těchto souřadnic) do (27), dostaneme po jednoduchých úpravách:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2 - 2\,n'\,(\xi\,\dot{\eta} - \eta\,\dot{\xi}) = 2\,k_1^2 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} \right) - \\ - 2\,n'^2\,a_1\,(\xi \cos n't + \eta \sin n't) + n'^2\,a_1^2 - C \end{aligned} \tag{30}$$

při čemž hmota Slunce je položena za jednotku, $r\ (= r_1)$ je průvodič planetky vzhledem ke Slunci. Nalézá-li se planetka daleko od Jupitera, můžeme při naší aproximaci říci, že se pohybuje pouze pod vlivem Slunce, takže:

$$\xi\,\dot{\eta} - \eta\,\dot{\xi} = k_1 \sqrt{p} \,.\, \cos i = k_1 a^{1/2} \cos \varphi \cos i$$

$$\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\xi}^2 = k_1^2 \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

kde veličiny na pravých stranách posledních vztahů mají význam obvyklý v nebeské mechanice (viz seznam na konci pojednání). Nyní můžeme (30) přepsat na tvar:

$$a^{-1} + 2\,n' \,.\, k_1^{-1}\, a^{\frac{1}{2}} \,.\, \cos\varphi \,.\, \cos i = C^* + \vartheta$$

kde

$$C^* = C \,.\, k_1^{-2};\ \vartheta = 2\,n'^2\, k_1^{-2} \,.\, a_1\, (\xi \,.\, \cos n't + \eta \,.\, \sin n't) - n'^2\, k_1^{-2}\, a_1^2 - 2\, m_2\, r_2^{-1}$$

Protože m_2 a n' jsou malé veličiny, můžeme při dosavadní přesnosti veličiny zanedbat, takže platí:

$$a^{-1} + 2\,n'\, k_1^{-1} \,.\, a^{\frac{1}{2}} \cos\varphi \,.\, \cos i = C \,.\, k_1^{-2} = \text{const} \tag{31}$$

(31) je matematickým vyjádřením Tisserandova kritéria a představuje nutnou podmínku pro identifikaci planetky (komety).

1,3 CLAIRAUT-LAPLACEOVY ROVNICE A JEJICH UŽITÍ

Odvodíme nyní jeden z důsledků (16) a ukážeme aplikaci obdržených rovnic. Poněvadž pohyby planet ve sluneční soustavě se příliš neliší od keplerovských pohybů, zvolíme postup podobný studiu problému dvou těles. Zavedeme proměnné:

$$w = \varrho^{-1}; \qquad s = z \,.\, w \tag{32}$$

a zvolíme pravou anomálii v jako nezávisle proměnnou. Derivace podle pravé anomálie budeme značit čárkou u příslušné veličiny. Indexy u veličin jsou pro jednoduchost vynechány.

Položme

$$\varrho^2 \,.\, \dot{v} = L \tag{33}$$

Platí

$$\ddot{\varrho} = -L^2 \,.\, w^2 \,.\, w'' - L \,.\, L' \,.\, w^2 \,.\, w'$$

$$\frac{d}{dt}\,(\varrho^2 \,.\, \dot{v}) = L \,.\, L' w^2$$

$$\varrho \,.\, \dot{v}^2 = L^2 \,.\, w^3$$

$$\ddot{z} = L^2 \,.\, w^2\, (s'' \,.\, w - s \,.\, w'') + L \,.\, L' \,.\, w^2\, (s' \,.\, w - s \,.\, w')$$

a (16) můžeme přetransformovat na tvar:

$$\begin{aligned} w'' + w &= L^{-2} \,.\, w^{-2}\, (-P - w^{-1} \,.\, w' \,.\, T) \\ s'' + s &= L^{-2} \,.\, w^{-3}\, (-s \,.\, P - s' \,.\, T + Z) \\ L \,.\, L' &= w^{-3} \,.\, T \end{aligned} \tag{34}$$

Když vyřešíme (34), nalezneme čas z rovnice

$$t' = L^{-1} \,.\, w^{-2} \tag{35}$$

Poslední rovnici (34) lze řešit přímo a dosadit do prvých dvou rovnic (34).

Platí:

$$L^2 = l^2 + 2 \int w^{-3} \, . \, T \, . \, \mathrm{d}v$$

přičemž l je integrační konstanta. Nyní můžeme (34) a (35) přepsat na tvar

$$\begin{aligned}
&(l^2 + 2 \int w^{-3} \, . \, T \, . \, \mathrm{d}v) \, . \, (w'' + w) = w^{-2} \, (-P - w^{-1} \, . \, w' \, . \, T) \\
&(l^2 + 2 \int w^{-3} \, . \, T \, . \, \mathrm{d}v) \, . \, (s'' + s) = w^{-3} \, (-s \, . \, P - s' \, . \, T + Z) \qquad (36) \\
&t' = w^{-2} \, (l^2 + 2 \int w^{-3} \, . \, T \, . \, \mathrm{d}v)^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Vyjádříme-li zrychlení P, T, Z pomocí potenciální funkce z rovnic (16), můžeme rovnice (36) napsat v druhé formě:

$$\begin{aligned}
&(l^2 + 2 \int w^{-2} \, . \, U_v \, . \, \mathrm{d}v) \, . \, (w'' + w) = U_w - w^{-2} \, . \, w' \, . \, U_v + s \, . \, w^{-1} \, . \, U_s \\
&(l^2 + 2 \int w^{-2} \, . \, U_v \, . \, \mathrm{d}v) \, . \, (s'' + s) = s \, . \, w^{-1} \, . \, U_w - w^{-2} \, . \, s \, .' \, U_v + w^{-2} \, . \, (1 + s^2) \, U_s \\
&t' = w^{-2} \, (l^2 + 2 \int w^{-2} \, . \, U_v \, . \, \mathrm{d}v)^{-\frac{1}{2}} \qquad (37)
\end{aligned}$$

kde U_s značí parciální derivaci potenciální funkce podle s atd, za platnosti identit

$$P = U_\varrho' = -w^2 \, . \, U_w - s \, . \, w \, . \, U_s \, ; \qquad T = w \, . \, U_v \, ; \qquad Z = U_z = w \, . \, U_s \, .$$

Rovnice (36) nebo (37) se nazývají Clairaut-Laplaceovými (na základě Clairautovy volby proměnných je odvodil Laplace.

1,31 POHYB V ODPORUJÍCÍM PROSTŘEDÍ

Clairaut-Laplaceových rovnic nyní užijeme ke studiu pohybu planety kolem centrálního tělesa, při čemž budeme předpokládat, že prostředí klade odpor velikosti $F = \alpha \, m \, . \, V \, . \, r$ působící ve směru tečny planetární dráhy. (α je malý konstantní koeficient, m ... hmota, r ... průvodič, V ... rychlost planety.) Jelikož se zřejmě jedná o rovinný problém, platí $\varrho \equiv r$, $s \equiv 0$, takže se rovnice (34) redukují na tvar

$$\begin{aligned}
w'' + w &= L^{-2} \, . \, w^{-2} \, (-P - w^{-1} \, . \, w' \, . \, T) \\
L \, . \, L' &= w^{-3} \, . \, T \qquad (38) \\
t' &= L^{-1} \, . \, w^{-2}
\end{aligned}$$

Každý vektor G rovnoběžný s rovinou dráhy lze rozložit na složku $G \, . \, \dot{r} \, . \, V^{-1}$ ve směru průvodiče a na složku $G \, . \, r \, . \, \dot{v} \, . \, V^{-1}$ k ní kolmou.

Proto platí:

$$P = -k_1^2 w^2 + \alpha\, w^2 . w' . L$$

$$T = -\alpha . w^3 . L$$

znaménko minus je u složek síly proto, že se jedná o brzdění.

Dosadíme-li vyjádření rušících zrychlení do (38), dostaneme:

$$w'' + w = k_1^2 . L^{-2} \qquad (39)$$

$$L' = -\alpha$$

a odtud integrací:

$$L = l - \alpha . v \qquad (40)$$

Poněvadž α je malá veličina, můžeme napsat pro prvou rovnici (39) aproximativní vyjádření:

$$w'' + w = k_1^2 . l^{-2} (1 + 2 . l^{-1} . \alpha . v)$$

Obecný integrál této rovnice jest:

$$w = k_1^2 . l^{-2} [1 + 2 . \alpha . l^{-1} . v + f . \cos (v - v_0)] \qquad (41)$$

kde f a v_0 jsou integrační konstanty.

Protože α je malé číslo, nemůže se řešení (41) příliš lišit od keplerovského pohybu. Proto se budeme snažit (41) převést na tvar:

$$w = p^{-1} [1 + e . \cos (v - \varkappa)] \qquad (42)$$

kde p, e, $\varkappa$ jsou tak volené funkce pravé anomálie, že (41) a (42) jsou identické. Tyto veličiny nazveme oskulačními elementy a elipsu, kterou by určovaly, kdyby v daný okamžik přestalo působit odporující prostředí, oskulační drahou.

Z rovnice (40) a ze vztahu $k_1 . p^{\frac{1}{2}} = L$ dostaneme

$$p = k_1^{-2} (1 - 2 . \alpha . l^{-1} . v) . l^2 \qquad (43)$$

Srovnáním (41) a (42) a jejich derivací obdržíme s pomocí (43) při zanedbání veličin vyšších řádů:

$$e . \cos (v - \varkappa) = (1 - 2 . \alpha . l^{-1} . v) . f . \cos (v - v_0)$$

$$e . \sin (v - \varkappa) = (1 - 2 . \alpha . l^{-1} . v) . f . \sin (v - v_0) - 2 . \alpha . l^{-1}$$

a se stejnou přesností:

$$e = f - 2 . \alpha . l^{-1} [f . v + \sin (v - v_0)]$$

$$\varkappa = v_0 + 2 . \alpha\, l^{-1} . f . \cos (v - v_0) \qquad (44)$$

Označme Δp, Δa, ... vzrůst příslušných veličin při vzrůstu v o 2π. Platí:

$$\Delta e = -4 . \pi . \alpha . l^{-1} . f \doteq -4 . \pi . \alpha . l^{-1} . e \qquad (45)$$

Dále:

$$\frac{\Delta p}{p} = -4\, \pi\, \alpha\, l^{-1} \qquad (45)$$

Odkud dostaneme ihned

$$\begin{aligned} \frac{\Delta a}{a} &= -\frac{4\pi\alpha}{l}\cdot\frac{1+e^2}{1-e^2} \\ \frac{\Delta n}{n} &= \frac{6\pi\alpha}{l}\,\frac{1+e^2}{1-e^2} \end{aligned} \tag{46}$$

Vztahy (45) a (46) ukazují, že při pohybu v odporujícím prostředí se excentricita i velká poloosa neustále zmenšují. K podobnému kvalitativnímu závěru dospějeme touto úvahou: Při pohybu ve viskosním prostředí dochází k disipaci energie. Proto se planeta musí dostávat na dráhy s nižší energetickou hladinou, což se děje tak, že se po spirále blíží ke Slunci.

1,4. NĚKTERÉ DODATKY

Závěrem této kapitoly bych chtěl poznamenat: Dosud bylo celé pojednání psáno s maximální možnou stručností. Snažil jsem se odvodit výchozí vztahy pro další úvahy a podat alespoň v hrubých rysech přehled problematiky (někde pouze kvalitativní). Přesto však v práci nejsou uvedeny některé důležité vztahy Jacobiho formule apod. Proto zde uvádím několik problémů, jimiž si čtenář může prohloubit a zobecnit poznatky, které jsme o problému n těles získali.

1. Dokažte identity (11);
2. Dokažte rovnost:

$$T = \tfrac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1} m_j\,\dot{\mathbf{r}}_j^*\,.\,\dot{\mathbf{r}}_j^* = \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1} \mu_j\,.\,\dot{\mathbf{q}}_j\,.\,\dot{\mathbf{q}}_j + \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{M}_{n-1}\,\dot{\mathbf{R}}_{n-1}\,.\,\dot{\mathbf{R}}_{n-1}$$

kde $\mathbf{r}_j^*$ jsou souřadnice z oddílu 1,11 a veličiny na pravé straně jsou Jacobiho souřadnice.

3. Dokažte Jacobiho formuli:

$$\ddot{I} = 2.U + 4.H$$
$$\ddot{\Lambda} = 2\,U + 4\,H - \alpha^2 = 2\,U + H^*,$$

kde α^2 je veličina z rovnice (2), $I = \sum_{j=0}^{n-1} m_j\,r_j^2$ je moment setrvačnosti, $\Lambda = \frac{1}{\mathfrak{M}}\sum_{j>h} m_j\,m_h\,\Delta_{jh}^2$, $\mathfrak{M} = \sum_j m_j$, U a H jsou veličiny z rovnice (5).

[Návod: Využijte toho, že U je homogenní funkce (— 1)-ho řádu! Pomocí Eulerovy věty a integrálu energie dostanene prvé tvrzení. Při důkazu druhé formule užijte identity

$$\mathfrak{M}\,.\sum_j m_j\,r_j^{*\,2} - \Big(\sum_j m_j\,\mathbf{r}_j^*\Big)^2 = \sum_{j>h} m_j\,m_h\,\Delta_{jh}^2]$$

5. Dokažte: Soustava n hmotných bodů (volných) může být stabilní jen tehdy, je-li $H < 0$.

[Návod: Veďte nepřímý důkaz a za pomoci příkladu 4 ukažte, že pro $H \geqq 0$ má alespoň jedna z veličin Δ_{jh} v nevlastním bodě nevlastní limitu.]

6. Dokažte: Veličina $\Delta^* = \min(\Delta_{jh})$ je při $H < 0$ shora omezena.

[Návod: Vyjděte ze zřejmého vztahu $U + H \geqq 0$ a odhadněte výraz pro U!]

7. Na základě minulých dvou problémů vyslovte závěr o stabilitě drah!

8. Rovnovážným řešením nazýváme případ, kdy souřadnice těles vůči pevné soustavě nezávisí na čase. Pro $n > 1$ neexistují v problému n těles rovnovážná řešení. Dokažte!

[Návod: Vyjděte z rovnic (1) a užijte Eulerovu větu o homogenních funkcích!]

9. Odvoďte aproximativní rovnice průsečnic plochy nulové rychlosti se souřadnými rovinami pro případ velkých absolutních hodnot Jacobiho konstanty. Proč je v případě VIII. nutný předpoklad $m_1 \gg m_2$?

[Odpověď:

$$\text{I. } x^2 + y^2 = C - \varepsilon_1\,; \qquad \text{II. } (x + a_1)^2 + y^2 = \left(\frac{2\,m_1}{C - \varepsilon_2}\right)^2$$

$$\text{III. } (x - a_2)^2 + y^2 = \left(\frac{2\,m_2}{C - \varepsilon_3}\right)^2; \qquad \text{IV. } x^2 = C - \varepsilon_4$$

$$\text{V. } (x + a_1)^2 + z^2 = \left(\frac{2\,m_1}{C - \varepsilon_5}\right)^2; \qquad \text{VI. } (x - a_2)^2 + z^2 = \left(\frac{2\,m_2}{C - \varepsilon_6}\right)^2$$

$$\text{VII. } y^2 = C - \varepsilon_7\,; \qquad \text{VIII. } y^2 + z^2 = (c - \varepsilon_8)^2 - a_1^2 = (C - \varepsilon_8)^2$$

Funkce ε_j nabývají malých hodnot.]

2. kapitola

KANONICKÉ ELEMENTY

2,1 ÚVOD

Postup, s nímž jsme začali v minulé kapitole, je použitelný pro každou soustavu, v níž hmota jednoho tělesa je značně větší než součet hmot ostatních a v níž nikdy nenastává případ $\Delta_{jh} \to 0$. Postupujeme tak, že hledáme řešení ve stejném tvaru jako při problému dvou těles, při čemž předpokládáme, že elementy jsou vhodně zvolené funkce času (tzv. oskulační elementy). Určení diferenciálních rovnic, jejichž řešením nalezneme oskulační elementy, bude naším nejbližším úkolem. Tyto rovnice odvodíme z (1,6)′ metodou variace konstant. Nejelementárnějším způsobem řešení těchto rovnic by bylo: Vyjádřit elementy eliptického pohybu jako funkce času, souřadnic a rychlostí. Tím bychom pro libovolný element dostali:

$$a = a(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}),\ e = e(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}),\ \dots$$

Po zderivování podle času a zpětném dosazení elementů bychom získali požadované rovnice. V principu tento postup předpokládá pouze řešení algebraických rovnic. Je však velmi zdlouhavý, nepřehledný a těžkopádný [znamená mj. řešit vzhledem k a, e, ..., soustavu rovnic (13) a (13)′], a proto se jím nebudeme zabývat. Podrobněji rozebereme metodu, která využívá vlastností kanonických rovnic, uvedeme základní myšlenky Lagrangeova postupu a všimneme si odvození na základě vlastností oskulačních drah.

2,2. ODVOZENÍ LAGRANGEOVÝCH ROVNIC POMOCÍ KANONICKÝCH ELEMENTŮ

Dříve, než přejdeme k vlastní problematice, nalezneme řešení problému dvou těles pomocí kanonických rovnic.

2,21. ŘEŠENÍ PROBLÉMU DVOU TĚLES POMOCÍ JACOBIHO ROVNICE

Pro Hamiltonovu funkci vztaženou na jednotkovou hmotu dostaneme vyjádření:

$$H = \tfrac{1}{2}\,\dot{\mathbf{r}}\,.\,\dot{\mathbf{r}} - \frac{k_1^2}{r}$$

kde, jako vždy v této práci, $k_1^2 = k^2\,(1 + m)$, přičemž o hmotě „největšího“ tělesa předpokládáme, že je jednotková.

Přejděme ke sférickým souřadnicím:

$$x = r.\cos\Theta\,\cos\vartheta\,; \qquad y = r.\sin\Theta\,\cos\vartheta\,; \qquad z = r.\sin\vartheta$$

a označme

$$p_r = \dot{r} \quad ; \quad p_\Theta = r^2\cos^2\vartheta\;\dot{\Theta} \quad ; \quad p_\vartheta = r^2.\dot{\vartheta}$$

impulsy vzhledem k příslušným souřadnicím. Hamiltonova funkce jest:

$$H = \tfrac{1}{2}\,(p_r^2 + p_\vartheta^2.r^{-2} + p_\Theta^2.r^{-2}.\sec^2\vartheta) - k_1^2.r^{-1}$$

Řešení problému provedeme pomocí Jacobiho rovnice, tj. — jak známo z mechaniky — musíme nalézt funkci $W = W\,(r, \vartheta, \Theta, t)$, pro kterou

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -H$$

přičemž

$$p_r = \frac{\partial W}{\partial r}\,; \qquad p_\vartheta = \frac{\partial W}{\partial \vartheta}\,; \qquad p_\Theta = \frac{\partial W}{\partial \Theta}$$

Dosadíme-li tato vyjádření do rovnice pro Hamiltonovu funkci, obdržíme parciální diferenciální rovnici

$$2\,\frac{\partial W}{\partial t} + \left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \vartheta}\right)^2 + \frac{1}{r^2\cos^2\vartheta}\left(\frac{\partial W}{\partial \Theta}\right)^2 - \frac{2\,k_1^2}{r} = 0$$

Poněvadž v této rovnici jsou čas i Θ cyklickými souřadnicemi,*) je vzhledem k možné separaci proměnných výhodné položit:

$$W(r, \vartheta, \Theta, t) = -\alpha_1 t + \alpha_2 \Theta + W_1(r) + W_2(\vartheta)$$

kde α_1, α_2 jsou konstanty. Po této substituci můžeme Jacobiho rovnici přepsat na tvar:

$$\left(\frac{\mathrm{d}W_1}{\mathrm{d}r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\mathrm{d}W_2}{\mathrm{d}\vartheta}\right)^2 + \frac{\alpha_2^2}{r^2\cos^2\vartheta} - \frac{2k_1^2}{r} - 2\alpha_1 = 0$$

Neboli

$$r^2\left(\frac{dW_1}{\mathrm{d}r}\right)^2 - 2k_1^2 r - 2\alpha_1 r^2 = -\left(\frac{\mathrm{d}W_2}{\mathrm{d}\vartheta}\right)^2 - \frac{\alpha_2^2}{\cos^2\vartheta} = -\alpha_3^2 = \text{const}$$

Řešením těchto rovnic dostaneme:

$$W = -\alpha_1 t + \alpha_2\Theta + \int_{r_0}^{r}(2\alpha_1 + 2k_1^2 r^{-1} - \alpha_3^2 r^{-2})^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}r + \int_0^{\vartheta}(\alpha_3^2 - \alpha_2^2\sec^2\vartheta)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}\vartheta$$

kde r_0 je rovno nejmenšímu kořenu výrazu pod odmocninou.

Z mechaniky je známo, že obecné řešení Jacobiho rovnice má formu

$$\beta_j = \frac{\partial W}{\partial\alpha_j}$$

kde β_j je další řada integračních konstant. V našem případě dostaneme:

$$\beta_1 + t = \int_{r_0}^{r}(2\alpha_1 + 2k_1^2 r^{-1} - \alpha_3^2 r^{-2})^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}r$$

$$\beta_2 - \Theta = -\alpha_2\int_0^{\vartheta}(\alpha_3^2 - \alpha_2^2\sec^2\vartheta)^{-\frac{1}{2}}.\sec^2\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta \tag{1}$$

$$\beta_3 = -\alpha_3\int_{r_0}^{r}(2\alpha_1 + 2k_1^2 r^{-1} - \alpha_3^2 r^{-2})^{-\frac{1}{2}}.r^{-2}\,\mathrm{d}r + \alpha_3\int_0^{\vartheta}(\alpha_3^2 - \alpha_2^2\sec^2\vartheta)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}\vartheta$$

což představuje jeden z možných tvarů řešení problému dvou těles.

2,22. VZTAH MEZI ELEMENTY α_j, β_j A „BĚŽNÝMI" ELEMENTY ELIPTICKÝCH DRAH

Je zřejmé, že r se může pohybovat v intervalu $\langle r_0, r_1\rangle$, kde r_0 a r_1 značí nejmenší a největší kořen výrazu pod odmocninou v prvé rovnici (1). Z vlastností elipsy ihned vyplývá

$$r_0 = a(1 - e), \quad r_1 = a(1 + e)$$

*) O cyklické souřadnici mluvíme tenkrát, když ji rovnice explicitně neobsahuje (obsahuje pouze derivace podle ní).

Dále: Z vlastností kořenů kvadratické rovnice plyne:

$$-\frac{k_1^2}{\alpha_1} = r_0 + r_1 = 2.a\,; \qquad -\frac{\alpha_3^2}{2\,\alpha_1} = r_0.r_1 = a^2\,(1-e^2)$$

Proto:

$$\alpha_1 = -\frac{k_1^2}{2\,a}\quad ; \quad \alpha_3 = k_1.\sqrt{p}$$

Pro $r = r_0$ dostaneme z prvé rovnice (1):

$$\beta_1 = -T$$

kde T je okamžik průchodu perihelem.

Z nerovnosti $\alpha_3^2 - \alpha_2^2.\sec^2\vartheta \geqq 0$ a ze zřejmého faktu, že rovnost nastane pro $\vartheta_{\max} = i$, dostaneme:

$$\alpha_2 = k_1\,\sqrt{p}.\cos i$$

Položíme-li $\vartheta = 0$, obdržíme z druhé rovnice (1)

$$\beta_2 = \Omega$$

Konečně význam β_3 zjistíme takto: Zaveďme argument šířky u vztahem:

$$\sin\vartheta = \sin i.\sin u$$

Při průchodu perihelem jest $r = r_0$, $u = \omega = \pi - \Omega$. Podle třetí rovnice (1) platí:

$$\beta_3 = \omega = \pi - \Omega$$

Definujme tzv. střední délku λ vztahem:

$$\lambda = \varepsilon + \int n.\mathrm{d}\,t = \pi + M$$

Proto:

$$T = \frac{\pi - \varepsilon}{n} = \frac{\pi - \varepsilon}{k_1}\,a^{\frac{3}{2}}$$

Shrneme-li dosavadní výsledky, můžeme kanonické elementy α_j, β_j z oddílu 2,21 vyjádřit pomocí v praxi běžně užívaných elementů takto:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\tfrac{1}{2}\,k_1^2\,a^{-1}\,; & \beta_1 &= (\varepsilon - \pi)\,k_1^{-1}\,a^{\frac{3}{2}} = T \\ \alpha_2 &= k_1\,p^{\frac{1}{2}}.\cos i\,; & \beta_1 &= \Omega \\ \alpha_3 &= k_1.p^{\frac{1}{2}} = k_1\,a^{\frac{1}{2}}.\cos\varphi\,; & \beta_3 &= \pi - \Omega \end{aligned} \qquad (2)$$

A naopak

$$\begin{aligned} a &= -\tfrac{1}{2}\,k_1^2\,\alpha_1^{-1}\,; & \Omega &= \beta_2 \\ e &= (1 + 2\,\alpha_1\,\alpha_3^2\,k_1^{-4})^{\frac{1}{2}}\,; & \pi &= \beta_2 + \beta_3 \\ i &= \arccos\,(\alpha_2.\alpha_3^{-1})\,; & \varepsilon &= \beta_2 + \beta_3 + \beta_1\,(-2\alpha_1)^{\frac{3}{2}}.k_1^{-2} \end{aligned} \qquad (3)$$

2,23. UŽITÍ METODY VARIACE KONSTANT NA KANONICKÉ ELEMENTY

Mějme kanonickou soustavu rovnic:

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}\,; \qquad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \tag{4}$$

Nechť

$$q_j = q_j\,(t, \alpha_h, \beta_h)\,; \qquad p_j = p_j\,(t, \alpha_h, \beta_h) \tag{5}$$

je Jacobiho řešení soustavy (4), které, jak známo, obdržíme z rovnic:

$$p_k = \frac{\partial W}{\partial q_k}\,; \qquad \beta_k = \frac{\partial W}{\partial \alpha_k} \tag{6}$$

kde W je úplný integrál rovnice

$$\frac{\partial W}{\partial t} + H\left(t, q_j, \frac{\partial W}{\partial q_j}\right) = 0 \tag{7}$$

Poznámky:

a) Úplným integrálem rovnice (7) rozumíme každou funkci, která jí vyhovuje a obsahuje potřebný počet konstant (tolik, kolik je nezávislých proměnných souřadnic plus impulsů).

b) Touto metodou byl už řešen problém dvou těles v oddíle 2,21.

Budeme nyní řešit novou kanonickou soustavu

$$q_j = \frac{\partial(H - R)}{\partial p_j}\,; \qquad p_j = -\frac{\partial(H - R)}{\partial q_j} \tag{8}$$

kde $R = R(t, q_j, p_j)$.

Hledejme řešení (8) ve tvaru (5), přičemž o veličinách α_j, β_j budeme předpokládat, že jsou v h o d n ě z v o l e n ý m i f u n k c e m i č a s u. Zvolme veličiny α_j, β_j za nové proměnné. Z mechaniky je známo, že k tomu, aby se zachoval kanonický tvar rovnic i pro nové proměnné, stačí, aby výraz

$$\sum_j p_j \,\mathrm{d}q_j - \sum_j \alpha_j \,\mathrm{d}\beta_j = \mathrm{d}W^*$$

byl totální diferenciál. Je-li poslední podmínka splněna, platí

$$\dot{\beta}_j = \frac{\partial K}{\partial \alpha_j}\,; \qquad \dot{\alpha}_j = -\frac{\partial K}{\partial \beta_j} \tag{9}$$

kde K je rovno původní Hamiltonově funkci plus $\dfrac{\partial W^*}{\partial t}$.

Vzhledem k (6) však platí:

$$\sum_j p_j\, dq_j - \sum_j \alpha_j\, d\beta_j = \sum_j \beta_j\, d\alpha_j + \sum_j p_j\, dq_j - d\Big(\sum_j \alpha_j \beta_j\Big) =$$

$$= \sum_j \frac{\partial W}{\partial \alpha_j}\, d\alpha_j + \sum_j \frac{\partial W}{\partial q_j}\, dq_j - d\Big(\sum_j \alpha_j \beta_j\Big) =$$

$$= d\Big(W - \sum_j \alpha_j \beta_j\Big)$$

Proto lze psát:

$$\dot{\alpha}_j = \frac{\partial R}{\partial \beta_j} \qquad \dot{\beta}_j = -\frac{\partial R}{\partial \alpha_j} \tag{10}$$

neboť v našem případě vzhledem k (7) a (9)

$$K = H - R + \frac{\partial W}{\partial t} = -R$$

2,24. TRANSFORMACE VEDOUCÍ K LAGRANGEOVÝM ROVNICÍM

Funkci R v minulém oddíle ztotožníme s perturbační funkcí. α_j, β_j nechť jsou kanonické elementy z 2,22. Vzhledem k (2) a (3) jsou správné následující rovnosti operátorů

$$\partial(\alpha_1) = 2\, n^{-2}\, a^{-1}\, \partial(a) + n^{-2}\, a^{-2}\, e^{-1} \cos^2 \varphi . \partial(e) - 3(\varepsilon - \pi)\, n^{-2}\, a^{-2}\, \partial(\varepsilon)$$
$$\partial(\alpha_2) = -n^{-1}. a^{-2}. \sec \varphi . \operatorname{cosec} i\ \partial(i)$$
$$\partial(\alpha_3) = -\operatorname{ctg} \varphi\, n^{-1}\, a^{-2}\, \partial(e) + n^{-1}\, a^{-2} \operatorname{ctg} i . \sec \varphi\ \partial(i)$$
$$\partial(\beta_1) = n . \partial(\varepsilon)$$
$$\partial(\beta_2) = \partial(\Omega) + \partial(\pi) + \partial(\varepsilon)$$
$$\partial(\beta_3) = \partial(\pi) + \partial(\varepsilon)$$

kde $\partial(x)$ je zkrácený zápis operátoru $\dfrac{\partial}{\partial x}$.

Derivováním (3) podle času a užitím posledních rovností dostaneme:

$$\dot{a} = 2 . n^{-1}\, a^{-1} . R_\varepsilon$$
$$\dot{e} = -n^{-1}\, a^{-2} . \operatorname{ctg} \varphi . R_\pi - n^{-1}\, a^{-2} . \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} . \cos \varphi\ R_\varepsilon$$
$$\dot{i} = -n^{-1}\, a^{-2} \operatorname{cosec} i . \sec \varphi\ R_\Omega - n^{-1}\, a^{-2} \operatorname{tg} \frac{i}{2} . \sec \varphi\ (R_\pi + R_\varepsilon)$$
$$\dot{\Omega} = n^{-1}\, a^{-2} \sec \varphi \operatorname{cosec} i\ R_i \tag{11}$$
$$\dot{\pi} = n^{-1} a^{-2} \operatorname{tg} \frac{i}{2} \sec \varphi\ R_i + n^{-1}\, a^{-2} \operatorname{ctg} \varphi\ R_e$$
$$\dot{\varepsilon} = -2\, n^{-1}\, a^{-1}\, R_a + n^{-1}\, a^{-2} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} . \cos \varphi\ R_e + n^{-1}\, a^{-2} \operatorname{tg} \frac{i}{2} \sec \varphi\ R_i$$

kde R_x je zkrácený zápis pro $\dfrac{\partial R}{\partial x}$.*)

*) Jinou modifikaci těchto rovnic — viz (4,5).

Formule (11) nazýváme Lagrangeovými rovnicemi. Tyto rovnice nebo jiné s nimi ekvivalentní (v nichž je užito jiné soustavy elementů), jsou výchozími vztahy většiny analytických metod studia perturbací.

Poznámky:

a) Elementy lze rozdělit na dvě trojice: a, e, i; Ω, π, ε. Lagrangeova rovnice pro libovolný element prvé skupiny obsahuje derivace perturbační funkce pouze podle elementů druhé skupiny a naopak. Dále: Je-li X element prvé, Y druhé skupiny, přičemž rovnice pro $\dot{X}$ obsahuje člen $A.R_Y$, potom rovnice pro $\dot{Y}$ obsahuje člen $-A.R_X$. Důvod tohoto faktu je zřejmý z odvození rovnic (11) pomocí kanonicky sdružených elementů.

b) Na poslední rovnici (11) je principielně možno pohlížet dvěma způsoby: Můžeme jednak předpokládat, že λ je vypočteno podle vztahu

$$\lambda = \varepsilon + n\,(t - T) = \varepsilon + k_1.a^{-\frac{3}{2}}\,(t - T).$$

Potom bude $R_a = (R_a) + R_\lambda.\lambda_a = (R_a) - \frac{3}{2}.\frac{n}{a}\,(t - T).R_\lambda$, kde (R_a) je částí R_a, která odpovídá explicitní závislosti perturbační funkce na velké poloose.

Za druhé můžeme předpokládat

$$\lambda = \varepsilon + \int n\,\mathrm{d}t$$

kde n chápeme jako funkci času danou řešením rovnice

$$\dot{n} = -3\,a^{-2}.R_\varepsilon$$

Potom bude $R_a = (R_a)$

c) Aby α_j a β_j byly kanonické elementy, je třeba uvažovat druhý případ z předešlé poznámky. Pro praxi je však prvý případ velmi výhodný. Možnost jeho použití při zachování kanoničnosti elementů řešili Delaunay, Poincaré a jiní. Touto problematikou se budeme zabývat v paragrafu 2,4.

2,25. TRANSFORMACE LAGRANGEOVÝCH ROVNIC NA ROVNICE, OBSAHUJÍCÍ RUŠIVÁ ZRYCHLENÍ

Pro libovolný element A platí:

$$\frac{\partial R}{\partial A} = \nabla R.\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial A}$$

Označme složky rušivého zrychlení ∇R v pravoúhlém souřadném systému F_x, F_y, F_z. Kromě toho zaveďme:

$k^2.S_1$ .... rušivé zrychlení ve směru průvodiče,

$k^2.T_1$ .... rušivé zrychlení kolmé k průvodiči v rovině dráhy,

$k^2.W_1$ .... rušivé zrychlení ve směru normály k rovině dráhy.

Jak známo ze sférické astronomie, platí mezi ortogonálními složkami rušivého zrychlení F_x, F_y, F_z a mezi S_1, T_1, W_1 vztahy:

$$\begin{aligned}
F_x &= k^2 \{S_1 (\cos u.\cos \Omega - \sin u.\sin \Omega.\cos i) + \\
&\quad + T_1 (-\sin u.\cos \Omega - \cos u.\sin \Omega.\cos i) + W_1.\sin \Omega.\sin i\} \\
F_y &= k^2 \{S_1 (\cos u.\sin \Omega + \sin u.\cos \Omega.\cos i) + \\
&\quad + T_1 (-\sin u.\sin \Omega + \cos u.\cos \Omega.\cos i) - W_1.\cos \Omega.\sin i\} \\
F_z &= k^2 \{S_1.\sin u.\sin i + T.\cos u.\sin i + W_1.\cos i\}
\end{aligned} \tag{12}$$

A naopak:

$$\begin{aligned}
k^2.S_1 &= F_x (\cos u.\cos \Omega - \sin u.\sin \Omega.\cos i) + \\
&\quad + F_y (\cos u.\sin \Omega + \sin u.\cos \Omega.\cos i) + F_z.\sin u.\sin i \\
k^2.T_1 &= F_x (-\sin u.\cos \Omega - \cos u.\sin \Omega.\cos i) + \\
&\quad + F_y (-\sin u.\sin \Omega + \cos u.\cos \Omega.\cos i) + F_z.\cos u.\sin i \\
k^2.W_1 &= F_x.\sin \Omega.\sin i - F_y.\cos \Omega.\sin i + F_z.\cos i
\end{aligned} \tag{12)'$$

Dále platí:

$$\begin{aligned}
x &= r(\cos u.\cos \Omega - \sin u.\sin \Omega.\cos i) \\
y &= r(\cos u.\sin \Omega + \sin u.\cos \Omega.\cos i) \\
z &= r.\sin u.\sin i
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \dot{r}.x.r^{-1} + r.\dot{v} (-\sin u.\cos \Omega - \cos u.\sin \Omega.\cos i) \\
\dot{y} &= \dot{r}.y.r^{-1} + r.\dot{v} (-\sin u.\sin \Omega + \cos u.\cos \Omega.\cos i) \\
\dot{z} &= \dot{r}.z.r^{-1} + r.\dot{v}.\cos u.\sin i
\end{aligned} \tag{13)'$$

Problém dvou těles je, jak známo, řešen rovnicemi (viz např. [II]):

$$\begin{aligned}
M &= \varepsilon - \pi + \int_{t_0}^{t} n.\mathrm{d}t\,; \qquad n = k_1.a^{-\frac{3}{2}} \\
E &- e.\sin E = M \\
r &= a(1 - e.\cos E) \\
\operatorname{tg}\frac{1}{2}v &= \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{tg}\frac{1}{2} E \\
u &= v + \pi - \Omega
\end{aligned} \tag{14}$$

Z rovnic (14) vyplývá po jednoduchých úpravách:

$$\begin{aligned}
r_a &= 1 - e.\cos E = \frac{r}{a}\,; \qquad u_a = 0 \\
r_e &= -a.\cos v\,; \qquad v_e = \frac{\sin v}{\cos^2 \varphi}\left(1 + \frac{r}{p}\right) \\
r_\varepsilon &= a.\operatorname{tg} \varphi \sin v\,; \qquad u_\varepsilon = \frac{a^2.\cos \varphi}{r^2}
\end{aligned} \tag{15}$$

Nyní lze určit všechny veličiny $x_a, \ldots, y_\lambda, \ldots$, které obdržíme parciálním derivováním rovnic (13) podle příslušných elementů. Při derivování je nutno pamatovat, že Ω vstupuje do výpočtu jednak přímo, jednak přes u. Podobně u závisí na π explicitně a přes v.

Po jednoduchých, ale zdlouhavých úpravách dostaneme z rovností

$$\frac{\partial R}{\partial a} = \nabla R \cdot \frac{\partial \mathrm{r}}{\partial a}\,; \qquad \frac{\partial R}{\partial e} = \nabla R \cdot \frac{\partial \mathrm{r}}{\partial e}\,; \text{ atd}$$

následující vztahy:

$$\begin{aligned}
R_a &= \frac{n^2a^2r}{1+m}\cdot S_1\\
R_e &= \frac{n^2a^3.\sec\varphi}{1+m}\left[-p.\cos v.S_1 + (r+p)\sin v.T_1\right]\\
R_i &= \frac{n^2a^3r}{1+m}\cdot\sin u.W_1\\
R_\Omega &= -\frac{2\,n^2a^3r}{1+m}\cdot\sin\frac{i}{2}\left[\sin\frac{i}{2}\cdot T_1 + \cos\frac{i}{2}\cdot\cos u.W_1\right]\\
R_\varepsilon &= \frac{n^2a^4.\sec\varphi}{1+m}\left[e.\sin v.S_1 + \frac{p}{r}\cdot T_1\right]\\
R_\pi &= \frac{n^2a^3r}{1+m}\cdot T_1 - R_\varepsilon
\end{aligned} \tag{15)'$$

Dosadíme-li (15)' do (11) obdržíme hledané diferenciální rovnice:

$$\begin{aligned}
\dot a &= \frac{2\,a^3n.\sec\varphi}{1+m}\left[e.\sin v.S_1 + pr^{-1}.T_1\right]\\
\dot e &= \frac{a^2n.\cos\varphi}{1+m}\left[\sin v.S_1 + (\cos v + \cos E)\,T_1\right]\\
\dot i &= \frac{a.n.\sec\varphi}{1+m}\,r.\cos u.W_1\\
\dot\Omega &= \frac{a.n.\sec\varphi.\mathrm{cosec}\,i}{1+m}\cdot r.\sin u\,W_1\\
\dot\pi &= \frac{a^2.n.\mathrm{ctg}\,\varphi}{1+m}\left[-\cos v\,S_1 + \left(1+\frac{r}{p}\right)\cdot\sin v.T_1\right] + 2.\sin^2\frac{i}{2}\cdot\dot\Omega\\
\dot\varepsilon &= -\frac{2\,an\,r}{1+m}\,S_1 + 2.\sin^2\frac{i}{2}\cdot\cos\varphi.\dot\Omega + 2.\sin^2\frac{\varphi}{2}\cdot\dot\pi
\end{aligned} \tag{16}$$

Poznámky:

a) Rovnice pro střední délku λ se liší od rovnice pro střední délku epochy ε o člen $-\frac{3}{2}\int\frac{n}{a}\,\dot a\,\mathrm{d}t$.

b) Někdy se zavádí délka perihelu χ vůči pevnému bodu v pohyblivé rovině dráhy. Je zřejmé, že rovnici pro χ dostaneme z rovnice pro π, vynecháme-li posledního sčítance.

c) Z dosavadního postupu vyplývá, že (16) nejsou obecnější než (11). V dalším však uvidíme, že (16) platí v tomtéž tvaru i tehdy, neexistuje-li potenciál soustavy. Je to analogie případu, kdy z Keplerových zákonů odvodíme Newtonův zákon, přičemž zpětným postupem dostaneme výchozí vztahy jako speciální případ. Viz rovněž (1,6).

d) Působí-li jediná rušící planeta, můžeme při určování S_1, T_1, W_1 postupovat takto: Zvolme souřadnicovou soustavu tak, aby osy x a y ležely v rovině rušeného tělesa. Rušící planeta nechť má hmotu m' a souřadnice x', y', z'; Δ nechť je vzdálenost obou planet. Potom platí:

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \frac{m'}{r}\left(\frac{xx' + yy' - r^2}{\Delta^3} - \frac{r^2}{r'^3}\right) \\
T_1 &= \frac{m'}{r}\cdot\frac{xy' - yx'}{\Delta^3} \\
W_1 &= m'\frac{z'}{\Delta^3}
\end{aligned}
\qquad (17)
$$

Důkaz:

Podle (1,7) jest $R = k^2.m'\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{xx' + yy'}{r'^3}\right)$. Je zřejmé, že S_1 je rovno skalárnímu součinu tečného vektoru $\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, 0\right)$ s vektorem $k^{-2}..\nabla R$.

Protože

$$k^{-2}.\nabla' R = m'\left(\frac{x' - x}{\Delta^3} - \frac{x}{r'^3}\,;\; \frac{y' - y}{\Delta^3} - \frac{y}{r'^3}\,;\; \frac{z'}{\Delta^3}\right)$$

je prvé tvrzení dokázáno. Další dva vztahy se dokážou analogicky.

2,3. JINÁ ODVOZENÍ LAGRANGEOVÝCH ROVNIC

Tento paragraf jsem do pojednání zařadil proto, že obsahuje velmi důležité postupy, které se uplatňují i mimo nebeskou mechaniku.

2,31. UŽITÍ VLASTNOSTÍ OSKULAČNÍCH KŘIVEK

Vyjdeme z rovnic (1,6)', které můžeme pro náš případ napsat ve tvaru

$$\ddot{\mathbf{r}} + \frac{k_1^2}{r^3}\mathbf{r} = \mathbf{F}$$

Zkoumejme nyní libovolnou funkci

$$\Psi(a, \ldots\ldots, \varepsilon, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = 0 \qquad (18)$$

která je diferencovatelná podle všech proměnných. Při rušeném pohybu dostaneme pro totální derivaci funkce Ψ podle času výraz

$$\Psi_a.\dot{a} + \ldots. + \Psi_\varepsilon.\dot{\varepsilon} + \nabla\Psi.\dot{\mathbf{r}} + \dot{\nabla}\Psi.\ddot{\mathbf{r}} + \Psi_t = 0 \qquad (19)$$

kde $\dot{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial\dot{x}}, \frac{\partial}{\partial\dot{y}}, \frac{\partial}{\partial\dot{z}}\right)$, $\Psi_a = \frac{\partial\Psi}{\partial a}$, atd.

Pro nerušený pohyb bude platit:

$$\nabla\Psi.\dot{\mathbf{r}}_0 + \dot{\nabla}\Psi.\ddot{\mathbf{r}}_0 + \Psi_t = 0 \tag{19}$$

Poněvadž vlastností oskulačních křivek je rovnost tečných vektorů (rychlostí), musí platit vzhledem k úvodní rovnici tohoto oddílu:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0; \quad \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_0; \quad \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_0 + \mathbf{F}$$

Proto ze srovnání (19) a (19)′ vyplývá:

$$\Psi_a.\dot{a} + \ldots\ldots + \Psi_\varepsilon.\dot{\varepsilon} + \dot{\nabla}\Psi.\mathbf{F} = 0 \tag{20}$$

Přechod od (18) k (20) nazývá Subbotin základní operací. Její aplikací na vhodné integrály problém dvou těles dostaneme rovnice formálně identické s (16), které však ukazují oprávněnost poznámky c) v oddíle 2,25, neboť v (1,6)′ není existence potenciálu soustavy vůbec předpokládána.

Nyní ve stručnosti naznačíme, jak se při aplikaci operátoru (20) v konkrétních případech postupuje.

1. Vyjděme z integrálu energie:

$$k_1^2\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) - \dot{\mathbf{r}}.\dot{\mathbf{r}} = 0 \tag{21}$$

Použitím (20) dostaneme

$$\dot{a} = \frac{2a^2}{k_1^2}\dot{\mathbf{r}}.\mathbf{F}$$

Odtud s pomocí (12), (13)′ a známých vztahů

$$\begin{aligned} \dot{v} &= k_1.p^{\frac{1}{2}}.r^{-2} \\ \dot{r} &= k_1.p^{-\frac{1}{2}}.e.\sin v \quad *) \end{aligned} \tag{22}$$

obdržíme po jednoduchých úpravách:

$$\dot{a} = \frac{2\,a^3n.\sec\varphi}{1+m}(e.\sin v.S_1 + p.r^{-1}.T_1)$$

2. Z (13), (13)′ a (21) dostaneme po úpravách

$$\begin{aligned} y.\dot{z} - z.\dot{y} &= k_1.p^{\frac{1}{2}}.\sin i.\sin \Omega \\ x.\dot{z} - z.\dot{x} &= k_1.p^{\frac{1}{2}}.\sin i.\cos \Omega \\ x.\dot{y} - y.\dot{x} &= k_1.p^{\frac{1}{2}}.\cos i \end{aligned}$$

Aplikací základní operace na tyto vztahy získáme s pomocí rovnice pro velkou poloosu diferenciální rovnice pro e, i.

3. Rovnici pro vzdálenost perihelu ω lze nalézt takto: Z (13), (22) atd můžeme odvodit:

$$r.\cos u = x.\cos \Omega + y.\sin \Omega$$

Použitím základní operace obdržíme:

$$-\sin u[(\dot{v}) + \dot{\omega}] = (-x.\sin \Omega + y.\cos \Omega)\,\dot{\Omega}$$

*) Prvý vztah je Keplerův zákon, druhý dostaneme derivováním rovnice $r = p.(1 + e.\cos v)^{-1}$ podle času a užitím prvé formule.

Odkud s pomocí (13) lze odvodit:

$$\dot{\omega} = -(\dot{v}) - \cos i\,.\,\dot{\Omega} \tag{23}$$

K určení $(\dot{v})$ nelze užít prvé rovnice (22), nebot symbolem $(\dot{v})$ je označena změna pravé anomálie odpovídající časovým změnám elementů, kdežto $\dot{v}$ je časovou změnou v jakožto souřadnice. Z druhého vztahu (22) a z rovnice kuželosečky $r = p\,.\,(1 + e\,.\cos v)^{-1}$ však vyplývá:

$$r\,.\,\dot{r}\,.\,\mathrm{ctg}\, v = (x\,.\,\dot{x} + y\,.\,\dot{y} + z\,.\,\dot{z})\,.\,\mathrm{ctg}\, v = k_1\,.\,p^{\frac{1}{2}} - k_1\,.\,p^{-\frac{1}{2}}\,.\,r$$

Provedeme-li základní operaci s touto rovností, dostaneme po úpravách

$$(\dot{v}) = \frac{na^2\,.\,\mathrm{ctg}\,\varphi}{1 + m}\,[-\cos v\,.\,S_1 + (1 + r\,.\,p^{-1})\,.\sin v\,.\,T_1]$$

Z posledního vztahu, z (23) a z identity $\pi = \omega + \Omega$ obdržíme diferenciální rovnic pro π.

4. Použijme základní operaci na Keplerovu rovnici a na vztah $r = a\,(1 - e\,.\cos E)$! Platí:

$$(\dot{M}) = (\dot{E})\,.\,(1 - e\,.\cos E) - \dot{e}\,.\sin E$$

$$(1 - e\,.\cos E)\,.\,\dot{a} = -a\,.\,e\,.\sin E\,.\,(\dot{E}) + a\,.\,\dot{e}\,.\cos E$$

Po vyloučení $(\dot{E})$ a jednoduchých úpravách obdržíme:

$$\mathrm{tg}\,\varphi\,.\,(\dot{M}) = \mathrm{ctg}\, v\,.\,\dot{e} - r\,.\,a^{-2}\,.\,\mathrm{cosec}\, v\,.\,\dot{a}$$

Neboli:

$$(\dot{M}) = \frac{n\,.\,a\,.\,\mathrm{cosec}\,\varphi}{1 + m}\,[(p\,.\cos v - 2\,.\,e\,.\,r)\,.\,S_1 - (r + p)\,.\sin v\; T_1] \;\; {}^{*})$$

Vzhledem k poznámce c) v oddíle 2, 24 platí:

$$M = M_0 + \int n\,.\,\mathrm{d}t$$

kde druhý člen je funkcí pouze času. Proto $(\dot{M}) = \dot{M}_0$. Tím je problém rozřešen, neboť ze vztahu $\dot{\varepsilon} = \dot{M}_0 + \dot{\pi}$ a z (24) vyplývá diferenciální rovnice pro ε.

Za zobecněných předpokladů jsme naznačili odvození rovnic (16). Existuje-li potenciální funkce, můžeme z (16) opačným postupem než v 2,24 odvodit Lagrangeovy rovnice. Postup je principielně jednoduchý, ale nic nového nepřináší. Proto se jím nebudeme zabývat.

2,32. LAGRANGEŮV ZPŮSOB

Lagrange přistupuje k problematice z mnohem obecnějšího hlediska a jeho postup má uplatnění i v mnoha jiných oborech mechaniky (a nejen mechaniky).

Mějme $2h$ vektorových funkcí $\mathbf{r}_s$, $\mathbf{r}'_s$! Dále mějme vektorové funkce $\mathbf{G}_s$ a $\mathbf{G}'_s$ a skalární funkci Ω proměnných $\mathbf{r}_s$, $\mathbf{r}'_s$ a času. Nechť platí:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_s}{\mathrm{d}t} - \nabla'_s\Omega - \mathbf{G}'_s &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}'_s}{\mathrm{d}t} + \nabla_s\Omega + \mathbf{G}_s &= 0 \end{aligned} \tag{25}$$

*) Při odvozování se užívá vztahů $r\,.\cos v = a\,(\cos E - e)$; $r\,.\sin v = a\,.\cos\varphi\,.\sin E$, z nichž vyplývá identita $r\,.\cos v \cos E = a\,(1 - \frac{r}{p}\sin^2 v)$.

Předpokládejme, že se nám podařilo integrovat kanonickou soustavu

$$\frac{d\mathbf{r}_s}{dt} - \nabla'_s \Omega = 0$$

$$\frac{d\mathbf{r}'_s}{dt} + \nabla_s \Omega = 0 \tag{26}$$

jejíž řešení můžeme psát ve tvaru

$$\mathbf{r}_s = \mathbf{r}_s\,(t,\, b_j) \tag{27}$$

$$\mathbf{r}'_s = \mathbf{r}'_s\,(t,\, b_j)$$

kde b_j ($j = 1, \dots 6h$) jsou integrační konstanty.

Hledejme řešení (25) ve tvaru (27), přičemž b_j budou vhodně zvolené funkce času. Platí:

$$\frac{d\mathbf{r}_s}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}_s}{\partial t} + \sum_{j=1}^{6h} A_{sj} \frac{db_j}{dt} \tag{28}$$

$$\frac{d\mathbf{r}'_s}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}'_s}{\partial t} + \sum_{j=1}^{6h} A'_{sj} \frac{db_j}{dt}$$

kde A_{sj} jsou veličiny tensorového charakteru vzniklé derivováním $\mathbf{r}_s$ podle b_j. Poněvadž vzhledem k (26) a (27) musí být:

$$\frac{\partial \mathbf{r}_s}{\partial t} - \nabla'_s \Omega = 0\,; \qquad \frac{\partial \mathbf{r}'_s}{\partial t} + \nabla_s \Omega = 0$$

obdržíme po dosazení (28) do (25) soustavu rovnic:

$$\sum_{j=1}^{6h} A_{sj} \frac{db_j}{dt} - \mathbf{G}'_s = 0 \tag{29}$$

$$\sum_{j=1}^{6h} A'_{sj} \frac{db_j}{dt} + \mathbf{G}_s = 0$$

kterou lze přetransformovat na tvar

$$\sum_{l=1}^{6h} [b_j,\, b_l] \frac{db_l}{dt} + V_j = 0 \tag{30}$$

kde

$$[b_l,\, b_j] = \sum_{s=1}^{h} (A_{sj}\, A'_{sl} - A_{sl}\, A'_{sj}) \tag{31}$$

jsou Lagrangeovy závorky a

$$V_j = -\sum_{s=1}^{h} (\mathbf{G}_s\, A_{sj} + \mathbf{G}'_s\, A'_{sj}) \tag{32}$$

Soustava rovnic (30) je ekvivalentní se vztahy:

$$\frac{db_j}{dt} + \sum_{l=1}^{6h} (b_j, b_l)\, V_l = 0 \qquad (33)$$

kde (b_j, b_l) jsou Poissonovy závorky.

Z mechaniky je známo, že Poissonovy závorky můžeme určit ze vztahu:

$$\sum_{\alpha=1}^{6h} (b_j, b_\alpha).[b_\alpha, b_l] = \delta_{jl}$$

kde symbolem δ_{jl} je označen Kroneckerův homogenní tensor, který pro $j = l$ nabývá hodnoty 1 a ve všech ostatních případech je roven nule. Z poslední formule vyplývá:

$$\begin{vmatrix} [b_1, b_1], \ldots, [b_1, b_{2h}] \\ [b_2, b_1], \ldots, [b_2, b_{2h}] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ [b_{2h}, b_1], \ldots, [b_{2h}, b_{2h}] \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} (b_1, b_1), \ldots, (b_1, b_{2h}) \\ (b_2, b_1), \ldots, (b_2, b_{2h}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (b_{2h}, b_1), \ldots, (b_{2h}, b_{2h}) \end{vmatrix} = 1 \qquad (34)$$

Nyní aplikujme dosavadní teorii na rušený pohyb nebeských těles.

Položme:

$$\frac{d\mathbf{r}_s}{dt} = \mathbf{r}'_s \qquad \frac{d\mathbf{r}'_s}{dt} = -\, k_1^2 \frac{\mathbf{r}_s}{r_s^3} + \boldsymbol{V}_s R_s$$

$$\Omega = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{h} \mathbf{r}'_s \mathbf{r}'_s - \sum_{s=1}^{h} \frac{k_1^2}{r_s}$$

Pro $R = O$ získáme řešení nerušeného pohybu, při němž soustavou integračních konstant mohou být např. elemenety a_s, e_s, i_s, ω_s, Ω_s, M_{0s}. K nalezení Lagrangeových rovnic stačí určit hodnoty Lagrangeových závorek pro elementy eliptického pohybu a rovnicemi (33), (34), (35) a

$$V_1 = -\sum \boldsymbol{V}_s R_1 \frac{\partial \mathbf{r}_s}{\partial a_1} = -\frac{\partial R_1}{\partial a_1}, \ldots, V_6 = -\frac{\partial R_1}{\partial M_{01}}\,;\; V_7 = \frac{\partial R_2}{\partial a_2}, \ldots \qquad (36)$$

je úloha rozřešena.

Po zdouhavých výpočtech lze nalézt:

$$[a, e] = 0; \quad [a, i] = 0; \quad [a, \Omega] = -\tfrac{1}{2}\, n.a.\cos\varphi.\cos i$$
$$[a, \omega] = -\tfrac{1}{2}\, n.a.\cos\varphi; \quad [a, M_0] = -\tfrac{1}{2}\, n.a$$
$$[e, i] = 0; \quad [e, \Omega] = n.a^2.\mathrm{tg}\,\varphi.\cos i$$
$$[e, \omega] = n.a^2.\mathrm{tg}\,\varphi; \quad [e, M_0] = 0$$
$$[i, \Omega] = n.a^2.\cos\varphi.\sin i; \quad [i, \omega] = 0; \quad [i, M_0] = 0$$
$$[\Omega, \omega] = 0; \quad [\Omega, M_0] = 0; \quad [\omega, M_0] = 0$$

Tím je problém nalezení diferenciálních rovnic pro oskulační elementy třemi způsoby rozřešen. Integrací Lagrangeových rovnic popř. rovnic (16) se budeme zabývat v příštích kapitolách.

2,4. JINÉ SOUSTAVY KANONICKÝCH ELEMENTŮ

Kanonické elementy α_j, β_j ze vztahů (2) mají tu nevýhodu, že nelze použít prvý případ v poznámce b) oddílu 2,24. Proto se mnozí matematikové snažili, aby bylo možno užít vztahu $\lambda = \varepsilon + n(t - t_0)$ při zachování kanoničnosti elementů. Byla zkonstruována celá řada soustav, z nichž některé uvedeme.

2,41. DELAUNAYŮV SYSTÉM

DELAUNAY zavedl elementy:

$$\begin{aligned} L &= k_1 . a^{\frac{1}{2}} ; & l &= n(t - T) \\ G &= k_1 . a^{\frac{1}{2}} . \cos\varphi ; & g &= \pi - \Omega = \omega \\ H &= k_1 . a^{\frac{1}{2}} . \cos\varphi . \cos i ; & h &= \Omega \end{aligned} \tag{37}$$

Platí:

Soustava (37) je kanonická:

Důkaz:

Podle (2) platí transformační formule:

$$\begin{aligned} L &= k_1^2 (-2\alpha_1)^{\frac{1}{2}} ; & G &= \alpha_3 ; & H &= \alpha_2 \\ l &= k_1^{-2}(-2\alpha_1)^{\frac{3}{2}} . (t + \beta_1) ; & g &= \beta_3 ; & h &= \beta_2 \end{aligned}$$

K zachování kanonické formy stačí, aby byl výraz $\beta_1 . \mathrm{d}\alpha_1 - l . \mathrm{d}L$. totálním diferenciálem. Ale:

$$\begin{aligned} \beta_1 . \mathrm{d}\alpha_1 - l . \mathrm{d}L &= \beta_1 \mathrm{d}\alpha_1 - k_1^{-2} (-2\alpha_1)^{\frac{3}{2}} (t + \beta_1) k_1^2 (-2\alpha_1)^{-\frac{3}{2}} \mathrm{d}\alpha_1 \\ &= -t . \mathrm{d}\alpha_1 = -\mathrm{d}(t . \alpha_1) \end{aligned}$$

Proto můžeme napsat:

$$\begin{aligned} \dot{L} &= \frac{\partial R_D}{\partial l} ; & \dot{l} &= -\frac{\partial R_D}{\partial L} \\ \dot{G} &= \frac{\partial R_D}{\partial g} ; & \dot{g} &= -\frac{\partial R_D}{\partial G} \\ \dot{H} &= \frac{\partial R_D}{\partial h} ; & \dot{h} &= -\frac{\partial R_D}{\partial H} \end{aligned}$$

kde Delaunayova perturbační funkce má tvar

$$R_D = R - \alpha_1 = R + \frac{k_1^4}{L^2} = R + \frac{k_1^2}{2a} \tag{39}$$

Poznámky:

a) Delaunayovy elementy jsou voleny velmi symetricky. Veličiny označované velkými písmeny mají vesměs rozměr momentu hybnosti, „malá písmena“ — úhel (což vyplývá z kanonické sdruženosti).

b) Z (39) je vidět, že Delaunayův tvar perturbační funkce dostaneme z (1,7), připočteme-li polovinu absolutní hodnoty celkové energie rušeného tělesa.

2,42. PRVÁ POINCARÉHO SOUSTAVA

POINCARÉ zavádí elementy:

$$\begin{aligned} L &= k_1 a^{\frac{1}{2}} ; & \lambda &= M + \pi = n.t + \varepsilon \\ \varrho_1 &= 2.k_1.a^{\frac{1}{2}}.\sin^2 \frac{\varphi}{2} ; & \omega_1 &= -\pi \\ \varrho_2 &= 2.k_1.a^{\frac{1}{2}}.\cos \varphi.\sin^2 \frac{i}{2} ; & \omega_2 &= -\Omega \end{aligned} \tag{40}$$

Soustava (40) je kanonická.
Důkaz:
Mezi (37) a (40) platí vztahy:

$$\begin{aligned} L &= L ; & \varrho_1 &= L - G ; & \varrho_2 &= G - H \\ \lambda &= l + g + h ; & \omega_1 &= -g - h ; & \omega_2 &= -h \end{aligned}$$

Odkud lehce zjistíme

$$l.\mathrm{d}L + g.\mathrm{d}G + h.\mathrm{d}H - \lambda.\mathrm{d}L - \omega_1.\mathrm{d}\varrho_1 - \omega_2.\mathrm{d}\varrho_2 = 0$$

Poznámka:
Z předešlého důkazu je vidět, že při užití této soustavy má perturbační funkce Delaunayův tvar daný rovnicí (39)

2,43. DRUHÁ POINCARÉHO SOUSTAVA

Definujme elementy:

$$\begin{aligned} L &= L ; & \lambda &= \lambda \\ \xi_1 &= (2.\varrho_1)^{\frac{1}{2}}.\cos \omega_1 ; & \eta_1 &= (2.\varrho_1)^{\frac{1}{2}}.\sin \omega_1 \\ \xi_2 &= (2.\varrho_2)^{\frac{1}{2}}.\cos \omega_2 ; & \eta_2 &= (2.\varrho_2)^{\frac{1}{2}}.\sin \omega_2 \end{aligned} \tag{41}$$

Podobně jako v minulých oddílech bychom dokázali, že soustava (41) je kanonická (představuje jakési „otočení“ vzhledem k prvé soustavě) a že perturbační funkce má Delaunayův tvar. Elementy (41) se hodí zvláště pro malé excentricity a sklony, neboť v tomto případě jsou veličiny ξ a η téhož řádu.

3. kapitola

ROZVOJE PERTURBAČNÍ FUNKCE V ŘADY A JEJICH VLASTNOSTI

3,1 ROZVOJE POMOCÍ KANONICKÝCH ELEMENTŮ

V prvé kapitole jsme odvodili rovnice (1,6). Označme T kinetickou energii soustavy a položme $H_j = T - U_j$! Potom můžeme místo (1,6) napsat:

$$m_j.\dot{\mathbf{r}}_j = \dot{\nabla}_j.H_j ; \qquad m_j.\ddot{\mathbf{r}}_j = -\nabla_j H_j$$

kde

$$U_j = \frac{k^2 (m_0 + m_j)\, m_j}{r_j} + m_j R_j$$

Neboli:

$$\dot{\mathbf{r}}_j = \nabla'_j H_j\,; \qquad \dot{\mathbf{s}}_j = -\nabla_j H_j \tag{1}$$

kde

$$\nabla_j = \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\,;\ \frac{\partial}{\partial y_j}\,;\ \frac{\partial}{\partial z_j}\right); \qquad \dot{\nabla}_j = \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}_j}\,;\ \frac{\partial}{\partial \dot{y}_j}\,;\ \frac{\partial}{\partial \dot{z}_j}\right)$$

$$\mathbf{s}_j = m_j . \dot{\mathbf{r}}_j\,; \qquad \nabla'_j = \left(\frac{\partial}{\partial s_{xj}}\,;\ \frac{\partial}{\partial s_{yj}}\,;\ \frac{\partial}{\partial s_{zj}}\right)$$

Rovnice (1) nelze nazvat kanonickými v obvyklém slova smyslu, neboť každá ze souřadnic má jinou Hamiltonovu funkci. POINCARÉ nazývá rovnice tohoto typu s e m i k a n o n i c k ý m i. Z tohoto důvodu bude pro obecné úvahy výhodné zavést Jacobiho souřadnice.

3,11 APLIKACE JACOBIHO SOUŘADNIC

Vyjdeme z rovnic (1,13), které je možno vyjádřit v kanonické formě:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_j &= {}^{p}\nabla_j H\,; \\ \dot{\mathbf{p}}_j &= -{}^{q}\nabla_j H \end{aligned} \tag{2}$$

kde $\mathbf{p}_j$ je zobecněný impuls j-tého bodu,

$${}^{p}\nabla_j = \left(\frac{\partial}{\partial p_{xj}}\,;\ \frac{\partial}{\partial p_{yj}}\,;\ \frac{\partial}{\partial p_{zj}}\right);$$

$${}^{q}\nabla_j = \left(\frac{\partial}{\partial q_{xj}}\,;\ \frac{\partial}{\partial q_{yj}}\,;\ \frac{\partial}{\partial q_{zj}}\right)$$

přičemž index x značí složku ve směru osy x atd,

$$H = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\mu_j}\,\mathbf{p}_j \mathbf{p}_j - U.$$

H je Hamiltonova funkce, U potenciální energie soustavy.

Budeme nyní hledat řešení rovnic (2) ve smyslu úvah z 1. kapitoly. K odvození potřebných vztahů použijeme Poincarého soustav kanonických elementů

$$L_j,\ \lambda_j;\quad \varrho_{j,1};\ \varrho_{j,2};\quad \omega_{j,1},\ \omega_{j,2}$$
$$L_j,\ \lambda_j;\quad \xi_{j,1};\ \xi_{j,2};\quad \eta_{j,1},\ \eta_{j,2}$$

které jsme definovali vztahy (2,40) a (2,41).

Pro zjednodušení zavedeme označení

$$\xi_{1,j} = \xi_{2j-1}\,; \qquad \xi_{2,j} = \xi_{2j} \tag{3}$$

a zcela obdobně pro veličiny η, ϱ, ω. Dále uděláme úmluvu, že indexy j, h,... (písmena latinky) budou nabývat hodnot 1, 2, ..., n — 1, kdežto indexy α, β, ... (řecká písmena) budou nabývat hodnot 1, 2, ..., 2n — 2.

Při takto zvoleném fázovém prostoru můžeme říci, že zkoumáme problém charakterisovaný elementy

$$L_j,\ \lambda_j;\quad \varrho_\alpha,\ \omega_\alpha, \text{ popřípadě } L_j,\ \lambda_j;\quad \xi_\alpha,\ \eta_\alpha.$$

Budeme hledat řešení ve tvaru:

$$\begin{aligned} \mathfrak{q}_j &= \mathfrak{q}_j\,(t, L_h, \lambda_h, \varrho_\alpha, \omega_\alpha) \quad \text{popřípadě} \quad \mathfrak{q}_j = \mathfrak{q}_j\,(t, L_h, \lambda_h, \xi_\alpha, \eta_\alpha) \\ \mathfrak{p}_j &= \mathfrak{p}_j\,(t, L_h, \lambda_h, \varrho_\alpha, \omega_\alpha) \quad \ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{4}$$

Prvou aproximací bude řešení problému dvou těles. Dále budeme postupovat metodou variace konstant. Poněvadž obě Poincarého soustavy jsou kanonické, dostaneme druhou aproximaci z rovnic

$$\begin{aligned} \dot{L}_j &= \frac{\partial R^*}{\partial \lambda_j} = \frac{\partial R}{\partial \lambda_j}\,; & \dot{\lambda}_j &= -\frac{\partial R^*}{\partial L_j} = -\frac{\partial R}{\partial L_j} - \frac{\partial R_0}{\partial L_j} \\ \dot{\varrho}_\alpha &= \frac{\partial R^*}{\partial \omega_\alpha} = \frac{\partial R}{\partial \omega_\alpha}\,; & \dot{\omega}_\alpha &= -\frac{\partial R^*}{\partial \varrho_\alpha} = -\frac{\partial R}{\partial \varrho_\alpha} \end{aligned} \tag{5}$$

popřípadě

$$\dot{\xi}_\alpha = \frac{\partial R^*}{\partial \eta_\alpha} = \frac{\partial R}{\partial \eta_\alpha}\,; \qquad \dot{\eta}_\alpha = -\frac{\partial R^*}{\partial \xi_\alpha} = -\frac{\partial R}{\partial \xi_\alpha}$$

kde

$$R^* = R + R_0 = R + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1} \frac{k_j^4}{L_j^2}$$

$$k_j^2 = k^2\,\frac{m_0(m_0 + \ldots + m_j)}{m_0 + \ldots + m_{j-1}} = \frac{k^2\,m_0\,m_j}{\mu_j}$$

R je perturbační funkce, která nám v tomto případě charakterisuje, do jaké míry se při použití Jacobiho souřadnic odchyluje daný pohyb od keplerovského pohybu. Poněvadž pro n > 2 nelze rovnice (2) řešit přímo, je třeba nalézt rozvoj perturbační funkce a potom řešit (2,11). Dříve, než přejdeme k této problematice, vyjádříme některé důležité vztahy pomocí kanonických elementů.

3,12 INTEGRÁLY PLOCH (MOMENTU HYBNOSTI)

Podle (1,14), (2,37) a známých vztahů můžeme psát:

$$\sum_{j=1}^{n-1} \mu_j\,(q_{jy}.\dot{q}_{jz} - q_{jz}.\dot{q}_{jy}) = \sum_{j=1}^{n-1} \mu_j\,G_j.\sin i_j.\sin \Omega_j = K_1$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} \mu_j\,(q_{jz}.\dot{q}_{jx} - q_{jx}.\dot{q}_{jz}) = -\sum_{j=1}^{n-1} \mu_j\,G_j.\sin i_j.\cos \Omega_j = K_2$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} \mu_j (q_{jx} . \dot{q}_{jy} - q_{jy} . \dot{q}_{jx}) = \sum_{j=1}^{n-1} \mu_j G_j . \cos i_j = K_3$$

kde i_j a jiné veličiny známé z problému dvou těles značí oskulační elementy.

Poznámka:

Uvedené postupy se většinou aplikují na pohyby těles ve sluneční soustavě, kde hmotný střed Slunce a libovolné skupiny planet prakticky splývá se Sluncem. Proto $\mu_j \doteq m_j$, takže můžeme s velmi dobrou přesností užít dalšího postupu. Pokud však neplatí $m_0 \gg \sum_{j=1}^{n-1} m_j$, nabývají oskulační elementy poněkud jiného významu, než na jaký jsme „zvyklí“.

Z (2,3), (2,37), (2,40) a (2,41) lehce nalezneme:

$$G_j . \sin i_j . \sin \Omega_j = - \eta_{2j} (L_j - \varrho_{2j-1} - \tfrac{1}{2} \varrho_{2j})^{\frac{1}{2}}$$
$$- G_j . \sin i_j . \cos \Omega_j = - \xi_{2j} (L_j - \varrho_{2j-1} - \tfrac{1}{2} \varrho_{2j})^{\frac{1}{2}}$$
$$G_j . \cos i_j = L_j - \varrho_{2j-1} - \varrho_{2j}$$

takže můžeme napsat zákon ploch ve tvaru

$$\begin{aligned} -\sum_{j=1}^{n-1} \mu_j \eta_{2j} \left(L_j - \varrho_{2j-1} - \frac{1}{2} \varrho_{2j}\right)^{\frac{1}{2}} &= K_1 \\ -\sum_{j=1}^{n-1} \mu_j \xi_{2j} \left(L_j - \varrho_{2j-1} - \frac{1}{2} \varrho_{2j}\right)^{\frac{1}{2}} &= K_2 \qquad (6) \\ \sum_{j=1}^{n-1} \mu_j (L_j - \varrho_{2j-1} - \varrho_{2j}) &= K_3 \end{aligned}$$

Z rovnic (6) můžeme odvodit důležitý důsledek: Zvolme n $= 3$ a neměnná rovina Laplaceova nechť je rovnoběžná s rovinou $q_z = 0$. Potom $K_1 = K_2 = 0$ a z rovnic (2,40) a (2,41) vyplývá:

$$\operatorname{tg} \Omega_1 = \operatorname{tg} \Omega_2$$

což můžeme slovy vyjádřit takto: **Průsečnice oskulačních rovin dvou planet je rovnoběžná s neměnnou rovinou Laplaceovou.** Tento vztah nazýváme **Jacobiho vyloučením uzlů.**

3,13 ROZVOJE PRAVOÚHLÝCH SOUŘADNIC

Budeme nyní hledat vyjádření perturbační funkce pomocí mocninných řad vzhledem ke kanonickým elementům. Prvým naším problémem bude rozvoj pravoúhlých souřadnic v řady. Podle (2,13) a zobecněných vztahů (2,40) můžeme psát:

$$
\begin{aligned}
q_{jx} &= Q_{jx}\,[\cos^2 \tfrac{1}{2} i_j . \cos \lambda_j + \sin^2 \tfrac{1}{2} i_j . \cos (\lambda_j - 2\,\Omega_j)] - \\
&- Q_{jy}\,[\cos^2 \tfrac{1}{2} i_j . \sin \lambda_j + \sin^2 \tfrac{1}{2} i_j . \sin (\lambda_j - 2\,\Omega_j)] \\
q_{jy} &= Q_{jx}\,[\cos^2 \tfrac{1}{2} i_j . \sin \lambda_j - \sin^2 \tfrac{1}{2} i_j . \sin (\lambda_j - 2\,\Omega_j)] + \\
&+ Q_{jy}\,[\cos^2 \tfrac{1}{2} i_j . \cos \lambda_j - \sin^2 \tfrac{1}{2} i_j . \cos (\lambda_j - 2\,\Omega_j)] \\
q_{jz} &= Q_{jx} . \sin i_j . \sin (\lambda_j - \Omega_j) + Q_{jy} . \sin i_j . \cos (\lambda_j - \Omega_j)
\end{aligned}
\qquad (7)
$$

kde

$$Q_{jx} = r_j . \cos (v_j - M_j)\,; \qquad Q_{jy} = r_j . \sin (v_j - M_j)$$

přičemž zobecnění spočívá v tom, že místo k^2 je nutno brát výraz $*k_j^2 = k^2 (m_0 + \ldots + m_j)$. Význam veličin M_j atd je uveden na konci pojednání.

Vztahů (7) užijeme k důkazu věty:

Každou pravoúhlou souřadnici lze rozložit v řadu

$$\sum A . \varrho_1^{\alpha_1} \varrho_2^{\alpha_2} . \cos (s . \lambda + \beta_1 \omega_1 + \beta_2 \omega_2 + H) \qquad (8)$$

kde indexy j u veličin L, λ, ϱ, ω jsou pro jednoduchost vynechány. Sčítácí indexy $\beta_1, \beta_2, \ldots$ mohou nabývat hodnot $0, 1, \ldots, \infty$. α_1, α_2 mohou být rovny $0, \frac{1}{2}, 1, \ldots, \infty$. Koeficienty A závisí na L a sčítacích indexech. H jsou konstanty.

Poznámka:

V dalším budeme vždy mlčky předpokládat absolutní a stejnoměrnou konvergenci všech zkoumaných řad. Otázka, až do jakých mezí jsou metody, jimiž se budeme zabývat, použitelné, je velmi složitá a částečně se jí věnujeme v kap. V. Bezesporu jsou však další metody dobře upotřebitelné ve sluneční soustavě, kde excentricity a vzájemné sklony jsou malé veličiny.

3,131. Důkaz tvrzení (8)

Důkaz si rozdělíme na tři části.

1. Koeficienty u Q_x a Q_y mohou být rozloženy v řadu mocnin ϱ_1 a ϱ_2. Mocnitelé jsou nezáporné celočíselné násobky jedné poloviny. Koeficienty u jednotlivých členů jsou závislé na L a jsou periodickými funkcemi λ. Poslední tvrzení však je zřejmé vzhledem k (7) a v důsledku identit:

$$\sin^2 \frac{i}{2} = \frac{\varrho_2}{2\,(L - \varrho_1)} \qquad \cos^2 \frac{i}{2} = \frac{2\,L - 2\,\varrho_1 - \varrho_2}{2\,(L - \varrho_1)}$$

$$\sin i = \frac{[\varrho_2\,(2\,L - 2\,\varrho_1 - \varrho_2)]^{\frac{1}{2}}}{L - \varrho_1} \qquad \cos i = \frac{L - \varrho_1 - \varrho_2}{L - \varrho_1}$$

$$\sin \Omega = -\sin \omega_2 \qquad \cos \Omega = \cos \omega_2$$

$$\sin 2\,\Omega = -\sin 2\,\omega_2 \qquad \cos 2\,\Omega = \cos 2\,\omega_2$$

které okamžitě vyplývají z (2,40). Každou z právě uvedených funkcí můžeme rozvést v řadu nezáporných mocnin ϱ_1, ϱ_2 a $\cos (\nu_0\,\omega_2 + C)$ s koeficienty závislými na L, které nezávisí na střední délce λ (jsou její periodickou funkcí s periodou rovnou nule), což bylo dokázat (cbd).

2) Budeme zkoumat výrazy pro Q_x a Q_y... Poněvadž podle (5, 15) platí:

$$\exp(\sqrt{-1}\,E) = -\frac{1}{2}\,e + \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{j}\,J_{j-1}(je).\exp(\sqrt{-1}\,jM)$$

kde $j \neq 0$
a dále s pomocí vztahů $r.\cos v = a(\cos E - e)$, $r.\sin v = a.\cos\varphi.\sin E$ dostaneme po jednoduchých úpravách s pomocí (5, 6)

$$r.\cos(v - M) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} G_j.\cos jM$$

kde

$$G_j = \frac{a}{j-1}\left[J_{j-2}(je - e).\sin^2\frac{\varphi}{2} - J_j(je - e).\cos^2\frac{\varphi}{2}\right]\cdot \qquad j \neq 1$$

$$G_1 = -\frac{3}{2}\,a.e$$

přičemž symbolem $J_j(x)$ jsou označeny Besselovy funkce.

Poněvadž za pomoci paragrafu, 2,4 můžeme excentricitu i velkou poloosu vyjádřit pomocí kanonických elementů a protože rozvoje Besselových funkcí vždy existují, je možné v každém případě vyjádřit Q_x a Q_y ve tvaru řady

$$\sum C_1\,\varrho_1^{\nu_1}\cos(\nu_2 M + H_1)$$

kde C_1 jsou veličiny závislé na L a na sčítacích indexech. Sčítací index ν_1 může být roven všem nezáporným celočíselným násobkům jedné poloviny, ν_2 nabývá nezáporných celočíselných hodnot, H_1 jsou konstanty.

3. Poněvadž podle (7) a (2,40) platí

$$\cos(\nu_2 M + H_1) = \cos(\nu_2\lambda - \nu_2\pi + H_1)$$

obdržíme spojením dosavadních výsledků a zavedením vhodných konstant požadované tvrzení.

3,14. TRANSFORMACE DO DRUHÉ POINCARÉHO SOUSTAVY

K rovnicím (2,41) můžeme nalézt inversní transformaci:

$$L = L\,; \qquad \lambda = \lambda$$

$$\varrho_1 = \frac{\xi_1^2 + \eta_1^2}{2}\,; \qquad \varrho_2 = \frac{\xi_2^2 + \eta_2^2}{2}$$

$$\sin\omega_1 = \frac{\eta_1}{(\xi_1^2 + \eta_1^2)^{\frac{1}{2}}}\,; \qquad \sin\omega_2 = \frac{\eta_2}{(\xi_2^2 + \eta_2^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\cos\omega_1 = \frac{\xi_1}{(\xi_1^2 + \eta_1^2)^{\frac{1}{2}}}\,; \qquad \cos\omega_2 = \frac{\xi_2}{(\xi_2^2 + \eta_2^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Odtud dostaneme s pomocí (8) rozvoj libobolné složky Jacobiho průvodiče $\mathbf{q}$ ve tvaru

$$\sum B\, \xi_1^{\gamma_1} . \xi_2^{\gamma_2} . \eta_1^{\delta_1} . \eta_2^{\delta_2} . \cos\,(s^* . \lambda + K) \tag{9}$$

kde veličiny B závisí na L a sčítacích indexech, K jsou konstanty.

Postupem obdobným 3,131 bychom mohli dokázat, že všechny sčítací indexy jsou celá nezáporná čísla.

3,2. ROZVOJ PERTURBAČNÍ FUNKCE POMOCÍ KANONICKÝCH ELEMENTŮ

Poněvadž v dalším budeme vždy používat metodu postupných aproximací (tj. nalezneme nedjříve řešení problému dvou těles, jež budeme dále zpřesňovat) a protože budeme vždy předpokládat, že $m_0 \gg \sum_{j=1}^{n-1} m_j$, nedopustíme se velké nepřesnosti, zaměníme-li Jacobiho souřadnice obvyklými pravoúhlými souřadnicemi zavedenými v 1,13. Za těchto předpokladů nám z rozvoje (8) vyplývá ihned věta:

Jestliže se body $m_0, m_1, \ldots, m_{n-1}$ pohybují tak, že ani průvodiče $m_0 m_j = r_j$, ani vzájemné vzdálenosti planet Δ_{jh} se nikdy neblíží k nule, může být perturbační funkce rozvedena v řadu

$$\sum A . \Lambda . \cos\left(\sum_{j=1}^{n-1} s_j\, \lambda_j + \sum_{\alpha=1}^{2n-2} q_\beta\, \omega_\beta + H\right) \tag{10}$$

kde $\Lambda = \prod_{\alpha=1}^{2n-2} \varrho_\alpha^{p_\alpha}$, přičemž $j = 1, 2, \ldots, n-1, \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, 2n-2$, p_α může být rovno všem celočíselným nezáporným násobkům jedné poloviny, q_β a s_j nabývají celočíselných nezáporných hodnot. Veličiny A závisí na L a sčítacích indexech. H jsou konstanty.

Zcela obdobně jako v případě (10) bychom na základě (9) dokázali větu:

Jestliže ... rozvedena v řadu:

$$\sum A . \Lambda . \cos\left(\sum_{j=1}^{n-1} s_j\, \lambda_j + H\right) \tag{11}$$

kde

$$\Lambda = \prod_{\alpha=1}^{2n-2} \prod_{\beta=1}^{2n-2} \xi_\alpha^{p_\alpha} . \eta_\beta^{q_\beta}$$

přičemž sčítací indexy p_α, q_β, s_j nabývají nezáporných celočíselných hodnot. Ostatní předpoklady jsou stejné jako pro rozvoj (10).

Vztahy (10) nebo (11) představují nejobecnější rozvoje perturbační funkce. Dříve, než budeme zkoumat vlastnosti těchto rozvojů, musíme zavést některé pojmy, jež budeme v dalším potřebovat.

3,3. ZAVEDENÍ NĚKTERÝCH POJMŮ

Jak jsme už uvedli na několika místech, řešíme zjednodušený problém n těles ($m_0 \gg \sum_{j=1}^{n-1} m_j$) metodou postupných aproximací. V tomto paragrafu si náš problém zkonkrétníme a budeme hledat řešení ve tvaru:

$$
\begin{aligned}
L_j &= {}^\circ L_j + \delta_1 L_j + \delta_2 L_j + \dots \\
\lambda_j &= n_j t + {}^\circ\lambda_j + \delta_1 \lambda_j + \delta_2 \lambda_j + \dots \\
\varrho_\alpha &= {}^\circ\varrho_\alpha + \delta_1 \varrho_\alpha + \delta_2 \varrho_\alpha + \dots \\
\omega_\alpha &= {}^\circ\omega_\alpha + \delta_1 \omega_\alpha + \delta_2 \omega_\alpha + \dots
\end{aligned}
\tag{12}
$$

popřípadě

$$
\begin{aligned}
L_j &= {}^\circ L_j + \delta_1 L_j + \delta_2 L_j + \dots \\
\lambda_j &= n_j t + {}^\circ\lambda_j + \delta_1 \lambda_j + \delta_2 \lambda_j + \dots \\
\xi_\alpha &= {}^\circ\xi_\alpha + \delta_1 \xi_\alpha + \delta_2 \xi_\alpha + \dots \\
\eta_\alpha &= {}^\circ\eta_\alpha + \delta_1 \eta_\alpha + \delta_2 \eta_\alpha + \dots
\end{aligned}
\tag{12'}
$$

kde ${}^\circ L_j$, ${}^\circ\xi_\alpha$ atd. jsou elementy nerušeného pohybu. $\delta_h L_j$, $\delta_h \lambda_j$ atd. jsou veličiny, které lze rozvést v řadu, v níž každý člen obsahuje činitele tvaru $\prod_{j=1}^{n-1} m_j^{h_j}$, přičemž $\sum_{j=1}^{n-1} h_j = h$. Vyjádřeno slovy: Obsahují h-tou mocninu rušících hmot.

Definice:

Číslo h nazveme **řádem perturbace.**

Známe-li prvou aproximaci (nerušený pohyb), musí vzhledem k (5), (9) a (12) platit:

$$
\begin{aligned}
\dot{L}_j &= \sum_{h=1}^{n-1}{}' m_h . f_{jh} ({}^\circ L_j, {}^\circ\lambda_j, {}^\circ\xi_\alpha, {}^\circ\eta_\alpha) \\
\dot{\lambda}_j &= \sum_{h=1}^{n-1}{}' m_h . \Lambda_{jh} ({}^\circ L_j, {}^\circ\lambda_j, {}^\circ\xi_\alpha, {}^\circ\eta_\alpha) \\
\dot{\xi}_\alpha &= \sum_{h=1}^{n-1}{}' m_h\, \Xi_{jh} ({}^\circ L_j, {}^\circ\lambda_j, {}^\circ\xi_\alpha, {}^\circ\eta_\alpha) \\
\dot{\eta}_\alpha &= \sum_{h=1}^{n-1}{}' m_h\, H_{jh} ({}^\circ L_j, {}^\circ\lambda_j, {}^\circ\xi_\alpha, {}^\circ\eta_\alpha)
\end{aligned}
\tag{13}
$$

kde $\sum'$ značí sumaci v příslušných mezích s výjimkou $h = j$. f_{jh}, Λ_{jh}, Ξ_{jh}, H_{jh} značí příslušné funkce elementů.

Integrací rovnic (13) získáme **druhou aproximaci** ve formě řady:

$$L_j = {}^\circ L_j + \sum_{h=1}^{n-1} m_h \int_0^t f_{jh} \, ({}^\circ L_j, {}^\circ\lambda_j, {}^\circ\xi_\alpha, {}^\circ\eta_\alpha) \, . \, dt \tag{14}$$

. . . .

Třetí aproximaci (perturbace druhého řádu) můžeme vypočíst opět z rovnic (13), v nichž však je třeba zaměnit elementy ${}^\circ L_j$ atd za jejich druhou aproximaci. Použijeme-li Taylorova rozvoje funkcí za sumačním znamením a zanedbáme-li druhé a vyšší mocniny $\delta_1 L_j, \ldots$, obdržíme rovnice analogické (13), jejichž integrací dostaneme perturbace druhého řádu.

S pomocí (2,40) je vidět, že pro perturbace prvého řádu bude mít obecný člen rozvoje libovolného elementu tvar:

$$\frac{A_0 \, A_0 \sin \, (\sum_{j=1}^{n-1} s_j^0 \lambda_j . t + H)}{\sum_{j=1}^{n-1} s_j^0 \, n_j} \ldots\ldots \text{ pokud } \sum_{j=1}^{n-1} s_j^0 . n_j \neq 0$$

$$t . A_0 . A_0 . \cos H \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ je-li } \sum_{j=1}^{n-1} s_j^0 . n_j = 0$$

kde veličiny A_0 závisí na sčítacích indexech a jsou funkcemi ${}^\circ L_j$
veličiny A_0 jsou součinem mocnin elementů ${}^\circ\xi_\alpha$ a ${}^\circ\eta_\alpha$.

Úplnou indukcí lze odvodit, že obecný člen rozvoje perturbace libovolného řádu bude mít tvar:

$$\frac{t^b . A_0 A_0 \cos \, (\nu . t + H^*)}{\nu_1^{c_1} . \nu_2^{c_2} \ldots\ldots} \tag{15}$$

kde $\nu = \sum_{j=1}^{n-1} s_j^0 . n_j$; $\nu_1, \nu_2, \ldots$ jsou hodnoty ν pro pevně zvolené hodnoty s_j^0.
Zřejmě platí: $b \geqq 0$, $c_j \geqq 0$. Dále můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že H^* se liší od H nejvýše o $\pm \frac{\pi}{2}$.

Definice:

Je-li $b = 0$, nazveme (15) **periodický člen**.
Je-li $b \neq 0$, $\nu = 0$, nazveme (15) **sekulární člen**.
Je-li $b \neq 0$, $\nu \neq 0$, nazveme (15) **smíšený člen**.

Na základě právě definovaných pojmů mluvíme o periodické, sekulární a smíšené (smíšené sekulární) perturbaci.

Dále označíme $c = \sum c_j$ a pro perturbaci h-tého řádu zavedeme:

rozdíl $h - b$ **hodnost perturbace**,

rozdíl $h - \frac{1}{2}(c + b)$ **třída perturbace**,

rozdíl $h - \frac{1}{2}(c_j + b)$ **třída perturbace vzhledem k děliteli** ν_j.

Pro úplnost si ještě všimneme veličin A z rozvoje (11). Můžeme je rozvést v řady typu ΣK_j, při čemž každá z veličin K_j je úměrná součinu

$$\prod_{j=1}^{n-1} e_j^{\gamma_j} \prod_{h=1}^{n-1} i_h^{\delta_h}$$

kde e_j jsou numerické excentricity a i_h jsou sklony drah jednotlivých planet; γ_j a δ_h jsou nezáporná celá čísla. Veličinu $\gamma + \delta = \sum \gamma_j + \sum \delta_h$ nazveme stupněm perturbace.

Máme tedy zavedeny čtyři charakteristiky: řád, stupeň, třída a hodnost, na jejichž základě můžeme zkoumat charakter perturbace příslušící k danému členu rozvoje. Podle toho, jaký má příslušný člen vliv na pohyb planety můžeme říci, že pro předběžnou charakteristiku má u dlouhoperiodických členů (ν_j je malá veličina) největší význam třída k danému děliteli, u sekulárních členů hodnost perturbace.

3,4. OBECNÉ VLASTNOSTI ROZVOJŮ PERTURBAČNÍ FUNKCE

V minulých paragrafech jsme odvodili, jak můžeme rozvést perturbační funkci v řady a zavedli jsme celou řadu pojmů. Nyní odvodíme některé důležité vztahy mezi zavedenými veličinami.

Z posledních paragrafů je mimo jiné vidět, že $\delta_1 L_j$ nemá sekulární členy. Vyplývá to z rovnic (5), odkud je zřejmé, že nenulové derivace podle λ_j mohou dát pouze periodické členy rozvojů perturbační funkce. Tento fakt je ekvivalentní s tvrzením, že velká poloosa nemá sekulární perturbace prvého řádu.

Tvrzení, jež jsme právě vyslovili, zobecníme ve dvou směrech. V prvém případě budeme zkoumat hodnost, v druhém třídu obecného členu rozvoje libovolné perturbace.

Poznámka:

Ve všech případech je nutno brát Delaunayův tvar perturbační funkce z (2,39), a proto i rovnic (5), z něj vyplývajících. Rozvoje (8) a (9), jak je vidět z postupu odvození, platí pro funkci R z rovnic (5).

3,41. POINCARÉHO VĚTA O HODNOSTI

Platí:

Jsou-li pohyby planet takové, že pro libovolnou skupinu celých nezáporných čísel s_j jest:

$$\nu = \sum_j s_j . n_j \neq 0,$$

splňuje rozvoj perturbační funkce podmínky.

1. Hodnost každého členu v rozvojích libovolné perturbace kteréhokoliv elementu je nezáporná.
2. Hodnost každého smíšeného členu je nejméně jednotková.
3. Rozvoje δL_j neobsahují členy nulové hodnosti.

Poznámka:

Symbolem δL_j budeme značit množinu všech perturbací až do libovolného (pevného) řádu.

3,41. Důkaz Poincarého věty o hodnosti

Pro perturbace prvého řádu je tvrzení správné. $\delta_1\lambda_j$, $\delta_1\xi_\alpha$, $\delta_1\eta_\alpha$ neobsahují smíšené členy, takže mohou obsahovat pouze sekulární členy nulové hodnosti (R je prvého řádu vzhledem k rušícím hmotám). Protože periodické členy můžeme považovat za zvláštní případ smíšených členů ($b = O$), je správné pro perturbace prvého řádu i druhé tvrzení. Třetí výrok platí vzhledem k počátku tohoto paragrafu.

Dále budeme postupovat podle principu úplné indukce. Pro perturbace prvého řádu máme větu dokázánu. Budeme v dalším předpokládat její platnost pro všechny perturbace až do h-tého řádu (včetně) a dokážeme platnost pro $(h + 1)$-ní řád. Důkaz rozdělíme na tři části:

1. Nejdříve odvodíme vzorce pro výpočet členů $(h + 1)$-ho řádu. Podle indukčního předpokladu máme nalezeny perturbace až do h-tého řádu včetně, jež jsou zatíženy chybou $(h + 1)$-ho řádu a které můžeme napsat ve tvaru:

$$L_j = {}^\circ L_j + \delta L_j\,; \qquad \lambda_j = n_j . t + {}^\circ\lambda_j + \delta\lambda_j \qquad (16)$$
$$\xi_\alpha = {}^\circ\xi_\alpha + \delta\xi_\alpha\,; \qquad \eta_\alpha = {}^\circ\eta_\alpha + \delta\eta_\alpha$$

Dosadíme-li (16) do pravých stran rovnic (5), dostaneme po integraci perturbace $(h + 1)$-ho řádu veličin L_j, ξ_α, η_α ve formě integrálů

$$\int_0^t \frac{\partial R}{\partial\lambda_j} \cdot dt\,; \qquad \int_0^t \frac{\partial R}{\partial\eta_\alpha}\, dt\,; \qquad -\int_0^t \frac{\partial R}{\partial\xi_\alpha}\, dt \qquad (17)$$

Připočteme-li (17) k (16) obdržíme perturbace až do $(h + 1)$-ho řádu včetně. U středních délek λ_j musíme ještě uvážit:

$$R_0\,({}^\circ L_j + \delta L_j) = R_0\,({}^\circ L_j) + \sum_j C_j . \delta L_j + \sum_{j,k} C_{jk}\, \delta L_j . \delta L_k + \Phi$$

kde vzhledem k (5) platí

$$C_j = \left(\frac{\partial R_0}{\partial L_j}\right)_{L_j = {}^\circ L_j} = -\, n_j\,; \qquad C_{jk} = \left(\frac{\partial^2 R_0}{\partial L_j . \partial L_k}\right)_{\substack{L_j = {}^\circ L_j \\ L_k = {}^\circ L_k}}$$

Φ představuje členy vyšších řádů.

Poněvadž veličiny ${}^\circ L_j$ jsou konstanty (řešení problému dvou těles), můžeme psát:

$$\frac{\partial R_0}{\partial L_j} = \frac{\partial R_0}{\partial(\delta L_j)} = -\, n_j + \sum_k C_{jk}\, \delta L_k + \frac{\partial\Phi}{\partial L_j}$$

a obdobně dostaneme s pomocí (5) pro λ_j výraz:

$$-\sum_k C_{jk} \int_0^t dt \int_0^t \frac{\partial R}{\partial\lambda_k}\, dt - \int_0^t \frac{\partial\Phi}{\partial L_j}\, dt - \int_0^t \frac{\partial R}{\partial L_j}\, dt \qquad (18)$$

Prvý a třetí člen (18) je zřejmě $(h + 1)$-ho řádu. Druhý člen vznikne integrací součtu členů nejméně druhého řádu vzhledem k δL_j. Obsahuje sčítance typu

$$K_j . \prod_{s=1}^{j-1} \delta L_{b_s}$$

kde K_j jsou parciální derivace perturbační funkce (j-tého řádu; $j \geqq 3$) podle elementů. b_s jsou přirozená čísla, pro něž $1 \leqq b_s \leqq n - 1$, přičemž $n - 1$ je počet planet. Odtud vyplývá, že žádný ze sčítanců nemůže mít nikdy větší vliv nežli veličina $(h + 1)$-ho řádu.

Lze tedy říci, že zaměníme-li na pravých stranách (5) elementy jejich aproximacemi h-tého řádu, obdržíme po integraci veličiny $(h + 1)$-ho řádu — to znamená, že integrací vzroste řád o jedničku.

2. Dokážeme platnost prvého a druhého tvrzení. Mějme veličiny F_j! Jejich hodnosti nechť jsou f_j! Pak zřejmě hodnost veličiny $F = \prod_j F_j$ bude rovna $f = \sum_j f_j$. Důsledkem tohoto tvrzení je, že součinem polynomů obsahujících členy s nezápornou hodností je součet veličin, z nichž každá má nezápornou hodnost.

Při přechodu od h-tého řádu k $(h + 1)$-mu řádu nemůže hodnost růst, poněvadž řád musí vzrůst o jednotku, kdežto mocnitel u času se může zvětšit nejvýše o jedna. Tím je na základě indukčního předpokladu důkaz prvého a druhého tvrzení proveden.

3. V minulém odstavci jsme mlčky předpokládali, že δL_j neobsahuje sekulární členy. Kdyby je obsahovala, mohli bychom po několikeré integraci dostat z prvého sčítance (18) členy záporné hodnosti. δL_j však sekulární členy nemůže obsahovat proto, že

$$\frac{\partial R}{\partial \lambda_j} = \sum D_0 \left(\frac{\partial R}{\partial \lambda_j} \right)_0 P \tag{19}$$

kde D_0 jsou operátory tvaru

$$A_c \frac{\partial^c}{\left(\prod\limits_{j=1}^{n-1} \partial L_j^{c_{1j}}\right) \cdot \left(\prod\limits_{j=1}^{n-1} \partial \lambda_j^{c_{2j}}\right) \cdot \left(\prod\limits_{\alpha=1}^{2n-2} \partial \xi_\alpha^{c_{3\alpha}}\right) \cdot \left(\prod\limits_{\alpha=1}^{2n-2} \partial \eta_\alpha^{c_{4\alpha}}\right)}$$

přičemž

$$\sum_{l=1}^{2} \sum_{j=1}^{n-1} c_{lj} + \sum_{l=1}^{2} \sum_{\alpha=1}^{2n-2} c_{l\alpha} = c$$

P je vždy součin celých kladných mocnin veličin $\delta L_j, \ldots, \delta \xi_\alpha$.

Vzhledem k (11) však můžeme psát každou z veličin $D_0 \left(\frac{\partial R}{\partial \lambda_j} \right)_0$ ve tvaru řady

$$\sum A_0^* A_0^* \cos (\nu t + H^*) \tag{20}$$

kde indexy $_0$ značí nutnost substituce $L_j = {}^\circ L_j$ atd. Poněvadž podle předpokladu je $\nu \neq 0$ a hodnost každého členu P je vždy kladná, je ihned vidět, že δL_j neobsahuje sekulární členy, neboť integrací výrazu

$$C . t^b . \cos (\nu t + H)$$

[a obecný člen rozvoje (19) má tento tvar] se hodnost nemůže snížit.

Tím je důkaz Poincarého věty o hodnosti v hrubých rysech proveden.

3,42. POINCARÉHO VĚTA O TŘÍDĚ

Tvrzení, které jsme vyslovili na počátku paragrafu 3,4 si nyní zobecníme v poněkud jiném smyslu nežli v 3,41. Platí:

Jsou-li pohyby planet takové, že pro libovolnou skupinu celých nezáporných čísel s_j platí

$$\nu = \sum s_j . n_j \neq 0$$

splňuje rozvoj perturbační funkce podmínky

1. Třída každého členu rozvojů δL_j, $\delta \xi_\alpha$, $\delta \eta_\alpha$ vůči libovolnému děliteli je nejméně jedna polovina.
2. Třída každého členu v rozvoji $\delta \lambda_j$ je nezáporná.

3,421. Důkaz Poincarého věty o třídě

Opět budeme postupovat podle principů úplné indukce.
Pro pertubace prvého řádu věta platí podle (17) a (18). Budeme předpokládat platnost pro všechna $l \leqq h$ a dokážeme, že odtud vyplývá platnost pro $h + 1$.

Proto rozvedeme každou z derivací

$$\frac{\partial R}{\partial \lambda_j}; \quad \frac{\partial R}{\partial \xi_\alpha}; \quad \frac{\partial R}{\partial \eta_\alpha}$$

po vzoru (19) v řadu. Ihned je vidět, že výrazy $D_0 \left(\frac{\partial R}{\partial \xi_\alpha}\right)$, atd lze rozvést v řady periodických členů. Podle symboliky paragrafu 3,3 to znamená, že $h = 1$, $c_1 = b = 0$ (c_1 je označen exponent u libovolné pevné hodnoty ν; h značí v této větě jinou veličinu než v indukčním předpokladu). Poněvadž podle indukčního předpokladu je třída činitelů P nezáporná, lze funkce za integračními znameními rozvést v řady, v nichž třída každého členu je minimálně jednotková. Odtud je okamžitě vidět, že dokazované tvrzení platí i pro $h + 1$.
Poznámka:
Funkce Φ, jak se čtenář lehce přesvědčí, snížení hodnosti nemůže způsobit.

3,5. APLIKACE POINCARÉHO VĚT A NĚKTERÉ DODATKY

V každém rozvoji perturbační funkce (ať už jsou základní elementy voleny jakkoli (vystupuje vždy jedna veličina jako nezávisle proměnná (čas, střední anomálie, střední délka a podobně). Podobně jsou vždycky hledány rozvoje, seřazené podle mocnin rušících hmot. Proto jsou věty, jež jsme právě dokázali obecnými vlastnostmi rozvojů perturbační funkce. V tomto paragrafu si ukážeme několik důsledků Poincarého vět a odvodíme některé dodatky k obecné části této kapitoly.

3,51. PERTURBACE VELKÉ POLOOSY

Pro studium otázky vývoje planetárních soustav je zvlášť důležité znát, jak se mění vzdálenost planet od centrálního tělesa za velmi dlouhou dobu. Na počátku paragrafu 3,4 jsme dokázalil, že velká poloosa nemá sekulární perturbace prvého řádu. Nyní toto tvrzení rozšíříme i na druhý řád a dokážeme tak zvanou Poissonovu větu:

Jsou-li pohyby planet takové, že pro libovolnou skupinu celých nezáporných čísel s_j platí

$$\nu = \sum_j s_j n_j \neq 0$$

neobsahuje rozvoj $\delta_2 L_j$ (perturbace druhého řádu) sekulární členy.

Důkaz:

Nechť ${}^\circ L + \delta_1 L_j$, $\lambda_j = n_j t + {}^\circ\lambda_j + \delta_1\lambda_j$, ${}^\circ\xi_\alpha + \delta_1\xi_\alpha$, ${}^\circ\eta_\alpha + \delta_1\eta_\alpha$ jsou řešeními rovnic (5). Potom jsou perturbace druhého řádu elementů L_j dány prvou rovnicí (17), do jejíž pravé strany jsou dosazeny perturbace prvého řádu. Derivováním (17) podle času dostaneme:

$$\frac{d}{dt}(\delta_2 L_j) = \frac{\partial R}{\partial \lambda_j} \tag{21}$$

Rovnici (21) můžeme dále přepsat na tvar

$$\frac{d}{dt}(\delta_2 L_j) = \left(\frac{\partial R}{\partial \lambda_j}\right)_0 + \sum_{h=1}^{n-1}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial \lambda_j\, \partial L_h}\right)_0 \delta_1 L_h + \sum_{h=1}^{n-1}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial \lambda_j\, \partial \lambda_h}\right)_0 \delta_1 \lambda_h +$$
$$+ \sum_{\alpha=1}^{2n-2}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial \lambda_j\, \partial \xi_\alpha}\right)_0 \delta_1 \xi_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{2n-2}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial \lambda_j\, \partial \eta_\alpha}\right)_0 \delta_1 \eta_\alpha \tag{22}$$

S pomocí (17) a (18) můžeme (22) upravit takto:

$$\frac{d}{dt}(\delta_2 L_j) = \left(\frac{\partial R}{\partial \lambda_j}\right)_0 + \sum_{h=1}^{n-1}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial \lambda_j\, \partial L_h}\right)_0 \int_0^t \left(\frac{\partial R}{\partial \lambda_h}\right)_0 dt -$$
$$-\sum_{h=1}^{n-1}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial \lambda_j\, \partial \lambda_h}\right)_0 \int_0^t \left(\frac{\partial R}{\partial L_h}\right)_0 dt -$$
$$-\sum_{(h,l=1)}^{n-1}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial \lambda_j\, \partial \lambda_h}\right)_0 \cdot \left(\frac{\partial^2 R}{\partial L_l\, \partial L_h}\right)_0 \int_0^t dt \int_0^t \left(\frac{\partial R}{\partial \lambda_l}\right)_0 dt + \tag{22'}$$
$$+\sum_{\alpha=1}^{2n-2}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial \lambda_j\, \partial \xi_\alpha}\right)_0 \int_0^t \left(\frac{\partial R}{\partial \eta_\alpha}\right)_0 dt - \sum_{\alpha=1}^{2n-2}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial \lambda_j\, \partial \eta_\alpha}\right)_0 \int_0^t \left(\frac{\partial R}{\partial \xi_\alpha}\right)_0 dt$$

Každá z druhých derivací ve výrazu (22)′ obsahuje podle důkazu Poincarého věty o hodnosti pouze periodické členy. Protože dále platí identity

$$\cos A . \cos B = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{1}{2}(A + B) + \cos\frac{1}{2}(A - B)\right]$$

$$\cos A . \cos B . \cos C = \frac{1}{4}\left[\cos\frac{1}{4}(2A + B + C) + \cos\frac{1}{4}(2A - B - C) + \right.$$

$$\left. + \cos\frac{1}{4}(2A + B - C) + \cos\frac{1}{4}(2A - B + C)\right.$$

. . . .

nemohou na pravé straně (22)′ existovat konstantní členy, odkud okamžitě vyplývá dokazované tvrzení.

Nyní můžeme vyslovit velmi důležitý závěr: **Velké poloosy planetárních drah nemají do druhého řádu hmot (včetně) sekulární perturbace.**

Poznámka:

Existenci smíšených sekulárních členů pro perturbace velké poloosy dokázal pro třetí řád hmot S. HARETU.

3,52. PERTURBACE MINIMÁLNÍ TŘÍDY

V tomto oddíle budeme hledat, jaký tvar má obecný člen minimální třídy vzhledem k libovolnému děliteli $\nu^\circ = \sum s_j^\circ n_j$. Platí: **Členy minimální hodnosti vzhledem k děliteli ν° mají tvar**

$$\Gamma . t^b . \cos (s . \nu^\circ . t + H) \tag{23}$$

kde Γ závisí na L_j, ξ_α, η_x; s je celé číslo.

Důkaz tohoto tvrzení (které je pro perturbace prvého řádu zcela evidentní) bychom opět mohli vést na základě principu úplné indukce. Poněvadž postup je podobný důkazu Poincarého vět, nebudeme se jím zabývat.

Odvodíme nyní rovnice, jejichž řešením získáme perturbace minimální třídy. Zkoumejme nejdříve λ_j; Z (18) je zřejmé, že členy minimální třídy mohou vzniknout pouze z dvojnásobného integrálu, to jest z výrazů

$$\delta^* \lambda_j = -\sum_h C_{jh} \int_0^t dt \int_0^t \frac{\partial R}{\partial \lambda_h} dt = -\sum_h C_{jh} \int_0^t (\delta L_h)\, dt =$$

$$= -\sum_h C_{jh} \int_0^t (L_h - {}^\circ L_h)\, dt \tag{24}$$

Z (19) je vidět, že členy rozvoje $\frac{\partial R}{\partial \lambda_h}$ mají třídu nejméně jednotkovou (viz důkaz Poincarého věty o třídě). Abychom dvojí integrací snížili třídu o 1, je podle (23) nutné, aby argument uvažovaných členů byl celočíselným násobkem ν°. Odtud můžeme učinit závěr: Hodnotu λ_j, opravenou o perturbace minimální třídy, dostaneme řešením rovnice

$$\dot{\lambda}_j = -\frac{\partial \Phi_0}{\partial L_j} \tag{25}$$

kde

$$\Phi_0 = -\sum_j n_j (L_j - {}^\circ L_j) + \frac{1}{2} \sum_{j,k} C_{jk} (L_j - {}^\circ L_j)(L_k - {}^\circ L_k)$$

přičemž platí, že dosadíme-li za $L_j - {}^\circ L_j$ členy třídy $\frac{1}{2}$ (h-tého řádu). Takto získáme z (25) perturbace ($h+1$)-ho řádu, které mají minimální třídu.

Pro elementy L_j, ξ_α, η_α dostaneme členy minimální třídy řešením diferenciálních rovnic:

$$\dot{L}_j = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_j}\right)_0; \qquad \dot{\xi}_\alpha = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \eta_\alpha}\right)_0; \qquad \dot{\eta}_\alpha = -\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \xi_\alpha}\right)_0 \tag{26}$$

kde Ψ je množina členů v rozvoji perturbační funkce, jejichž argumenty jsou celočíselnými násobky ν_0. Do derivací na pravých stranách (26) stačí dosadit $L_j = {}^\circ L_j, \ldots$ proto, že podle rozvoje typu (19) a Poincarého věty o třídě by v každém jiném případě byla třída těchto výrazů větší než 1.

Úvahami tohoto paragrafu jsme skončili obecnou část 3. kapitoly. Až na výjimky byl dosavadní postup typem existenčního důkazu, aniž bychom se blíže zajímali, jaký konkrétní tvar budou mít rozvoje a jak je nalézt. Za značně zjednodušených předpokladů odvodíme ve zbývající části této kapitoly některé formy rozvoje perturbační funkce, jichž lze použít při praktických aplikacích.

3,6. METODY HLEDÁNI ROZVOJŮ PERTURBAČNÍ FUNKCE

Jak jsme už poznali, je nejdůležitější součástí analytických metod studia perturbací nalezení vhodného rozvoje perturbační funkce. V dosavádních paragrafech této kapitoly jsme poznali, že tento rozvoj lze za určitých předpokladů vždy nalézt. Dále si ukážeme, jak se při hledání rozvojů perturbační funkce v praxi postupuje. Uvažujeme-li více rušících planet, počet členů v rozvoji perturbační funkce velmi rychle vzrůstá. Omezíme se proto na případ, kdy kolem centrálního tělesa obíhají pouze dvě planety. Souřadnice planety, jejíž pohyb budeme zkoumat, označíme obvyklým způsobem bez indexů. Souřadnice rušící planety budou odlišeny čárkou u příslušných symbolů. Pokud nebude význam některých veličin uveden, jedná se o jednotnou symboliku, jejíž význam nalezne čtenář na konci pojednání.

3,61. VÝCHOZÍ VZTAHY

Vyjdeme z definiční rovnice (1,7) a zavedeme substituci

$$R_1 = R = k^2 . m' . R_0 \qquad R_2 = R' = k^2 . m . R_0' \tag{27}$$

kde zřejmě

$$R_0 = \frac{1}{\Delta} - \frac{\mathbf{r}\,\mathbf{r}'}{r'^3} \qquad R_0' = \frac{1}{\Delta} - \frac{\mathbf{r}.\mathbf{r}'}{r^3}$$

V dalším budeme hledat rozvoje funkcí R_0 a R'_0. Veličinu $\frac{1}{\Delta}$ budeme nazývat hlavní částí perturbační funkce a jejím rozvojem se budeme zabývat nejdříve.

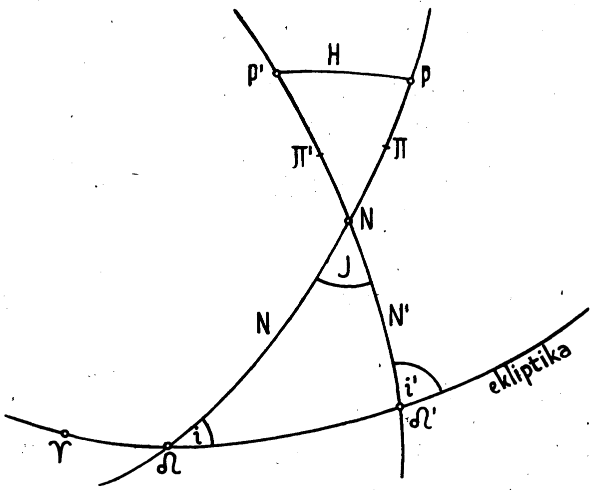
Platí

$$\Delta^{-1} = (r^2 + r'^2 - 2 . r . r' . \cos H)^{-\frac{1}{2}} \tag{28}$$

přičemž H je úhel průvodičů **r** a **r'**.

Označme podle obrázku

♈ ... jarní bod
☊ ... výstupný uzel planety
Π ... její perihel
P ... její okamžitou polohu



Obr. 3. Vzájemná poloha uvažovaných drah

Dále zaveďme úhly

☊ $= \sphericalangle$ ♈ ☊ ... délka výstupného uzlu
N $= \sphericalangle$ ☊ N
$W = \sphericalangle NP$ ... délka planety na dráze měřená od průsečíku drah
$\Pi = \sphericalangle N\Pi$
$v = \sphericalangle \Pi P$ ... pravá anomálie

a zcela obdobně pro čárkované veličiny.

Z obrázku vyplývá

$$\cos H = \cos W . \cos W' + \sin W . \sin W' . \cos J =$$
$$= \cos (W' - W) - 2 . \sin W . \sin W' . \sin^2 \frac{1}{2} J \tag{29}$$

Dosadíme-li (29) do (28), obdržíme výraz

$$\Delta^{-1} =$$

$$= [r^2 + r'^2 - 2.r.r'.\cos(W' - W)]^{-\frac{1}{2}}.\left[1 + \frac{4\sigma^2.r.r'.\sin W.\sin W'}{r^2 + r'^2 - 2rr'.\cos(W' - W)}\right]^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \Delta_0^{-1}(1 + 4.\sigma^2.r.r'.\sin W.\sin W'.\Delta_0^{-2})^{-\frac{1}{2}} \qquad (30)$$

$$\sigma = \sin\frac{1}{2}J$$

Dále se omezíme na případ, kdy zlomek v druhé hranaté závorce (30) je trvale menší než určitý (pevný) pravý zlomek. Náš postup bude tedy jistě aplikovatelný na pohyby planet ve sluneční soustavě, neboť zde dosahuje J své maximální hodnoty pro dvojici Merkur a Mars, kde je rovno 12°30′, takže $\sigma^2_{max} = 0{,}0118$*). Nyní můžeme (30) přepsat na tvar:

$$\Delta^{-1} = \sum_{\varrho=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{\varrho}.(4\sigma^2 rr'.\sin W.\sin W')^{\varrho}\,\Delta_0^{-2\varrho-1} =$$

$$= \Delta_0^{-1}(1 - 2.\sigma^2.r.r'.\sin W.\sin W'.\Delta_0^{-2} +$$

$$+ 6.\sigma^4.r^2.r'^2.\sin^2 W.\sin^2 W'.\Delta_0^{-2} - \qquad (31)$$

$$- 20.\sigma^6.r^3.r'^3.\sin^3 W.\sin^3 W'.\Delta_0^{-6} + \ldots$$

K rozřešení našeho úkolu je nyní třeba vyjádřit veličiny J, W a W' pomocí elementů obou drah a nalézt rozvoje veličin $\Delta_0^{-\nu}$. Prvá část našeho problému vyplývá okamžitě z obr. 3:

$$\begin{aligned}
\cos J &= \cos i.\cos i' + \sin i.\sin i'.\cos(\Omega' - \Omega)\\
\sin J.\sin N &= \sin i'.\sin(\Omega' - \Omega)\\
\sin J.\cos N &= -\sin i.\cos i' + \sin i'.\cos i.\cos(\Omega' - \Omega) \qquad (32)\\
\sin J.\sin N' &= \sin i.\sin(\Omega' - \Omega)\\
\sin J.\cos N' &= \cos i.\sin i' - \sin i.\cos i'.\cos(\Omega' - \Omega)
\end{aligned}$$

a dále

$$W = \Pi + v \qquad (33)$$

přičemž zřejmě platí

$$\Pi = \pi - N - \Omega = \omega - N$$

Hledáním rozvojů pro $\Delta_0^{-\nu}$ se budeme zabývat v následujícím oddíle.

Rozvoje druhé části perturbační funkce nalezneme velmi snadno, neboť vzhledem k (27) platí

$$R_1 = \frac{\mathbf{r}.\mathbf{r}'}{r'^3} = \frac{r.\cos H}{r'^2} \qquad R_1' = \frac{\mathbf{r}.\mathbf{r}'}{r^3} = \frac{r'.\cos H}{r^2} \qquad (34)$$

*) Obecnější postup nalezne čtenář v prvém díle Tisserandovy monografie v kapitole XXVIII.

takže můžeme psát

$$r'.R_1 = \left(\frac{r}{r'}\right) \cdot [\cos(W' - W) - 2.\sigma^2.\sin W.\sin W']$$

$$r'.R' = \left(\frac{r'}{r}\right)^2 \cdot [\cos(W' - W) - 2.\sigma^2.\sin W.\sin W'] \qquad (35)$$

Poněvadž $r = a(1 - e.\cos E)$, $r' = \ldots$, představuje nalezení rozvojů (35) nesrovnatelně menší práci nežli nalezení rozvoje hlavní části perturbační funkce.

3,62. LAPLACEOVY KOEFICIENTY

Koeficienty $b_\nu^{(\mathrm{h})}$ v rozvoji

$$(1 + \alpha^2 - 2.\alpha.\cos\Theta)^{-\frac{\nu}{2}} = \sum_{\mathrm{h}=0}^{\infty} b_\nu^{(\mathrm{h})}.\cos(h\,\Theta) = \frac{1}{2}\sum_{\mathrm{h}=-\infty}^{\infty} b_\nu^{(\mathrm{h})}.\cos(h\,\Theta) \qquad (36)$$

kde $0 < \alpha < 1$, ν je liché číslo, budeme nazývat **Laplaceovy koeficienty.**

Poněvadž

$$(1 + \alpha^2 - 2.\alpha.\cos\Theta)^{-\frac{\nu}{2}} = (1 - \alpha.\vartheta)^{-\frac{\nu}{2}}.(1 - \alpha.\vartheta^{-1})^{-\frac{\nu}{2}}$$

kde

$$\vartheta = \exp(\sqrt{-1}\,\Theta)$$

můžeme s pomocí zřejmých rozvojů

$$(1 - \alpha.\vartheta^{\pm 1})^{-\frac{\nu}{2}} = \sum_{\mathrm{j}=0}^{\infty}(-1)^{\mathrm{j}}.\binom{-\frac{\nu}{2}}{\mathrm{j}}\alpha^{\mathrm{j}}.\vartheta^{\pm\mathrm{j}}$$

kde $\binom{A}{B}$ jsou kombinační čísla, napsat místo (36)

$$\frac{1}{2}\sum_{\mathrm{h}-\infty}^{\infty} b_\nu^{(\mathrm{h})}.\vartheta^{\mathrm{h}} = \sum_{\mathrm{j}=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^{\mathrm{j}+l}.\binom{-\frac{\nu}{2}}{\mathrm{j}}\cdot\binom{-\frac{\nu}{2}}{l}.\alpha^{\mathrm{j}+l}.\vartheta^{\mathrm{j}-l}$$

$$j - l = h \qquad = \sum_{\mathrm{h}=-\infty}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^{\mathrm{h}}\binom{-\frac{\nu}{2}}{l}\cdot\binom{-\frac{\nu}{2}}{l+\mathrm{h}}.\alpha^{2l}.\alpha^{\mathrm{h}}.\vartheta^{\mathrm{h}}$$

Poněvadž zřejmě $b_\nu^{(-\mathrm{h})} = b_\nu^{(\mathrm{h})}$, dostaneme srovnáním s (36):

$$\frac{1}{2}b_\nu^{(\mathrm{h})} = (-\alpha)^{\mathrm{h}}.\sum_{l=0}^{\infty}\binom{-\frac{\nu}{2}}{l}\cdot\binom{-\frac{\nu}{2}}{l+\mathrm{h}}.\alpha^{2l} \qquad (37)$$

Definujeme-li dále symboly

$$(l, j) = l\,(l + 1) \ldots (l + j - 1); \quad (l, 0) = 1; \quad (1, j) = j! \qquad (38)$$

můžeme (37) přepsat na tvar

$$\frac{1}{2} b_\nu^{(h)} = \frac{\left(\frac{\nu}{2}, h\right)}{(1, h)} . \alpha^h . F\left(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2} + h, h + 1, \alpha^2\right) \qquad (39)$$

kde

$$F\,(A, B, C, x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(A, j) . (B, j)}{(1, j) . (C, j)} . x^j$$

značí hypergeometrickou funkci. Lehce se můžeme přesvědčit, že hypergeometrická funkce je řešením diferenciální rovnice

$$x\,(1 - x) \frac{d^2 y}{dx^2} + [C - (A + B + 1)\,x] \frac{dy}{dx} - A . B . y = 0$$

odkud dostaneme, že musí splňovat identitu

$$F\,(A, B, C, x) = (1 - x)^{-A} . F\left(A, C - B, C, -\frac{x}{1 - x}\right)$$

Proto můžeme napsat (39) ve tvaru

$$\frac{1}{2} b_\nu^{(h)} = \frac{\left(\frac{\nu}{2}, h\right)}{(1, h)} . \alpha^h . (1 - \alpha^2)^{-\frac{\nu}{2}} . F\left(\frac{\nu}{2}, 1 - \frac{\nu}{2}, h + 1, -s\right) \qquad (40)$$

kde

$$s = \frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2}$$

Řad (39) nebo (40) lze použít pro výpočet libovolného Laplaceova koeficientu. V praxi však zpravidla postupujeme tak, že touto metodou (nebo pomocí eliptického integrálu) určíme koeficienty

$$b_1^{(0)} = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \alpha^2\right) = \qquad h = 0, \nu = 1$$

$$= 1 + \frac{1}{4}\alpha^2 + \frac{9}{64}\alpha^4 + \frac{25}{256}\alpha^6 + \ldots \qquad (41)$$

$$b_1^{(1)} = \frac{1}{2} . \alpha . F\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2, \alpha^2\right) = \qquad h = \nu = 1$$

$$= \frac{1}{2}\alpha\,(1 + \frac{3}{8}\alpha^2 + \frac{15}{64}\alpha^4 + \frac{175}{1024}\alpha^6 + \ldots \qquad (41)'$$

a dále použijeme rekurentních vzorců, které odvodíme v následujícím oddíle.

Poznámky:

a) Řada (40) zřejmě konverguje pro $|s| < 1$ — neboli pro $\alpha < \frac{1}{\sqrt{2}}$

b) Řada (40) konverguje tím rychleji, čím větší je h. Proto je pro velké hodnoty h daleko výhodnější nežli (39), kde rychlost konvergence závisí na h velmi málo.

3,621. Rekurentní vztahy mezi Laplaceovými koeficienty

Derivujeme rozvoj

$$[1 + \alpha^2 - \alpha(\vartheta + \vartheta^{-1})]^{-\frac{\nu}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{h=-\infty}^{\infty} b_\nu^{(h)} . \vartheta^h$$

který okamžitě vyplývá z (36) a (37), podle ϑ! Dostaneme vztahy

$$\frac{1}{2} \nu \alpha (1 - \vartheta^{-2}) \sum_{h=-\infty}^{\infty} b_\nu^{(h)} . \vartheta^h = [1 + \alpha^2 - \alpha(\vartheta + \vartheta^{-1})] \sum_{h=-\infty}^{\infty} h . b_\nu^{(h)} \vartheta^{h-1}$$

$$\frac{1}{2} \nu \alpha (1 - \vartheta^{-2}) \sum_{h=-\infty}^{\infty} b_{\nu+2}^{(h)} \vartheta^h = \sum_{h=-\infty}^{\infty} h . b_\nu^{(h)} . \vartheta^{h-1} \tag{42}$$

Z řad (42) obdržíme srovnáním koeficientů u ϑ^h rekurentní vztahy

$$b_\nu^{(h+1)} = (\alpha + \alpha^{-1}) . \frac{2h}{2h - \nu + 2} b_\nu^{(h)} - \frac{2h + \nu - 2}{2h - \nu + 2} b_\nu^{(h-1)} \tag{43}$$

Odtud je vidět, že známe-li při daném ν dva Laplaceovy koeficienty, můžeme určit všechny ostatní $b_\nu^{(h)}$.

Z druhého vztahu (42) vyplývá

$$\frac{1}{2} \nu . \alpha [b_{\nu+2}^{(h-1)} - b_{\nu+2}^{(h+1)}] = h . b_\nu^{(h)}$$

a zcela obdobně

$$(1 + \alpha^2) b_{\nu+2}^{(h)} - \alpha . b_{\nu+2}^{(h-1)} - \alpha . b_{\nu+2}^{(h+1)} = b_\nu^{(h)}$$

Z posledních dvou identit vyplývá po jednoduchých úpravách

$$\nu . (1 - \alpha)^2 [b_{\nu+2}^{(h)} + b_{\nu+2}^{(h+1)}] = (\nu + 2h) b_\nu^{(h)} - (2h - \nu + 2) b_\nu^{(h+1)}$$

$$\nu . (1 + \alpha)^2 [b_{\nu+2}^{(h)} - b_{\nu+2}^{(h+1)}] = (\nu + 2h) b_\nu^{(h)} + (2h - \nu + 2) b_\nu^{(h+1)} \tag{44}$$

Z (44) je vidět, že známe-li Laplaceovy koeficienty pro libovolné ν_0, můžeme určit $b_\nu^{(h)}$ pro všechna ostatní ν. Spojíme-li toto tvrzení s důsledkem (37), můžeme říci, že **znalost libovolných dvou Laplaceových koeficientů stačí k určení všech ostatních.**

Poznámka:

Existují tabulky k určení Laplaceových koeficientů (např. Brown — Brouwer: "Tables for development of the disturbing function". Cambridge 1913).

3,622. Určení Laplaceových koeficientů pomocí určitého integrálu

Z teorie Fourierových rozvojů vyplývá:

$$b_\nu^{(h)} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (1 + \alpha^2 - 2.\alpha.\cos\Theta)^{-\frac{\nu}{2}}.\cos(h\,\Theta).d\Theta \tag{45}$$

Existuje celá řada metod, jak integrál typu (45) přetransformovat. Poněvadž však známe rekurentní formule (43) a (44), omezíme se pouze na určení koeficientů $b_1^{(0)}$ a $b_1^{(1)}$, kde aplikujeme Laplaceovu transformaci

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\sin\Theta}{\cos\Theta - \alpha} \tag{46}$$

Poněvadž platí

$$\sin\psi = \operatorname{tg}\psi.(1 + \operatorname{tg}^2\psi)^{-\frac{1}{2}} = \sin\Theta.(1 + \alpha^2 - 2.\alpha.\cos\Theta)^{-\frac{1}{2}}$$

$$(1 - \alpha^2.\sin^2\psi)^{-\frac{1}{2}} = (1 + \alpha^2 - 2.\alpha.\cos\Theta)^{\frac{1}{2}}.(1 - \alpha.\cos\Theta)^{-1}$$

$$d\psi = (1 - \alpha.\cos\Theta).(1 + \alpha^2 - 2.\alpha.\cos\Theta)^{-1}.d\Theta$$

vyplývá z rovnice (45):

$$b_1^{(0)} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \alpha^2\sin^2\psi}} = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \alpha^2\sin^2\psi}}$$

$$b_1^{(1)} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (1 + \alpha^2 - 2.\alpha.\cos\Theta)^{-\frac{1}{2}}.\cos\Theta.d\Theta =$$

$$= \frac{2\alpha}{\pi}\int_0^\pi (1 + \alpha^2 - 2.\alpha.\cos\Theta)^{-\frac{3}{2}}.\sin^2\Theta.d\Theta =$$

$$= \frac{4\alpha}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\psi\,d\psi}{\sqrt{1-\alpha^2.\sin^2\psi}} = \frac{4}{\pi\alpha}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\psi}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\psi}\;d\psi\right]$$

takže můžeme napsat výsledné vztahy

$$b_1^{(0)} = \frac{4}{\pi}F\left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$b_2^{(1)} = \frac{4}{\pi\alpha}\left[F\left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right) - E\left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right)\right] \tag{47}$$

kde F značí úplný eliptický integrál prvého druhu,
E značí úplný eliptický integrál druhého druhu.

Poněvadž existují velmi přesné tabulky eliptických integrálů a kromě toho je lze vypočíst z rychle konvergujících řad, slouží vztahy (47) k určení Laplaceových koeficientů nejčastěji.

3,63. ROZVOJE PERTURBAČNÍ FUNKCE V PŘÍPADĚ KRUHOVÝCH DRAH

Je-li excentricita drah obou planet rovna nule, platí

$$r = a \qquad w \equiv \pi + v = \lambda \quad *) \tag{48}$$

Dále položme

$$L = \Pi + M = \lambda - N - \Omega$$

a zcela stejně pro rušící planetu.

Místo (31) můžeme psát

$$\begin{aligned} \Delta^{-1} &= \sum_{\varrho=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{\varrho} (4\sigma^2 aa' \sin L.\sin L')^{\varrho} \Delta_0^{-2\varrho-1} = \\ &= \Delta_0^{-1} - 2.\sigma^2.a.a'.\sin L.\sin L'.\Delta_0^{-3} + \\ &\quad + 6.\sigma^4.a^2.a'^2.\sin^2 L.\sin^2 L'.\Delta_0^{-5} - \\ &\quad - 20.\sigma^6.a^3.a'^3.\sin^3 L.\sin^3 L'.\Delta_0^{-7} + \ldots \end{aligned} \tag{49}$$

Z rozvoje (49) je vidět, že ve všech jeho členech se vyskytují činitelé typu

$$(a.a')^{\frac{1}{2}(\nu-1)}.\Delta_0^{-\nu}$$

kde ν je postupně rovno všem lichým číslům. Dále budeme v této kapitole vždy předpokládat, že $a < a'$. Zavedeme

$$\alpha = \frac{a}{a'} \qquad \Theta = L' - L \tag{50}$$

Potom vzhledem k (36) platí

$$\begin{aligned} (a.a')^{\frac{1}{2}(\nu-1)}.\Delta_0^{-\nu} &= a'.\alpha^{\frac{1}{2}(\nu-1)}.(1 + \alpha^2 - 2.\alpha.\cos\Theta)^{-\frac{\nu}{2}} = \\ &= \frac{1}{2}\, a'^{-1}. \sum_{h=-\infty}^{\infty} c_\nu^{(h)}.\cos(h.\Theta) \end{aligned} \tag{51}$$

kde $c_\nu^{(h)} = \alpha^{\frac{1}{2}(\nu-1)}.b_\nu^{(h)}.b_\nu^{(h)}$ jsou Laplaceovy koeficienty z minulého oddílu.

Dále:

$$\begin{aligned} 2.\sin L.\sin L' &= \cos(L' - L) - \cos(L' + L) \\ 8.\sin^2 L.\sin^2 L' &= 2 - 2.\cos 2L - 2.\cos 2L' + \cos 2(L' + L) + \\ &\quad + \cos 2(L' - L) \end{aligned}$$

*) Perihely v případě kruhových drah nutno chápat jako body, od nichž měříme anomálie. Veličiny L a L' mají v případě kruhových drah analogický význam jako W a W' u eliptických drah.

$$32.\sin^3 L.\sin^3 L' = 9.\cos(L'-L) - 9.\cos(L'+L) + 3.\cos(3L+L') - 3.\cos(3L-L') + 3.\cos(3L'+L) - 3.\cos(3L'-L) + \cos 3(L'-L) - \cos 3(L'+L)$$

. . . .

Abychom dostali jednotlivé sčítance rozvoje (49), musíme každý z činitelů (51) znásobit jedním z právě uvedených výrazů. Označme $\varkappa$ libovolnou lineární kombinací (s celočíselnými koeficienty) veličin L a L'. Poněvadž

$$\cos\varkappa.\sum_{h=-\infty}^{\infty} c_\nu^{(h)}.\cos(h\Theta) = \frac{1}{2}\sum_{h=-\infty}^{\infty} c_\nu^{(h)}.\cos(h\Theta+\varkappa) + \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{\infty} c_\nu^{(h)}.\cos(h\Theta-\varkappa) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} c_\nu^{(h)}.\cos(h\Theta+\varkappa)$$

můžeme napsat rozvoj hlavní části perturbační funkce ve formě řady:

$$\Delta^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{h=-\infty}^{\infty} \sigma^{2j}.Q_{jh}^{*}.\cos[(h+j)L' - (h-j)L] \tag{52}$$

kde $\sigma = \sin\frac{J}{2}$. Koeficienty Q_{jh}^* závisí na a' a na Laplaceových koeficientech. Zpravidla vystačíme s těmito rozvoji

$$a'.Q_{0h}^* = \frac{1}{2}c_1^{(h)} - \frac{1}{2}\sigma^2.c_3^{(h-1)} + \frac{3}{8}\sigma^4\left[c_5^{(h-2)} + 2.c_5^{(h)}\right] - \frac{5}{16}.\sigma^6.[c_7^{(h-3)} + 9.c_7^{(h-1)}] + \dots$$

$$a'.Q_{1h}^* = \frac{1}{2}c_3^{(h)} - \frac{3}{4}\sigma^2.[c_5^{(h-1)} + c_5^{(h+1)}] + \frac{15}{16}.\sigma^4.[c_7^{(h-2)} + 3.c_7^{(h)} + c_7^{(h+2)}] - \dots$$

$$a'.Q_{2h}^* = \frac{3}{8}c_5^{(h)} - \frac{15}{16}.\sigma^2[c_7^{(h-1)} + c_7^{(h+1)}] + \dots$$

$$a'.Q_{3h}^* = \frac{5}{16}c_7^{(h)} - \dots$$

Rozvoje druhých částí perturbační funkce vypočteme takto

$$a'.R_1 = \alpha(1-\sigma^2).\cos(L'-L) + \alpha.\sigma^2.\cos(L'+L)$$
$$a'.R_1' = \alpha^{-2}(1-\sigma^2).\cos(L'-L) + \alpha^{-2}.\sigma^2.\cos(L'+L) \tag{52'}$$

Z (52) a (52)' vyplývá závěr: Pohybují-li se kolem centrálního tělesa dvě planety po kruhových drahách, můžeme rozvoj perturbační funkce napsat ve tvaru:

$$R = k^2.m'.\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{h=-\infty}^{\infty}\sigma^{2j}.Q_{jh}.\cos[(h+j)L' - (h-j)L]$$

$$R' = k.m\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{h=-\infty}^{\infty}\sigma^{2j}.Q_{jh}'.\cos[(h+j)L' - (h-j)L] \tag{53}$$

kde

pro funkci R	pro funkci R'
$Q_{01} = Q^*_{01} - \alpha\,(1 - \sigma^2)$	$Q'_{01} = Q^*_{01} - \alpha^{-2}\,(1 - \sigma^2)$
$Q_{0(-1)} = Q^*_{0(-1)} - \alpha\,(1 - \sigma^2)$	$Q'_{0(-1)} = Q^*_{0(-1)} - \alpha^{-2}(1 - \sigma^2)$
$Q_{10} = Q^*_{10} - \alpha$	$Q'_{10} = Q^*_{10} - \alpha^{-2}$
a všude jinde	a všude jinde
$Q_{jh} = Q^*_{jh}$	$Q_{jh} = Q^*_{jh}$

Poněvadž druhé části perturbační funkce obsahují pouze periodické členy, můžeme vyslovit závěr, že sekulární členy mohou vznikat pouze od hlavní části perturbační funkce [je-li argument goniometrické funkce v (47) roven nule].

3,64. ROZVOJE PERTURBAČNÍ FUNKCE PRO PŘÍPAD ELIPTICKÝCH DRAH (NEWCOMBOVA METODA)

V tomto oddíle nalezneme rozvoj perturbační funkce pro případ eliptických drah obou planet za použití výsledků z oddílu 3,63. Vzhledem k (27), (30), (31) a (35) budeme R a R' psát ve tvaru

$$\begin{aligned} R &= {}^*F\,(r, r', W, W') = F\,(\ln r, \ln r', W, W') \\ R' &= {}^*F'\,(r, r', W, W') = F'\,(\ln r, \ln r', W, W') \end{aligned} \qquad (54)$$

Podle (33) a (48) můžeme psát

$$W = L + (v - M) = L + f \qquad (55)$$

Dále položme

$$\ln r = \ln a + ln\frac{r}{a} = ln\, a + \varrho \qquad (55)'$$

a obdobně pro čárkované veličiny.

Platí

$$f = \sum_{j=-\infty}^{\infty} C_j . \sin jM \qquad (56)$$

kde $j \neq 0$ a podle (5, 28)

$$C_j = \frac{1}{j}\left[e . J_{j-1}\,(je) + 2\sum_{h=1}^{\infty} \beta^h\, J_{j-h}\,(je)\right] \qquad \beta = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$$

popřípadě podle (5, 29)

$$\sin f = \sum_{j=-\infty}^{\infty} K_j . \sin jM \qquad (56)'$$

kde

$$K_j = \cos\varphi \left[J_{j-2}\,(je - e).\sin^2\frac{\varphi}{2} - J_j\,(je - e).\cos^2\frac{\varphi}{2} \right] \ldots j \neq 1$$

$$K_1 = e$$

Dále podle [III.] platí

$$\varrho = -e.\cos M + e^2\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\cos 2M\right) + $$

$$+ e^3\left(\frac{3}{8}\cos M - \frac{17}{24}\cos 3M\right) + \ldots \qquad (56)''$$

Nyní před námi stojí úkol rozvinout funkce (54) v řady podle mocnin e a e'. Poněvadž počet členů rozvojů při přechodu k vyšším stupňům velmi rychle roste, nalezneme sice obecný návod pro rozvoj perturbační funkce, ale při hledání konkrétních tvarů jednotlivých členů se omezíme na případ, kdy excentricity a sklony drah jsou tak malé veličiny, že pro požadovanou přesnost se stačí omezit na členy druhého stupně.

Nyní se budeme věnovat výrazu (54). Taylorův rozvoj funkce více proměnných můžeme v operátorové formě vyjádřit takto

$$A\,(x_\beta + \Delta x_\beta) = \exp\left(\sum_\beta \frac{\partial}{\partial x_\beta}\Delta x_\beta\right).A\,(x_\beta)$$

kde $\beta = 1, 2, \ldots$ x_β jsou libovolné proměnné veličiny. Aplikujeme-li tento vztah na funkce (54), můžeme s pomocí (55) a (55)′ napsat

$$R = \exp\,(\varrho.D + \varrho'.D' + f.D_1 + f'.D'_1).F\,(\ln a, \ln a', L, L') \qquad (57)$$

kde

$$D = \frac{\partial}{\partial(\ln a)}; \qquad D' = \frac{\partial}{\partial(\ln a')}$$

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial L} = j.\Lambda.\frac{\partial}{\partial\Lambda}; \qquad D' = \frac{\partial}{\partial L'} = j.\Lambda'.\frac{\partial}{\partial\Lambda'} \qquad (58)$$

$$\Lambda = \exp\,(jL); \qquad \Lambda' = \exp\,(jL')$$

přičemž symbolem j je označena imaginární jednotka. Poněvadž příslušné formule pro R' by vždy byly naprosto analogické, budeme se v dalším zabývat pouze funkcí R.

Funkce $F(\ln a, \ln a', L, L')$ z (57) je dána rozvojem (53), který lze s pomocí (58) napsat ve tvaru:

$$\sum_{s, s'} H\,(s, s').\Lambda^s.\Lambda'^{s'} = \sum \mathfrak{R} \qquad (59)$$

kde $\mathfrak{R}$ je symbolem obecného členu rozvoje (59).

Z (58) a (59) vyplývá

$$D_1.\mathfrak{R} = j.s.\mathfrak{R}; \qquad D'_1.\mathfrak{R} = j.s'.\mathfrak{R}$$

takže

$$\exp(\varrho.D + \varrho'.D' + f.D_1 + f'.D'_1) = \exp(\varrho.D + \varrho'.D' + j.f.s + j.f'.s') = \\ = \exp(\varrho.D + j.f.s).\exp(\varrho'.D' + j.f'.s')$$

Vzhledem k (56) platí:

$$\exp(\varrho.D + j.f.s) = \sum_{\beta=0}^{\infty} l_\beta.e^\beta$$

$$\exp(\varrho'.D' + j.f'.s') = \sum_{\beta=0}^{\infty} l'_{\beta'}e'^{\beta'} \qquad (61)$$

kde l_β jsou závislé na D, s, M,
$l'_{\beta'}$ jsou závislé na D', s', M'.

Abychom určili hodnoty veličin l_β, zavedeme substituci $\mu = \exp(j.M)$ a s pomocí (56), (56)′, (56)″ uvážíme

$$\varrho = -e\left(\frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\mu^{-1}\right) + e^2\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{8}\mu^2 - \frac{3}{8}\mu^{-2}\right) + \dots$$

$$\sqrt{-1}\,f = e(\mu - \mu^{-1}) + e^2\left(\frac{5}{8}\mu^2 - \frac{5}{8}\mu^{-2}\right) + e^3(\dots) =$$

$$= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{j}\left\{J_j(je) + \sum_{h=1}^{\infty}\beta^h[J_{j-h}(je) + J_{j+h}(je)]\right\}\mu^j \qquad {}^{*)}$$

kde $j \neq 0$,
takže

$$l_0 = 1$$

$$l_1 = \Pi_1^{(1)}.\mu + \Pi_{-1}^{(1)}\mu^{-1} \qquad (62)$$

. . . .

$$l_\beta = \sum_0^\beta \prod\nolimits_{\beta-2\gamma}^{(\beta)}.\mu^{\beta-2\gamma}$$

kde $\Pi_\alpha^{(\beta)}$ je polynom β-ého stupně vzhledem k D a s. Můžeme tedy říci, že $\Pi_\alpha^{(\beta)}$ je návod k řadě derivací (nejvýše β-ého řádu) funkce (59) podle ln$a$. Pro koeficienty $l'_{\beta'}$ bychom mohli vyslovit zcela analogické tvrzení. Poněvadž operátor $\Pi_\alpha^{(\beta)}$ splňuje identitu

$$\prod\nolimits_{-\alpha}^{(\beta)}(D, s) = \prod\nolimits_{\alpha}^{(\beta)}(D, -s)$$

platí

$$\mathfrak{R}_\beta = e^\beta.\sum_{\gamma=-\beta}^{\beta} P_\gamma^{(\beta)}(s, s').\Lambda^s.\Lambda'^{s'}.\mu^\gamma \qquad (63)$$

*) v tomto tvaru je rozvoj publikován poprvé.

kde, $\mathfrak{R}_\beta$ je člen rozvoje veličiny $\mathfrak{R}$ u mocniny e^β,
γ nabývá hodnot $-\beta, -\beta + 2, \ldots, \beta - 2, \beta$,

$P_\gamma^{(\beta)}(s, s') = \Pi_\gamma^{(\beta)} . H(s, s')$

Znásobíme-li (63) druhým operátorem (61) obdržíme

$$\mathfrak{R}_{\beta\beta'} = e^\beta . e'^{\beta'} \sum_{\gamma=-\beta'}^{\beta'} \prod_{(0,\gamma')}^{(0,\beta')} \sum_{\gamma=-\beta}^{\beta} P_\gamma^{(\beta)}(s, s') . \Lambda^s . \Lambda'^{s'} . \mu^\gamma . \mu'^{\gamma'} \tag{64}$$

Postupné použití operátorů $\Pi_\gamma^{(\beta)}$ a $\Pi_{(0,\gamma')}^{(0,\beta')}$, nahradíme jediným operátorem

$$\prod_{(\gamma,\gamma')}^{(\beta,\beta')} = \prod_\gamma^{(\beta)} \prod_{(0,\gamma)}^{(0,\beta')} \tag{65}$$

a obdobně jako v (63) zavedeme

$$\prod_{(\gamma,\gamma')}^{(\beta,\beta')} H(s, s') = P_{(\gamma,\gamma')}^{(\beta,\beta')}(s, s') \tag{66}$$

takže můžeme místo (57) napsat perturbační funkci ve tvaru

$$R = \sum e^\beta . e'^{\beta'} . P_{(\gamma,\gamma')}^{(\beta,\beta')}(s, s') . \cos(s . L + s' . L' + \gamma . M + \gamma' . M') \tag{67}$$

kde β a β' nabývají nezáporných celočíselných hodnot a ostatní indexy mohou být rovny všem celým číslům. $P_{(\gamma,\gamma')}^{(\beta,\beta')}(s, s')$ je funkcí $\sigma^2 = \sin^2 \frac{1}{2}$ a velkých poloos obou planet.

Poznámky:

a) Z (53) a (59) vyplývá, že $s + s'$ je vždy sudé číslo.

b) Ze zavedení operátorů $\Pi_\gamma^{(\beta)}$ vyplývá, že $\beta - |\gamma|$ a $\beta' - |\gamma'|$ jsou celá nezáporná čísla.

Jestliže Φ je obecný člen rozvoje perturbační funkce (53), který je homogenní funkcí (—1)-ho řádu vzhledem k velkým poloosám, musí podle Eulerovy věty platit

$$a \frac{\partial\Phi}{\partial a} + a' \frac{\partial\Phi}{\partial a'} = -\Phi .$$

Neboli

$$\frac{\partial\Phi}{\partial(\ln a)} + \frac{\partial\Phi}{\partial(\ln a')} = -\Phi .$$

takže s pomocí (58) dostaneme

$$D + D' = -1$$

a operátor $\Pi_{(\gamma,\gamma')}^{(\beta,\beta')}$ můžeme s pomocí (65) napsat ve formě součinu:

$$\prod_{(\gamma,\gamma')}^{(\beta,\beta')} = \prod_\gamma^{(\beta)}(D, s) . \prod_{\gamma'}^{(\beta')}(-1 - D, s')$$

Nalezneme nyní vyjádření rozvoje perturbační funkce z (67) ve tvaru podobném (53). Z úvah, jež vedly od rozvoje (53) k rozvoji (67) je vidět, že tento rozvoj můžeme přepsat na tvar

$$R = \sum K_{(s, s', \gamma, \gamma')}^{(\beta, \beta', \vartheta)} (a, a') . \sigma^{2\vartheta} . e^{\beta} . e'^{\beta'} . \cos(s . L' + s' . L' + \gamma . M + \gamma' . M') \ldots \quad (68)$$

kde s, s', γ, γ' jsou celá čísla

β, β' ϑ jsou celá nezáporná čísla.

Platí:

a) $s + s'$ je sudé číslo

b) Stupeň obecného členu $(\beta + \beta' + 2\vartheta)$ je roven nebo převyšuje o sudé číslo výraz $|s + s'| + |\gamma| + |\gamma'|$.

Rozvoj (68) je formálně nejjednodušším z existujících rozvojů perturbační funkce, které ji určují jako explicitní funkci času (střední anomálie). Pro praktické použití se však lépe hodí jiné formy rozvojů, jimiž se budeme zabývat v následujícím oddíle a v prvém paragrafu příští kapitoly.

V oddíle 3,63 jsme odvodili, že při kruhových drahách obou planet vznikají sekulární perturbace jen z hlavní části perturbační funkce. Aplikace operátorů (58) na (52)' může však dát pouze periodické členy, takže můžeme i pro eliptické dráhy vyslovit tvrzení, že sekulární perturbace můžeme získat pouze z hlavní části perturbační funkce.

3,65. ROZVOJ PERTURBAČNÍ FUNKCE POMOCÍ ELEMENTŮ PLANETÁRNÍCH DRAH

Abychom mohli použít Lagrangeových rovnic ve tvaru (2,11), musíme vyjádřit perturbační funkci pomocí elementů drah.

Podle obr. 3 na straně 64 a podle vztahů (33) a (48) můžeme psát:

$$s . L + s' . L' + \gamma . M + \gamma' . M' = G + \frac{1}{2} \varkappa_1 (N + N') + \frac{1}{2} \varkappa_2 (N - N') \quad (69)$$

kde

$$G = (s + \gamma) \lambda + (s' + \gamma') \lambda - \gamma . \Pi - \gamma' . \Pi' + \frac{1}{2} \varkappa_1 (\Omega + \Omega') + \frac{1}{2} \varkappa_2 (\Omega - \Omega')$$

$$\varkappa_1 = - s - s'; \quad \varkappa_2 = - s + s'$$

Z obrázku 3 však můžeme po jednoduchých úpravách odvodit (viz například [III.] kapitola X):

$$\sigma . \exp \left[\frac{1}{2} j (N + N') \right] = \sin \frac{i'}{2} . \cos \frac{i}{2} . \exp \left[\frac{1}{2} j (\Omega' - \Omega) \right] - \\ - \sin \frac{i}{2} . \cos \frac{i'}{2} . \exp \left[\frac{1}{2} j (\Omega - \Omega') \right]$$

$$\sqrt{1 - \sigma^2} . \exp \left[\frac{1}{2} j (N - N') \right] = \cos \frac{i}{2} . \cos \frac{i'}{2} . \exp \left[\frac{1}{2} j (\Omega' - \Omega) \right] - \\ - \sin \frac{i}{2} . \sin \frac{i'}{2} . \exp \left[\frac{1}{2} j (\Omega - \Omega') \right] \quad (70)$$

A dále:

$$\sigma^2 = \sin^2\frac{i'}{2}.\cos^2\frac{i}{1} + \cos^2\frac{i'}{2}.\sin^2\frac{i}{2} - \frac{1}{2}\sin i.\sin i'.\cos(\Omega' - \Omega)$$

$$1 - \sigma^2 = \sin^2\frac{i}{2}.\sin^2\frac{i'}{2} + \cos^2\frac{i}{2}.\cos^2\frac{i'}{2} + \frac{1}{2}\sin i.\sin i'.\cos(\Omega' - \Omega) \tag{71}$$

kde $\sigma = \sin\frac{J}{2}$, j je imaginární jednotka, J vzájemný sklon obou drah.

S pomocí (70) můžeme vyjádřit výrazy

$$\sigma^{\varkappa_1}.\sin\frac{1}{2}\varkappa_1(N + N'); \qquad \sigma^{\varkappa_1}.\cos\frac{1}{2}\varkappa_1.(N + N')$$

$$(1 - \sigma^2)^{\varkappa_2}.\sin\frac{1}{2}\varkappa_2(N - N'); \qquad (1 - \sigma^2)^{\varkappa_2}.\cos\frac{1}{2}\varkappa_2(N - N') \tag{72}$$

Znásobíme-li například prvý výraz (72) $(2\vartheta - \varkappa_1)$-tou mocninou prvého vztahu (71), dostaneme vyjádření funkce $\sigma^{2\vartheta}.\sin\frac{1}{2}\varkappa_1(N + N')$ pomocí elementů drah obou planet. Obdobně bychom postupovali i v ostatních případech, takže můžeme rozvoj (68) přepsat na tvar

$$R = \sum A.e^{\beta}.e'^{\beta'}.\varrho^{\delta}.\varrho'^{\delta'}.\cos H \tag{73}$$

kde $A = A(a, a')$ závisí na sčítacích indexech, $\varrho = \sin\frac{i}{2}$, $\varrho' = \sin\frac{i'}{2}$, $\mu = -\gamma - s$, $\mu' = -\gamma' - s'$,

$$H = \mu\lambda + \mu'\lambda' + \gamma\pi + \gamma'\pi' + \nu\Omega + \nu'\Omega'$$

Sčítací indexy β, β', δ, δ' nabývají nezáporných celočíselných hodnot. Sčítací indexy μ, μ', γ, γ', ν, ν' nabývají celočíselných hodnot.

Poněvadž podle (1,7) jest perturbační funkce invariantní vůči volbě počátku souřadnic (kartézských), musí být

$$\Xi = \mu + \mu' - \gamma - \gamma' - \nu - \nu' = 0$$

[V opačném případě by při změně počátku o X nastala změna argumentu goniometrické funkce o $\Xi.X$.]

Můžeme tedy říci, že argument H závisí na pěti sčítacích indexech.

3,66. PRVÉ ČLENY ROZVOJE PERTURBAČNÍ FUNKCE

K určení rozvoje (67), je nutná znalost koeficientů $P^{(\beta,\beta')}_{(\gamma,\gamma')}(s, s')$ z (66). Ukazuje se, že je možné vyjádřit tyto koeficienty jako funkce Laplaceových koeficientů. Poněvadž počet jednotlivých členů velmi rychle roste, omezíme se na veličiny druhého stupně. Třebaže odvozování následujících rozvojů je principiálně velmi jednoduché, představuje konkrétní provedení tohoto úkolu dosti zdlouhavou práci. Uvedeme pouze rozvoj, který za předpokladu poznámky c) na konci oddílu 3,64 uvádí SUBBOTIN:

Pro hlavní část perturbační funkce platí

$$
\begin{aligned}
a'.\Delta^{-1} = \sum \Big[& \frac{1}{2} c_1^{(h)} - \frac{1}{2} \sigma^2 c_3^{(h-1)} + \frac{1}{8} (e^2 + e'^2).(-4.h^2 + D + \\
& + D^2).c_1^{(h)} \Big].\cos \nu_h + \frac{1}{2} e \sum (-2h - D).c_1^{(h)}.\cos (\nu_h + M) + \\
& + \frac{1}{2} e' \sum (2h + 1 + D).c_1^{(h)}.\cos (\nu_h + M') + \\
& + \frac{1}{8} e^2 \sum [4.h^2 - 5.h + (4.h - 3).D + D^2].c_1^{(h)}.\cos (\nu_h + 2.M) + \\
& + \frac{1}{4} e.e' \sum (4.h^2 + 2.h - D - D^2).c_1^{(h)}.\cos (\nu_h - M + M') + \\
& + \frac{1}{4} e.e' \sum [-4.h^2 - 2.h - (4.h + 1).D - D^2].c_1^{(h)}.\cos (\nu_h + M + M') + \\
& + \frac{1}{8} e'^2 \sum [4.h^2 + 9h + 4 + (4.h + 5).D + D^2].c_1^{(h)}.\cos (\nu_h + 2.M') + \\
& + \frac{1}{2} \sigma^2 \sum c_3^{(h-1)}.\cos (\nu_h + 2.L) + \ldots \qquad (74)
\end{aligned}
$$

kde

$$
\nu_h = h\,(L' - L)\,; \qquad D = \frac{\partial}{\partial(\ln \alpha)}\,; \qquad \sum \text{ značí } \sum_{h=-\infty}^{\infty}
$$

Obdobnými úvahami bychom dospěli k závěru, že druhou část perturbační funkce lze vyjádřit ve tvaru

$$
\begin{aligned}
\alpha^{-1}.a'.R_1 = & \left(1 - \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} e'^2 - \sigma^2\right).\cos (L' - L) - \\
& - \frac{3}{2} e.\cos (L' - L + M) + \frac{1}{2} e.\cos (L' - L - M) + \\
& + 2.e'.\cos (L' - L + M') + \\
& + \frac{1}{8} e^2.\cos (L' - L + 2.M) + \frac{3}{8} e^2.\cos (L' - L - 2.M) + \\
& + e.e'.\cos (L' - L + M' - M) - 3.e.e'.\cos (L' - L + M + M') + \\
& + \frac{1}{8} e'^2.\cos (L' - L - 2.M') + \frac{27}{8} e'^2.\cos (L' - L + 2.M') + \\
& + \sigma^2.\cos (L' + L) + \ldots \qquad (75)
\end{aligned}
$$

Popřípadě

$$
\begin{aligned}
\alpha^2.a'.R_1' = & \left(1 - \frac{1}{2} e - \frac{1}{2} e'^2 - \sigma^2\right).\cos (L' - L) + \\
& + 2.e.\cos (L' - L - M) -
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{3}{2}\, e'.\cos\,(L'-L-M')+\frac{1}{2}\, e'.\cos\,(L'-L+M')+\\
&+\frac{1}{8}\, e^2.\cos\,(L'-L+2.M)+\frac{27}{8}\, e^2.\cos\,(L'-L-2.M)+\\
&+e.e'.\cos(L'-L+M'-M)-3.e.e'.\cos(L'-L-M-M')+\\
&+\frac{1}{8}\, e'^2.\cos\,(L'-L-2.M)+\frac{3}{8}\, e'^2.\cos\,(L'-L+2.M')+\\
&+\sigma^2.\cos\,(L'+L)+\dots \qquad (75)'
\end{aligned}
$$

S uvedenou přesností byly rozvoje nalezeny už LAGRANGEM a LAPLACEM. Pro přesnost moderních pozorování je však třeba rozvojů, které ještě uvažují členy sedmého stupně. Rozvoje této přesnosti, které platí podnes, publikoval roku 1855 LEVERRIER. Do osmého stupně byly rozšířeny BOQUETEM.

Poznámka:

Rozvoje (75) a (75)' můžeme s pomocí vztahů v dodatku snadno vyjádřit pomocí Besselových funkcí.

4. kapitola

URČOVÁNÍ PERTURBACÍ ELEMENTŮ

4,1 LEVERRIERŮV POSTUP

Známe-li rozvoje perturbační funkce, můžeme přejít k určení odchylek od eliptického pohybu. Principielně k tomu stačí libovolný rozvoj perturbační funkce a odpovídající Lagrangeovy rovnice, mající za základ stejnou soustavu elementů. V paragrafu 3,7 jsme poznali dva způsoby rozvoje perturbační funkce:

1. Rozvoj (3,68), který je sice nejjednodušší, ale jeho použití vyžaduje pracnou transformaci Lagrangeových rovnic. Další jeho nevýhodou jest, že jednou ze základních veličin je vzájemný sklon drah, který závisí na elementech obou planet.

2. Rozvoj (3,73), který sice obsahuje pouze elementy obou drah jako základní veličiny, ale jeho nalezení je mnohem pracnější, nežli nalezení rozvoje (3,68).

LEVERRIER zvolil mezi oběma dosavadními způsoby určitý kompromis. Podle obrázku 3, zavedl veličiny:

$$
\begin{aligned}
\tau &= \Omega + N = \pi - \Pi; & \tau' &= \Omega' + N' = \pi' - \Pi' \\
\Theta &= \pi + \tau' - \tau; & \Lambda &= \lambda + \tau' - \tau \\
L &= \Lambda - \tau'; & L' &= \lambda' - \tau'
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

kde Π značí délku perihelu od průsečíku drah (viz obr. 3), veličiny λ, Ω atd mají obvyklý význam.

Poněvadž podle (3,68) jest

$$
s.L + s'.L' + \gamma.M + \gamma'.M' = -\gamma.\Lambda - \mu'.\lambda' - \gamma.\Theta - \gamma'.\pi' + 2.g.\tau' \qquad (2)
$$

kde

$$\mu = -s - \gamma; \qquad \mu' = -s' - \gamma'; \qquad g = -\frac{1}{2}(s + s');$$

γ, γ' jsou celočíselné sčítací indexy, přičemž

$$\mu + \mu' + \gamma + \gamma' - 2.g = 0$$

můžeme s pomocí (2) přepsat rozvoj (3,68) na tvar:

$$R = \sum B^*.e^\beta.e'^{\beta'}.\sigma^{2\vartheta}.\cos(\mu.\Lambda + \mu'.\lambda' + \gamma.\Theta + \gamma'.\pi' - 2.g.\tau') \quad (3)$$

kde $B = B(a, a')$ závisí na sčítacích indexech β, β', ϑ, μ, μ', γ, γ' a g.
S pomocí substituce (3,27) můžeme psát

$$R_0 = \sum B.e^\beta.e'^{\beta'}.\sigma^{2\vartheta} \cos(\mu\Lambda + \mu'.\lambda' + \gamma\Theta + \gamma'\pi' - 2g\tau') \quad (3)'$$

kde zřejmě $B^* = k.m'.B$.
Z trojúhelníku ☊ ☊′ N na str. 64 vyplývá po jednoduchých úpravách

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\tau' - \tau) = \frac{\operatorname{tg}\frac{i}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{i'}{2}.\sin(☊' - ☊)}{1 + \operatorname{tg}\frac{i}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{i'}{2}\cdot\cos(☊ - \Omega)} = \quad (4)$$

$$= \operatorname{tg}\frac{i}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{i'}{2}.\sin(☊' - ☊) - \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\frac{i}{2}\cdot\operatorname{tg}^2\frac{i'}{2}.\sin 2(☊' - ☊) + \ldots$$

takže můžeme s pomocí (1) napsat rovnost operátorů

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon} = \frac{\partial}{\partial\lambda} = \frac{\partial}{\delta\Lambda}; \qquad \frac{\partial}{\partial\pi} = \frac{\partial}{\partial\Theta}$$

a (2,11) lze vzhledem k identitě $k_1^2 = n^2.a^3$ přetransformovat takto:

$$\dot a = \frac{2m'}{1+m}\cdot na^2\cdot\frac{\partial R_0}{\partial\Lambda}$$

$$\dot e = -\frac{m'}{1+m}.n.a\left[\operatorname{ctg}\varphi.\frac{\partial R_0}{\partial\Theta} + \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\cos\varphi\frac{\partial R_0}{\partial\Lambda}\right]$$

$$\dot i = -\frac{m'}{1+m}.n\,a.\sec\varphi\left[\operatorname{cosec} i\frac{\partial R_0}{\partial ☊} + \operatorname{tg}\frac{i}{2}\left(\frac{\partial R_0}{\partial\Lambda} + \frac{\partial R_0}{\partial\Theta}\right)\right] \quad (5)$$

$$\dot ☊ = \frac{m'}{1+m}\,na.\sec\varphi.\operatorname{cosec} i\frac{\partial R_0}{\partial i}$$

$$\dot\pi = \frac{m'}{1+m}\,n.a.\operatorname{ctg}\varphi.\frac{\partial R_0}{\partial e} + 2.\sin^2\frac{i}{2}\cdot\dot ☊$$

$$\dot\varepsilon = \frac{m'}{1+m}.na.\left[-2a.\frac{\partial R_0}{\partial a} + \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}.\cos\varphi.\frac{\partial R_0}{\partial e}\right] + 2\sin^2\frac{i}{2}\cdot\dot ☊$$

kde $R = k^2 m' R_0$.

Poněvadž v rozvojích (3) a (3)′ se explicitně nevyskytují veličiny i a Ω, je nutno vyloučit i derivace podle nich, což můžeme nejjednodušším způsobem učinit takto

$$\frac{\partial R_0}{\partial i} = \frac{\partial \tau'}{\partial i}\cdot\frac{\partial R_0}{\partial \tau'} + \frac{\partial(\tau' - \tau)}{\partial i}\left(\frac{\partial R_0}{\partial \Lambda} + \frac{\partial R_0}{\partial \Theta}\right) + \frac{1}{2}\cos\frac{J}{2}\frac{\partial J}{\partial i}\cdot\frac{\partial R_0}{\partial \sigma}$$

$$\frac{\partial R_0}{\partial \Omega} = \frac{\partial \tau'}{\partial \Omega}\cdot\frac{\partial R_0}{\partial \tau'} + \frac{\partial(\tau' - \tau)}{\partial \Omega}\left(\frac{\partial R_0}{\partial \Lambda} + \frac{\partial R_0}{\partial \Theta}\right) + \frac{1}{2}\cos\frac{J}{2}\frac{\partial J}{\partial \Omega}\frac{\partial R_0}{\partial \sigma} \tag{6}$$

Z (3,32) a dalších vztahů, které vyplývají z aplikace základních vět sférické trigonometrie na trojúhelník N Ω Ω' na obr. 3, dostaneme po jednoduchých úpravách

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}J &= \cos(\tau - \Omega).\mathrm{d}i - \cos(\tau' - \Omega').\mathrm{d}i' - \\
&\quad - \sin i'.\sin(\tau' - \Omega').\mathrm{d}(\Omega' - \Omega)\\
\sin J.\mathrm{d}(\tau - \Omega) &= -\cos J.\sin(\tau - \Omega)\,\mathrm{d}i + \sin(\tau' - \Omega')\,\mathrm{d}i' - \\
&\quad - \sin i'\cos(\tau' - \Omega')\,\mathrm{d}(\Omega' - \Omega) \qquad (7)\\
\sin J.\mathrm{d}(\tau' - \Omega') &= -\sin(\tau - \Omega).\mathrm{d}i + \cos J.\sin(\tau' - \Omega')\,\mathrm{d}i' - \\
&\quad - \sin i'.\cos(\tau' - \Omega')\,\mathrm{d}(\Omega' - \Omega)
\end{aligned}$$

Poněvadž $\dfrac{\mathrm{d}i'}{\mathrm{d}i} = 0$, atd, vyplývá z (7)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial(\tau' - \tau)}{\partial i} = -\operatorname{tg}\frac{J}{2}.\sin(\tau - \Omega); \quad \frac{\partial(\tau' - \tau)}{\partial \Omega} = -\frac{1}{\sin J}\\
&\frac{\partial \tau'}{\partial i} = -\frac{\sin(\tau - \Omega)}{\sin J}; \quad \frac{\partial \tau'}{\partial \Omega} = \frac{\sin i'\cos(\tau' - \Omega')}{\sin J} \qquad (8)\\
&\frac{\partial J}{\partial i} = \cos(\tau - \Omega); \quad \frac{\partial J}{\partial \Omega} = \sin i'.\sin(\tau' - \Omega')
\end{aligned}$$

Dosadíme-li (8) do (6) a výsledek do (5), obdržíme výchozí diferenciální rovnice pro určování perturbací Leverrierovou metodou. Pro integraci těchto rovnic zavádí Leverrier celou řadu pomocných veličin. Poněvadž tyto veličiny mají význam pouze pro praktické aplikace Leverrierovy metody, která je propracována do sedmého stupně, nebudeme se jimi zabývat, neboť problematika přesahuje rámec této publikace.

4,11 POZNÁMKY K LEVERRIEROVĚ METODĚ

a) Podle úvah z oddílu 2,24 můžeme všechny elementy z rovnic (5) rozdělit na dvě skupiny. Do prvé patří a, e, i, do druhé Ω, π, ε. Obě skupiny se však odlišují i ve tvaru rozvoje perturbační funkce. Prvá skupina ovlivňuje v rozvojích perturbační funkce stupeň příslušného členu a obecný koeficient [například B v (3)′]. Elementy druhé skupiny vstupují do argumentů goniometrických funkcí. Proto perturbace prvého řádu libovolného elementu prvé skupiny bude mít obecně tvar

$$A.\cos D$$

a v případě druhé skupiny

$$B.\sin.D$$

kde A a B jsou závislé na a, e, e', i, i'; D je zkrácený zápis argumentu goniometrické funkce v (3)'.

b) Protože

$$n = k_1 . a^{-\frac{3}{2}}$$

a sekulární perturbace velké poloosy jsou nulové (do druhého řádu včetně), nemají ani perturbace středního denního pohybu sekulární členy. Sekulární perturbace však má střední délka λ. Poněvadž v praxi zjišťujeme střední pohyb planety podle pozorovaných délek ve dvou různých epochách, změříme tímto způsobem nikoli n, ale $n_1 = n + \varkappa$, kde $\varkappa$ charakterisuje vliv sekulárních perturbací střední délky. Poněvadž však třetí Keplerův zákon platí i pro oskulační elementy, musí být:

$$n_1^2 \, . \, a_1^3 = (n_1 - \varkappa)^2 . a^3 = k_1^2$$

takže

$$a \doteq a_1 \left(1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{\varkappa}{n_1}\right)$$

a teprve veličiny a a $n_1 = n - \varkappa$ mají vlastnosti, které jsme pro ně odvodili v minulých kapitolách.

c) Počítáme-li pro střední délku perturbace druhého nebo vyšších řádů, je nutno v argumentech goniometrických funkcí brát veličinu n. Proto bývá dávána přednost veličině n od samého počátku výpočtů. Tím se však stává, že už v prvé aproximaci uvažujeme část perturbací druhého řádu. Je však nutno zdůraznit, že tato záměna je možná pouze v argumentech goniometrických funkcí. V koeficientech rovnic (5) a v podobných případech je vždy nutno brát veličinu $n = n_1 - \varkappa$.

d) V ročenkách a jiných tabulkách jsou uváděny veličiny n_1 a a_1.

4,2 KVALITATIVNÍ METODY V NEBESKÉ MECHANICE A JEJICH UŽITÍ

Jak jsme už ukázali, je přímé řešení problému n těles pro $n \geqq 3$ nemožné. Vznikly proto snahy řešit obecné rovnice buď metodou numerické integrace, nebo pomocí řad. Podle toho dělíme metody na analytické a numerické. Poněkud stranou stojí metody, které problém v určitém smyslu transformují a potom příslušné zjednodušené schema řeší. Takovéto metody nazýváme kvalitativní. Tím, že vybereme určité schema s neúplným počtem parametrů (které však je třeba vybírat velmi pečlivě, neboť na jejich volbě do velké míry závisí kvalita výsledků) nemůžeme sice získat obecné řešení, ale některé závěry mohou být velmi cenné.

Mezi kvalitativními metodami zaujímá význačné místo problém finálních pohybů. Problémem finálních pohybů nazýváme otázku, jak se budou měnit vzájemné vzdálenosti těles soustavy pro $t \to \infty$. Existuje celá řada metod studia finálních pohybů, počínaje Jacobiho pojednáními a konče moderními metodami (metoda rozměrů, metoda spojité indukce, metoda invariantní míry atd). Touto problematikou se zabývali z novějších autorů Chazy, Chilmi a celá řada jiných.

Dalším častým postupem je nahrazení pohybující se soustavy určitým nepohybujícím se modelem a v takto vzniklém statickém gravitačním poli zkoumat pohyb uvažované planety. Tak například Fatou zkoumal omezený problém tří těles tak, že uvažoval pohyb hmotného bodu s nekonečně malou hmotou v gravitačním poli, které vytvoří Slunce a několik eliptických prstenců (s hustotou odpovídající druhému Keplerovu zákonu) kolem něj se nalézajících. Tento postup je do určité míry zobecněním Gauss-Hillovy metody pro určení sekulárních perturbací prvého řádu. Tato metoda stojí na hranici kvalitativních metod, neboť určuje sekulární perturbace s libovolnou přesností (pokud lze zanedbat vzájemné působení rušících planet). Gaussova metoda bude obsahem zbývající části tohoto paragrafu.

4,21 GAUSSOVA METODA — ZÁKLADNÍ ÚVAHY

Ve všech úvahách minulého paragrafu bylo předpokládáno, že je k disposici náležitě přesný rozvoj perturbační funkce. I když je problém nalezení takového rozvoje principielně řešitelný s libovolnou přesností, přeci je praktické dosažení tohoto cíle velmi obtížné. Další nevýhoda předešlého postupu spočívá v tom, že ne všechny členy rozvojů perturbací elementů potřebujeme znát stejně přesně. Nejpřesněji je třeba určit sekulární členy (chyba narůstá přinejmenším úměrně s časem). Při praktické aplikaci teorie perturbací (pro potřeby ročenek atd) se zpravidla omezujeme na členy prvého řádu. Pomocí rozvojů perturbační funkce se s menší přesností určují periodické členy, kdežto sekulární perturbace se mohou nalézt pomocí Gaussovy metody, kde vůbec není třeba znát rozvoje perturbační funkce.

Pomocí Gaussovy metody určujeme sekulární členy integrálů rovnic (2,16). Zanedbáme-li vzájemné působení rušících planet (to jest — pohyb rušících planet bude pokládán za nerušený), můžeme zkoumat působení každé z nich zvlášť a předpokládat platnost principu superposice. V dalším bude proto vždy předpokládáno, že působí jediná rušící planeta. Jedná se o podobnou aproximaci, jako když jsme hledali rozvoje perturbační funkce v paragrafu 3,6. Poněvadž podle oddílu 3,64 vznikají sekulární perturbace pouze z hlavní části perturbační funkce, budeme v tomto paragrafu pod pojmem perturbační funkce chápat veličinu

$$R^{(0)} = m' . \Delta^{-1}.$$

Parciální derivace $R^{(0)}$ v příslušných směrech jsou rovny rušícím zrychlením S_2, T_2, W_2.

Podle (2,16) a vzhledem k existenci rozvojů perturbační funkce lze psát například

$$\dot{i} = [\dot{i}]_{00} + \sum_{j, j'} A_{j, j'} . \cos (j . M + j' . M' + H_{j, j'}) \tag{9}$$

kde $A_{j,j'}$ a $H_{j,j'}$ závisí na elementech obou drah, které nevystupují ve funkci času. $[\dot{i}]_{00}$ je sekulární část rozvoje sklonu dráhy.

Integrací (9) podle M a M' v mezích $0, 2\pi$ dostaneme

$$[\dot{i}]_{00} = \frac{1}{4\pi^2} \iint_0^{2\pi} \dot{i} . \mathrm{d}M . \mathrm{d}M' \tag{10}$$

Rovnici (10) (a analogické vztahy) lze interpretovat tak, že představuje střední hodnotu veličin (2,16) podle M a M'.

Z (2,16) je dále vidět, že ve výrazech pro $a, e, \ldots$ mohou na střední anomálii rušící planety záviset pouze rušící zrychlení S_2, T_2, W_2. Výrazy

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S_2 . \mathrm{d}M' ; \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} T_2 . \mathrm{d}M' ; \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} W_2 . \mathrm{d}M'$$

lze chápat jako složky přitažlivé síly odpovídající potenciálu

$$\frac{m'}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}M'}{\Delta} \tag{11}$$

(11) však je potenciál prstence rozloženého po dráze takovým způsobem, že na každém elementu dráhy $\mathrm{d}s'$ je hmota $\mathrm{d}m'$ úměrná času, za který planeta příslušný element proběhne. Za tohoto předpokladu je však správná úměra:

$$\frac{\mathrm{d}m'}{m'} = \frac{n' . \mathrm{d}t}{2\pi} = \frac{\mathrm{d}M'}{2\pi} .$$

takže opravdu platí

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}m'}{\Delta} = \frac{m'}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}M'}{\Delta}$$

Tím je integrace podle M' převedena na ekvivalentní úlohu výpočtu složek zrychlení od hmotného prstence tvaru dráhy rušící planety (elipsa), na jehož obvodu se hustota mění podle Keplerova zákona ploch.

Označme:

$$\begin{aligned} S_0 &= \frac{1}{2\pi}\,\frac{ar}{m'}\int_0^{2\pi} S_2 \,\mathrm{d}M' \\ T_0 &= \frac{1}{2\pi}\,\frac{ar}{m'}\int_0^{2\pi} T_2 \,\mathrm{d}M' \\ W_0 &= \frac{1}{2\pi}\,\frac{r^2}{m'}\int_0^{2\pi} W_2 \,\mathrm{d}M' \end{aligned} \tag{12}$$

Nalezení těchto integrálů bude naším nejbližším problémem. Vzhledem k poznámce c) v oddíle 4,26 se ukazuje výhodným zavést jako nezávisle proměnnou excentrickou anomálii vztahem

$$\mathrm{d}M = (1 - e . \cos E) . \mathrm{d}E ; \qquad \mathrm{d}M' = (1 - e' . \cos E') . \mathrm{d}E'$$

Podle obr. 3 a definice skalárního součinu můžeme psát

$$x . x' + y . y' = r . r' \, [\cos (v + \Pi) . \cos (v' + \Pi') + \\ + \sin (v + \Pi) . \sin (v' + \Pi') . \cos J]$$

$$x.y' - y.z' = r.r' [- \sin (v + \Pi).\cos (v' + \Pi') + + \cos (v + \Pi).\sin (v' + \Pi').\cos J] \tag{13}$$

$$z' = r'.\sin (v' + \Pi').\sin J$$

Zaveďme veličiny

$$\begin{aligned} {}^1k.\cos (K_1 - \Pi) &= \cos \Pi' \\ {}^1k.\sin (K_1 - \Pi) &= - \sin \Pi'.\cos J \\ {}^2k.\cos (K_2 - \Pi) &= \cos \Pi' \cos J \\ {}^2k.\sin (K_2 - \Pi) &= - \sin \Pi' \end{aligned} \tag{14}$$

Nyní můžeme rovnice (13) přepsat na tvar

$$\begin{aligned} x.x' + y.y' &= {}^1k.a'.r.\cos (v + K_1).(\cos E' - e') + \\ &+ {}^2k.a'.r.\sin (v + K_2).\cos \varphi'.\sin E' \\ x.y' - y.x' &= - {}^1k.a'.r.\cos (v + K_1).(\cos E' - e') + \\ &+ {}^2k.a'.r.\sin (v + K_2).\cos \varphi'.\sin E' \\ z' &= a'.\sin J.\sin \Pi'.(\cos E' - e') + \\ &+ a'.\sin J.\cos \Pi'.\cos \varphi'.\sin E' \end{aligned} \tag{15}$$

přičemž jsme využili známých identit $r'.\cos v' = a'.(\cos E' - e')$, $r'.\sin v' = a'.\cos \varphi'.\sin E'$.

Po substituci

$$\begin{aligned} A &= r^2 + 2.{}^1k.a'.e'.r.\cos (v + K_1) + a'^2 \\ B.\cos \vartheta &= {}^1k.a'.r.\cos (v + K_1) + a'^2.e' \\ B.\sin \vartheta &= {}^2k.a'r.\cos \varphi'.\sin (v + K_2) \\ C &= a'^2.e'^2 \end{aligned} \tag{16}$$

dostaneme s pomocí (15)

$$\Delta^2 = A - 2.B.\cos (E' - \vartheta) + C.\cos^2 E' \tag{17}$$

Poznámka:

A, B, C můžeme považovat za kladné veličiny. V případě B a C je tvrzení zřejmé. Pro A lze psát

$$A - a'^2.\cos^2 \varphi' = r^2 + 2{}^1k.a'.e'.r.\cos (v + K_1) + a'^2e'^2 \geqq (r - {}^1k.a'.e')^2 \geqq 0 \tag{18}$$

4,22 GAUSSOVA TRANSFORMACE

Abychom vypočetli integrály (12) zavedeme podle GAUSSE novou proměnnou τ vztahy:

$$\begin{aligned} \cos E' &= (\alpha_{11} + \alpha_{12} \sin \tau + \alpha_{13} \cos \tau).H^{-1} \\ \sin E' &= (\alpha_{21} + \alpha_{22}.\sin\tau + \alpha_{23} \cos \tau).H^{-1} \\ H &= \alpha_{31} + \alpha_{32} \sin \tau + \alpha_{33} \cos \tau \end{aligned} \tag{19}$$

kde konstanty α_{ij} jsou voleny tak, aby

$$\Delta^2.H^2 = G_1 - G_2.\sin^2 \tau + G_3.\cos^2\tau \tag{20}$$

Transformaci (19) spolu s předpokladem (20) budeme nazývat Gaussovou transformací.

Dříve, než přejdeme ke studiu vlastností Gaussovy transformace, odvodíme několik pomocných vět, podle nichž budeme moci určit koeficienty α_{ij} jako funkce G_1 a známých veličin. Platí:

a) Polynom typu

$$(\alpha_{11} + \alpha_{12}\sin\tau + \alpha_{13}\cos\tau)^2 + (\alpha_{21} + \alpha_{22}\sin\tau + \alpha_{23}\cos\tau)^2 - \\ - (\alpha_{31} + \alpha_{32}\sin\tau + \alpha_{33}\cos\tau)^2$$

je identicky roven nule tehdy a jen tehdy, lze-li ho přepsat na tvar

$$K(\cos^2\tau + \sin^2\tau - 1)$$

kde K je libovolná konstanta.

Důkaz:

Zkoumaný výraz lze přepsat na tvar

$$\alpha_{11}^2 + \alpha_{21}^2 - \alpha_{31}^2 + \frac{1}{2}[(\alpha_{12}^2 + \alpha_{22}^2 - \alpha_{32}^2) + (\alpha_{13}^2 + \alpha_{23}^2 - \alpha_{33}^2)] + \\ + 2(\alpha_{11}\alpha_{12} + \alpha_{21}\alpha_{22} - \alpha_{31}\alpha_{32})\sin\tau + 2(\alpha_{11}\alpha_{13} + \alpha_{21}\alpha_{23} - \alpha_{31}\alpha_{33})\cos\tau + \\ + \frac{1}{2}(\alpha_{12}\alpha_{13} + \alpha_{22}\alpha_{23} - \alpha_{32}\alpha_{33})\sin 2\tau + \frac{1}{2}[(\alpha_{13}^2 + \alpha_{23}^2 - \alpha_{33}^2) - \\ - (\alpha_{12}^2 + \alpha_{22}^2 - \alpha_{32}^2)]\cos 2\tau$$

Z identické platnosti vyplývá

$$\alpha_{12}^2 + \alpha_{22}^2 - \alpha_{32}^2 = \alpha_{13}^2 + \alpha_{23}^2 - \alpha_{33}^2 = -(\alpha_{11}^2 + \alpha_{21}^2 - \alpha_{31}^2) = K, \qquad \text{c b d.}$$

Poznámka:

V dalším budeme vždy předpokládat $K = 1$.

b) Platí:

1. $\beta_{1i}\beta_{1j} + \beta_{2i}\beta_{2j} - \beta_{3i}\beta_{3j} = \delta_{ij}$
2. $\gamma_{i2}\gamma_{j2} + \gamma_{i3}\gamma_{j3} - \gamma_{i1}\gamma_{j1} = \delta_{ij}$

kde $\delta_{ij} = 0$ pro $i \neq j$, $\delta_{ij} = 1$ pro $i = j$ značí Kroneckerův homogenní tensor druhého řádu. $\beta_{i1} = \sqrt{-1}\alpha_{i1}$, $\beta_{i2} = \alpha_{i2}$, $\beta_{i3} = \alpha_{i3}$; $\gamma_{i1} = \alpha_{i1}$, $\gamma_{i2} = \alpha_{i2}$, $\gamma_{i3} = \sqrt{-1}\alpha_{i3}$.

Důkaz:

Prvé tvrzení vyplývá bezprostředně z důkazu lemmatu a). Druhý případ lze dokázat takto: Z (19) vyplývá

$$\begin{aligned} \alpha_{11}.\cos E' + \alpha_{21}\sin E' - \alpha_{31} &= -H^{-1} \\ \alpha_{12}.\cos E' + \alpha_{22}\sin E' - \alpha_{32} &= H^{-1}.\sin\tau \\ \alpha_{13}.\cos E' + \alpha_{23}\sin E' - \alpha_{33} &= H^{-1}.\cos\tau \end{aligned}$$

Odtud

$$0 = (\alpha_{12}\cos E' + \alpha_{22}\sin E' - \alpha_{32})^2 + (\alpha_{13}\cos E' + \alpha_{23}\sin E' - \alpha_{33})^2 - \\ - (\alpha_{11}\cos E' + \alpha_{21}\sin E' - \alpha_{31})^2$$

což vzhledem k pomocné větě a) a jejímu důkazu dá požadované tvrzení.

c) Označme:

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$$

Platí

$$\frac{\partial D}{\partial \alpha_{ij}} = -D.\alpha_{ij} = A_{ij}$$

kde A_{ij} je doplněk (minor) z determinantu D příslušný k α_{ij}.

Důkaz:

Vezměme pro konkrétnost prvek α_{11}. Poněvadž

$$\frac{\partial D}{\partial \alpha_{11}} = \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0 \\ \alpha_{21}, & \alpha_{22}, & \alpha_{23} \\ \alpha_{31}, & \alpha_{32}, & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{22}, & \alpha_{23} \\ \alpha_{32}, & \alpha_{33} \end{vmatrix} = A_{11}$$

stačí nyní dokázat, že $-D.\alpha_{11} = A_{11}$. Jelikož

$$-D\alpha_{11} = -\begin{vmatrix} \alpha_{11}^2, & \alpha_{12}\alpha_{11}, & \alpha_{13}\alpha_{11} \\ \alpha_{21}, & \alpha_{22}, & \alpha_{23} \\ \alpha_{31}, & \alpha_{32}, & \alpha_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} \alpha_{11}^2 + \alpha_{21}^2 - \alpha_{31}^2, & \alpha_{11}\alpha_{12} + \alpha_{21}\alpha_{22} - \alpha_{31}\alpha_{32}, & \alpha_{11}\alpha_{13} + \alpha_{21}\alpha_{23} - \alpha_{31}\alpha_{33} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$$

je vzhledem k b) důkaz proveden.

d) Platí

$$D = 1$$

Důkaz:

Vzhledem k b) a c) lze psát:

$$\begin{aligned} D^2 &= D^2.(\alpha_{12}^2 + \alpha_{13}^2 - \alpha_{11}^2) = A_{12}^2 + A_{13}^2 - A_{11}^2 = \\ &= (\alpha_{21}\alpha_{33} - \alpha_{31}\alpha_{23})^2 + (\alpha_{21}\alpha_{32} - {}_{31}\alpha_{22})^2 - (\alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{32}\alpha_{23})^2 = \\ &= \alpha_{21}^2\,(\alpha_{32}^2 + \alpha_{33}^2) + \alpha_{22}^2\,(\alpha_{31}^2 - \alpha_{33}^2) + \alpha_{23}^2\,(\alpha_{31}^2 - \alpha_{32}^2) - \\ &\quad - 2\,(\alpha_{21}\alpha_{23}\alpha_{31}\alpha_{33} + \alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{31}\alpha_{32} - \alpha_{22}\alpha_{23}\alpha_{32}\alpha_{33}) = \\ &= \alpha_{22}^2 + \alpha_{23}^2 - \alpha_{21}^2 + (\alpha_{22}\alpha_{32} + \alpha_{23}\alpha_{33} - \alpha_{21}\alpha_{31})^2 = 1 \end{aligned}$$

Nyní lze pro D vzít hodnotu $\pm$ 1. Hodnota $D = -1$ však odpovídá případu $\alpha_{ij}^* = -\alpha_{ij}$. Poněvadž při takovéto transformaci zůstanou výrazy v b) i v c) nezměněny, lze bez újmy na obecnosti klást $D = 1$.

e) Platí

$$\sum_{i=1}^{3} G_i^* . \beta_{1i}^2 = -C\,; \qquad \sum_{i=1}^{3} G_i^* . \beta_{1i} . \beta_{2i} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{3} G_i^* \, . \, \beta_{2i}^2 = 0\,; \qquad \sum_{i=1}^{3} G_i^* \, . \, \beta_{1i} . \beta_{3i} = -B . \cos\vartheta$$

$$\sum_{i=1}^{3} G_i^* \, . \, \beta_{3i}^2 = -A\,; \qquad \sum_{i=1}^{3} G_i^* \, . \, \beta_{2i} . \beta_{3i} = -B . \sin\vartheta$$

kde β_{ij} jsou veličiny z b), G_i veličiny z (20) a $G_1^* = G_1$, $G_2^* = G_2$, $G_3^* = -G_3$.

Důkaz:

Zavedeme-li ve shodě s (19) označení

$$\begin{aligned} H_1 &= \sqrt{-1} . \beta_{11} + \beta_{12} . \sin\tau + \beta_{13} . \cos\tau \\ H_2 &= \sqrt{-1} . \beta_{21} + \beta_{22} . \sin\tau + \beta_{23} . \cos\tau \\ H &= \sqrt{-1} . \beta_{31} + \beta_{32} . \sin\tau + \beta_{33} . \cos\tau \end{aligned}$$

jsou H, H_1, H_2 zřejmě nezávislé veličiny. Poněvadž podle důkazu b) jest

$$\begin{aligned} \beta_{11} . H_1 + \beta_{21} . H_2 - \beta_{31} . H &= -\sqrt{-1} \\ \beta_{12} . H_1 + \beta_{22} . H_2 - \beta_{32} . H &= \sin\tau \\ \beta_{13} . H_1 + \beta_{23} . H_2 - \beta_{33} . H &= \cos\tau \end{aligned}$$

Nyní můžeme (20) přepsat na tvar

$$\begin{aligned} \Delta^2 . H^2 &= A . H^2 - 2 . B . \cos\vartheta . H_1 . H - 2 . B . \sin\vartheta . H_2 . H + C . H_1^2 = \\ &= -G_1^* . (\beta_{11} . H_1 + \beta_{21} . H_2 - \beta_{31} H)^2 - G_2^* . (\beta_{12} . H_1 + \beta_{22} . H_2 - \beta_{23} H)^2 - \\ &\quad - G_3^* . (\beta_{13} . H_1 + \beta_{23} . H_2 - \beta_{33} H)^2 \end{aligned}$$

Srovnáním koeficientů u proměnných H, H_1, H_2 a jejich součinů obdržíme dokazovaná tvrzení.

f) Platí

$$G_i^* \, . \, \alpha_{1i} = -C . \alpha_{1i} + B . \cos\vartheta . \alpha_{3i} \;\Rightarrow\; \alpha_{1i} = \frac{B . \cos\vartheta}{G_i^* + C} \alpha_{3i}$$

$$G_i^* \, . \, \alpha_{2i} = B . \sin\vartheta . \alpha_{3i} \qquad \Rightarrow\; \alpha_{2i} = \frac{B . \sin\vartheta}{G_i^*} \alpha_{3i}$$

$$G_i^* \, . \, \alpha_{3i} = -B . \cos\vartheta . \alpha_{1i} - B . \sin\vartheta . \alpha_{2i} + A . \alpha_{3i}$$

Důkaz:

Podle e) lze psát

$$-C . \beta_{1i} + B . \cos\vartheta . \beta_{3i} = \sum_{j=1}^{3} G_j^* \, . \, (\beta_{1j} . \beta_{1i} - \beta_{3j} . \beta_{3i}) . \beta_{1j} =$$

$$= \sum_{j=1}^{3} G_j^* \, . \, (\delta_{ij} - \beta_{2j} . \beta_{2i}) . \beta_{1j} = G_i^* \, . \, \beta_{1i} - \beta_{2i} . \sum_{j=1}^{3} G_j^* \, . \, \beta_{1j} . \beta_{2j}$$

Druhý člen v posledním výrazu je podle e) roven nule. Protože výrazy z minulého lemmatu jsou vždy násobeny jediným činitelem, přičemž druhý index je ve všech členech příslušného součtu stejný, lze ve výsledcích β_{ij} zaměnit za α_{ij}. Oba výrazy se totiž mohou lišit nanejvýš o imaginární jednotku, která se vzhledem k právě řečenému zkrátí. Další identity by se dokázaly analogicky.

g) Šest rovnic z e) spolu se šesti nezávislými rovnicemi z b) stačí k určení dvanácti veličin α_{ij} a G_i. Hledat všechny tyto veličiny však není nutné. Kromě G_i, o jejichž určení bude pojednáno v příštím oddíle, bude třeba znát pouze následující veličiny:

$$\alpha_{12}^2 = \frac{(A - G_2)\, G_2 - B^2.\sin^2\vartheta}{(G_2 + G_3).(G_1 - G_2)}\,; \qquad \alpha_{13}^2 = \frac{(A + G_3)\, G_3 + B^2.\sin^2\vartheta}{(G_1 + G_3).(G_2 + G_3)}$$

$$\alpha_{32}^2 = \frac{(C + G_2).G_2}{(G_2 + G_3).(G_1 - G_2)}\,; \qquad \alpha_{33}^2 = \frac{(C - G_3).G_3}{(G_1 + G_3).(G_2 + G_3)}$$

$$\alpha_{12}\,\alpha_{22} = \frac{B^2.\sin\vartheta.\cos\vartheta}{(G_2 + G_3).(G_1 - G_2)}\,; \qquad \alpha_{13}\,\alpha_{23} = -\frac{B^2.\sin\vartheta.\cos\vartheta}{(G_1 + G_3).(G_2 + G_3)}$$

$$\alpha_{12}\,\alpha_{32} = \frac{G_2.B.\cos\vartheta}{(G_2 + G_3).(G_1 - G_2)}\,; \qquad \alpha_{13}\,\alpha_{33} = \frac{G_3.B.\cos\vartheta}{(G_1 + G_3).(G_2 + G_3)}$$

$$\alpha_{22}\,\alpha_{32} = \frac{(C + G_2).B.\sin\vartheta}{(G_2 + G_3).(G_1 - G_2)}\,; \qquad \alpha_{23}\,\alpha_{33} = -\frac{(C - G_3).B.\sin\vartheta}{(G_1 + G_3).(G_2 + G_3)}$$

Abychom dokázali platnost těchto identit, uvážíme, že z f) a b) vyplývá

$$\beta_{3i}^2 = \frac{1}{\dfrac{B^2.\cos^2\vartheta}{(G_i^* + C)^2} + \dfrac{B^2.\sin^2\vartheta}{G_i^{*2}} - 1} =$$

$$= \frac{G_i^*\,(C + G_i^*)}{\dfrac{B^2.\cos^2\vartheta}{C + G_i^*}\,G_i^* + \dfrac{B^2.\sin^2\vartheta}{G_i^*}\,(C + G_i^*) - (C + G_i^*)\,G_i^*} \quad \ldots (*)$$

Kromě toho však lze na základě f) psát:

$$G_i^* - A + \frac{B^2.\cos^2\vartheta}{C + G_i^*} + \frac{B^2.\sin^2\vartheta}{G_i^*} = 0$$

Z vlastností kořenů kubické rovnice (21) — viz příští paragraf — je zřejmé:

$$B^2.C.\sin^2\vartheta = -\,G_1^* G_2^* G_3^* \qquad A - C = G_1^* + G_2^* + G_3^*$$

Dosadíme-li tyto vztahy do (*), dostaneme:

$$\alpha_{32}^2 = \beta_{32}^2 = \frac{(C + G_2^*)\,G_2^*}{(G_2^* - G_3^*)\,(G_1^* - G_2^*)}\,; \qquad \alpha_{33}^2 = \beta_{33}^2 = -\frac{(C + G_3^*)\,G_3^*}{(G_1^* - G_3^*).(G_2^* - G_3^*)}$$

Zcela obdobně se dokážou další rovnosti, pro něž jsou právě odvozené formule výchozími vztahy.

V tomto oddíle dokážeme následující tvrzení:

1. Veličiny G_i^* jsou řešením kubické rovnice

$$x.[(x - A).(x + C) + B^2] + B^2.C.\sin^2\vartheta = 0 \qquad (21)$$

2. G_i lze považovat za kladné veličiny.
3. Aproximativní řešení rovnice (21) lze psát ve tvaru:

$$\begin{aligned} G_1 &= h - \frac{g}{h(h-l)} \\ G_2 &= l + \frac{g}{l(h-l)} \\ G_3 &= \frac{g}{\left(h + \frac{g}{h.l}\right).\left(l + \frac{g}{h.l}\right)} \end{aligned} \qquad (22)$$

kde

$$\begin{aligned} g &= B^2.C.\sin^2\vartheta \\ h &= \frac{1}{2}\left[A - C + \sqrt{(A + C)^2 - 4.B^2}\right] \\ l &= \frac{1}{2}\left[A - C - \sqrt{(A + C)^2 - 4.B^2}\right] \end{aligned} \qquad (23)$$

4. E' a τ mají stejné periody.

Důkaz:

1. Dosadíme-li do třetí rovnosti f) z prvých dvou, dostaneme požadované tvrzení po evidentních úpravách.

2. K důkazu tohoto tvrzení stačí ukázat, že rovnice (21) má dva kladné a jeden záporný kořen.

Mějme funkci:

$$\Psi(x) = x.[(x - A).(x + C) + B^2] + B^2.C.\sin^2\vartheta$$

Protože

$$\begin{aligned} \Psi(-C) &= -B^2.C.\cos^2\vartheta < 0 \\ \Psi(0) &= B^2.C.\sin^2\vartheta > 0 \\ \Psi(a'^2.\cos^2\varphi') &= -A_3^2.a'^4.\cos^2\varphi' < 0 \\ \Psi(A) &= A.B^2 + B^2.C.\sin^2\vartheta > 0 \end{aligned}$$

vypadá průběh funkce Ψ přibližně tak, jak je načrtnut na obr. 4.

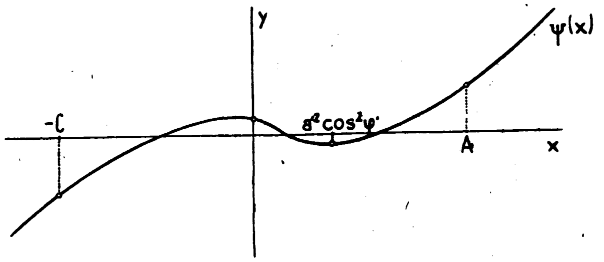
Z obr. 4 je vidět, že rovnice (21) má opravdu dva kladné a jeden záporný kořen. Můžeme tedy označit kořen mezi $-C$ a nulou $-G_3$, kořen mezi nulou a $a'^2.\cos^2\varphi'$ G_2 a zbývající kořen G_1. Při této volbě jsou G_i kladné veličiny a rovněž výrazy ve jmenovatelích lemmatu g) jsou kladná čísla.

Poznámka:

Při odhadech znamének funkčních hodnot funkce Ψ bylo na základě (18) předpokládáno, že $A > a'^2 . \cos^2 \varphi'$. Třetí odhad je správný v důsledku této úvahy:

Položme

$$\Delta^2 = (\Lambda_1 - a' . \cos E')^2 + (\Lambda_2 - a' . \cos \varphi' . \sin E')^2 + \Lambda_3^2$$



Obr. 4. Průběh funkce Ψ (x)

kde Λ_i jsou souřadnice rušené planety vzhledem k soustavě s počátkem ve středu dráhy rušící planety, přičemž Λ_1 je ve směru velké poloosy, Λ_2 ve směru malé poloosy a Λ_3 ve směru k oběma kolmém. Srovnáme-li poslední výraz s (17), dostaneme:

$$A = \sum_{j=1}^{3} \Lambda_j^2 + a'^2 . \cos^2 \varphi'$$

$$B . \cos \vartheta = \Lambda_1 . a' \qquad B . \sin \vartheta = \Lambda_2 . a' . \cos \varphi'$$

odkud je zřejmé

$$\Psi \, (a'^2 . \cos^2 \varphi') = - \Lambda_3^2 . a'^4 . \cos^2 \varphi' < 0$$

3. Tvrzení (22) dostaneme z (21) metodou postupných aproximací. Po substituci (23) můžeme (21) přepsat na tvar:

$$x . (x - h) . (x - l) + g = 0$$

Protože g je pro všechny planety malá veličina, lze jako prvou aproximaci vzít

$$G_1^* = h \qquad G_2^* = l \qquad G_3^* = 0$$

Druhá aproximace:

$$G_1^* = h - \frac{g}{h\,(h - l)} \; ; \quad G_2^* = l + \frac{g}{l\,(h - l)} \; ; \quad G_3^* = \frac{g}{h . l}$$

Protože G_3 je malá veličina, je na různé početní operace mnohem citlivější nežli G_1 a G_2. Proto se brává pro $G_3^* = - G_3$ ještě třetí aproximace, takže výsledné vztahy jsou:

$$G_1 = h - \frac{g}{h\,(h - l)} \; ; \quad G_2 = l + \frac{g}{l\,(h - l)} \; ; \quad G_3 = \frac{g}{\left(h + \frac{g}{hl}\right)\left(l + \frac{g}{hl}\right)}$$

4. To, že E' a τ mají stejnou periodu, je přímým důsledkem lemmatu b), z jehož důkazu vyplývá:

$$\begin{aligned}\sin \tau &= F_1 (\alpha_{ij}, \sin E', \cos E') \\ \cos \tau &= F_2 (\alpha_{ij}, \sin E', \cos E')\end{aligned}$$

Položíme-li $E'_1 = E'_0 + 2.\pi$, nezmění se na pravé straně posledních formulí nic. Odtud vyplývá: $\tau_1 = \tau_0 + 2.s.\pi$. Poněvadž však podle důkazu lemmatu b) jsou funkce F_1 a F_2 lineární vůči sinům a kosinům argumentu E' a $2.E'$, nemůže mít τ vícenásobnou periodu. Je tedy pouze třeba rozhodnout mezi $s = 1$ a $s = -1$. Případ $s = -1$ přichází v úvahu tenkrát, je-li $\alpha_{31} < 0$, což vyplývá z (19) touto úvahou: Poněvadž funkce sinus a kosinus jsou shora i sdola ohraničeny, musí být vždy $H \neq 0$. Proto musí být $|\alpha_{31}| > |\alpha_{32}.\sin \tau + \alpha_{33}.\cos \tau|$. Kdyby totiž platila opačná nerovnost, existovalo by reálné τ^* takové, pro něž by bylo $H(\tau^*) = 0$. Proto $\operatorname{sgn} H = \operatorname{sgn} \alpha_{31} = \operatorname{sgn} s$.

Na závěr tohoto oddílu dokážeme, že platí:

$$dE' = -(\alpha_{31} + \alpha_{32}.\sin \tau + \alpha_{33}.\cos \tau)^{-1}.d\tau = -H^{-1}.d\tau \tag{24}$$

Důkaz:

Zaveďme symboliku z důkazu lemmatu e) a diferencujme výraz (19):

$$\begin{aligned}\cos E'.dE' &= \left(H \frac{dH_2}{d\tau} - H_2 \frac{dH}{d\tau}\right).H^{-2}.d\tau \\ -\sin E'.dE' &= \left(H \frac{dH_1}{d\tau} - H_1 \frac{dH}{d\tau}\right).H^{-2}.d\tau\end{aligned}$$

Z posledních vztahů dostaneme po jednoduchých úpravách:

$$dE' = \left(H_1 \frac{dH_2}{d\tau} - H_2 \frac{dH_1}{d\tau}\right).H^{-2}.d\tau$$

Neboli

$$\begin{aligned}H^2.dE' &= [(\alpha_{11} + \alpha_{12} \sin \tau + \alpha_{13}.\cos \tau).(\alpha_{22}.\cos \tau - \alpha_{23}.\sin \tau) - \\ &- (\alpha_{21} + \alpha_{22}.\sin \tau + \alpha_{23}.\cos \tau).(\alpha_{12}.\cos \tau - \alpha_{13}.\sin \tau)]\, d\tau = \\ &= [(\alpha_{13}.\alpha_{22} - \alpha_{23}.\alpha_{12}) + (\alpha_{21}.\alpha_{13} - \alpha_{11}.\alpha_{23}).\sin \tau + \\ &+ (\alpha_{11}.\alpha_{22} - \alpha_{21}.\alpha_{12}).\cos \tau]\, d\tau\end{aligned}$$

Poslední výraz je však podle c) a d) roven $-H.d\tau$, cbd.

4,24. URČENÍ VELIČIN S_0, T_0 a W_0

Budeme nyní integrovat výrazy (12), přičemž za S_2, T_2 a W_2 dosadíme (2,17), kde vzhledem k poznámkám na počátku úvah o Gaussově metodě lze vynechat druhého sčítance ve formuli pro S_1. Budeme tedy hledat integrály typu:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\Lambda}{\Delta^3}\, dE' = \int_0^{2\pi} \frac{\Lambda.H^2}{(H^2.\Delta^2)^{3/2}}\, d\tau \tag{25}$$

kde obecný tvar Λ jest:

$$\Lambda = [f + f_1(\cos E' - e') + f_2 . \sin E'] . (1 - e' . \cos E') \qquad (26)$$

Veličiny f, f_1, f_2 jsou různé podle toho, hledáme-li S_0 nebo jinou složku rušícího zrychlení.

Protože

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin \tau . d\tau}{(H^2\Delta^2)^{3/2}} = \int_0^{2\pi} \frac{\cos \tau . d\tau}{(H^2\Delta^2)^{3/2}} = \int_0^{2\pi} \frac{\sin \tau \cos \tau \, d\tau}{(H^2\Delta^2)^{3/2}} = 0$$

můžeme bez vlivu na výsledek psát:

$$H^2\Lambda = (2 . \Gamma_1 + \Gamma_2 + f) . \sin^2 \tau + (\Gamma_1 + 2 . \Gamma_2 + f) . \cos^2 \tau \qquad (27)$$

kde

$$\Gamma_1 = (f - f_1 . e') . \alpha_{32}^2 + [f_1 . (1 + e'^2) - f . e'] . \alpha_{12} . \alpha_{32} + \\ + f_2 . \alpha_{22} . \alpha_{32} - f_2 e' . \alpha_{12} . \alpha_{22} - f_1 . e' . \alpha_{12}^2$$

$$\Gamma_2 = (f - f_1 . e') . \alpha_{33}^2 + [f_1 . (1 + e'^2) - f . e'] . \alpha_{13} . \alpha_{33} + \\ + f_2 . \alpha_{23} . \alpha_{33} - f_2 e . \alpha_{13} . \alpha_{23} - f_1 . e' . \alpha_{13}^2$$

Důkaz:

Vynecháme-li členy obsahující činitele $\sin \tau$, $\cos \tau$, $\sin \tau . \cos \tau$, dostaneme

$$H^2\Lambda = H^2 \{(f - f_1 . e') + [f_1(1 + e'^2) - f . e'] . \cos E' + f_2 . \sin E' - \\ - f_2 . e' . \sin E' . \cos E' - f_1 e' \cos^2 E'\} \approx (\alpha_{31}^2 + \alpha_{32}^2 \sin^2 \tau + \alpha_{33}^2 \cos^2 \tau) \times \\ \times (f - f_1 e') + [f_1 (1 + e'^2) - f . e'] . (\alpha_{11} \alpha_{31} + \alpha_{12} \alpha_{32} \sin^2 \tau + \alpha_{13} \alpha_{33} \cos^2 \tau) + \\ + (\alpha_{21} \alpha_{31} + \alpha_{22} \alpha_{32} \sin^2 \tau + \alpha_{23} \alpha_{33} \cos^2 \tau) f_2 - \\ - (\alpha_{11} \alpha_{21} + \alpha_{12} \alpha_{22} \sin^2 \tau + \alpha_{13} \alpha_{23} \cos^2 \tau) f_2 e' - \\ - (\alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 \sin^2 \tau + \alpha_{13}^2 \cos^2 \tau) f_1 . e' = \ldots\ldots$$

což dá s pomocí lemmatu b) požadované tvrzení.

Dále po substituci:

$$F = (f_1 . e' . B . \sin \vartheta - f_2 . e' . B . \cos \vartheta + f_2 . C) . B . \sin \vartheta$$

$$I = - f_1 . e' . A + (f - f_1 . e') . C + \\ + [f_1 . (1 + e'^2) - f . e'] . B . \cos \vartheta + f_2 . B . \sin \vartheta \qquad (28)$$

Neboli s pomocí (16)

$$F = [f_1 . {}^2k . \cos \varphi' . \sin (v + K_2) - f_2 . {}^1k . \cos (v + K_1)] \times \\ \times a'^2 . e' . r^3 . {}^2k \cos \varphi' \sin (v + K_2)$$

$$I = - f . a' . e' . {}^1k . r . \cos (v + K_1) + \\ + f_1 [{}^1k . a' . r . \cos \varphi' . \cos (v + K_1) - e' r^2] + f_2 . a' . {}^2k . r . \cos \varphi' . \sin (v + K_2)$$

Po dosazení z (28) a z lemmatu g) můžeme (27) přepsat na tvar:

$$\Gamma_1 = \frac{F + I . G_2 + f G_2^2}{(G_2 + G_3)(G_1 - G_2)} ; \quad \Gamma_2 = \frac{- F + I . G_3 - f . G_3^2}{(G_2 + G_3)(G_1 + G_3)} \qquad (30)$$

Nyní vyjádříme veličiny f, f_1, f_2, F a I pro případy jednotlivých zrychlení. Platí:

Pro S_0

$$
\begin{aligned}
f &= -a.r^2\\
f_1 &= {}^1k.a.a'.r.\cos(v + K_1)\\
f_2 &= {}^2k.a.a'.r.\cos\varphi'.\sin(v + K_2)\\
F &= 0\\
I &= a.a'^2.r^2.\cos^2\varphi'.[1 - \sin^2 J.\sin^2(v + \Pi)]
\end{aligned}
\tag{31}
$$

Pro T_0

$$
\begin{aligned}
f &= 0\\
f_1 &= -{}^1k.a.a'.r.\sin(v + K_1)\\
f_2 &= {}^2k.a.a'.r.\cos\varphi'.\cos(v + K_2)\\
F &= -\frac{1}{2}a.a'^2.r^2.\sin 2\varphi'.\cos J.B.\sin\vartheta\\
I &= {}^1k.a.a'.e'.r^3.\sin(v + K_1) -\\
&\quad -\frac{1}{2}a.a'^2.r^2.\cos^2\varphi'.\sin^2 J.\sin 2(v + \Pi)
\end{aligned}
\tag{32}
$$

Pro W_0

$$
\begin{aligned}
f &= 0\\
f_1 &= a'.r^2.\sin J.\sin\Pi'\\
f_2 &= a'.r^2.\cos\varphi'.\sin J.\cos\Pi'\\
F &= -\frac{1}{2}a'^2.\sin 2\varphi'.r^3.\sin J.\cos(v + \Pi).B.\sin\vartheta\\
I &= \frac{1}{2}a'^2.r^3.\cos^2\varphi'.\sin 2J.\sin(v + \Pi) - a'.e'.r^4.\sin J.\sin\Pi'
\end{aligned}
\tag{33}
$$

Důkaz:

Vzhledem k (2,17), (12) a (15) můžeme psát:

$$S_0 = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{a.r}{m'}\int_0^{2\pi} S_2\,(1 - e'.\cos E')\,\mathrm{d}E' =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{-a\,r^2 + a\,(xx' + yy')}{\Delta^3}\,(1 - e'.\cos E')\,\mathrm{d}E' =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{-ar^2 + {}^1kaa'\mathrm{r}.\cos(v + K_1)(\cos E' - e') + {}^2kaa'r.\cos\varphi'\sin(v + K_2)\sin E'}{\Delta^3}\times$$

$$\times(1 - e'.\cos E')\,\mathrm{d}E'$$

Srovnáním s (25) a (26) dostaneme:

$$f = -a.r^2 \qquad f_1 = {}^1k.a.a'.r.\cos(v + K_1) \qquad f_2 = \ldots$$

Tvrzení pro F a J se dokážou dosazením právě obdržených vztahů do (28). Při dokazování výrazů (32) a (33) bychom postupovali zcela analogicky.

Podle (25) až (27) a (31) až (33) je možné kterékoliv rušící zrychlení vyjádřit ve tvaru:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(2\Gamma_1+\Gamma_2+f).\sin^2\tau+(\Gamma_1+2\Gamma_2+f).\cos^2\tau}{(G_1-G_2.\sin^2\tau+G_3.\cos^2\tau)^{3/2}}\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(2\Gamma_1+\Gamma_2+f)\sin^2\tau+(\Gamma_1+2\Gamma_2+f)\cos^2\tau}{(G_1+G_3)^{3/2}(1-c^2\sin^2\tau)^{3/2}}\,d\tau \tag{34}$$

kde

$$c^2=\frac{G_2+G_3}{G_1+G_3}$$

Z (34) je zřejmé, že uvedené výrazy jsou eliptické integrály (jsou to výrazy zcela obdobné jako při hledání Laplaceových koeficientů). Zavedeme-li podle Hilla pro eliptické integrály prvého a druhého druhu substituci:

$$F\left(c,\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}K$$

$$E\left(c,\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}K.L \tag{35}$$

a dále zavedeme pomocné veličiny

$$\mathfrak{K}=\frac{K.L}{1-c^2};\qquad \mathfrak{L}=\frac{L-1+c^2}{c^2.L} \tag{36}$$

můžeme výraz (34) přepsat po jednoduchých úpravách na tvar

$$\frac{\mathfrak{K}}{(G_1+G_3)^{3/2}}\left[f+(1+\mathfrak{L})\,\Gamma_1+(2-\mathfrak{L})\,\Gamma_2\right] \tag{37}$$

Po další substituci:

$$N=\frac{a.r^2.\mathfrak{K}}{(G_1+G_3)^{3/2}};\quad N_1=\frac{N\,(1+\mathfrak{L})}{c^2\,(1-c^2)\,(G_1+G_3)^2};\quad N_2=\frac{N(2-\mathfrak{L})}{c^2\,(G_1+G_3)^2} \tag{38}$$

můžeme (37) s pomocí (30) vyjádřit takto:

$$(N_1-N_2).F^*\;[(N_1.G_2+N_2.G_3).I+(N+N_1.G_2^2-N_2.G_3^2).f^*] \tag{39}$$

kde

$$F^*=a^{-1}.r^{-2}.F;\quad I^*=a^{-1}.r^{-2}.I;\quad f^*=a^{-1}.r^{-2}.f$$

Označíme-li konečně

$$P=N_1-N_2;\quad Q=N_1.(G_2+G_3)\qquad V=Q-P.G_3 \tag{40}$$

můžeme rušivá zrychlení S_0, T_0, W_0 vyjádřit obecně takto

$$F^*.P+I^*.V+(N+Q.G_2-V.G_3).f^* \tag{41}$$

Nebo s pomocí (31), (32) a (33) v rozepsaném tvaru:

$$\begin{aligned} S_0 &= -(N + Q.G_2 - V.G_3) + V.I_S^* \\ T_0 &= P.F_T^* + V.I_T^* \\ W_0 &= P.F_W^* + V.I_W^* \end{aligned} \tag{42}$$

kde index u veličin F_S^* až I_W^* značí, že musíme příslušnou veličinu dosadit z (31) až (33) podle toho, o které se jedná zrychlení. Rovnicemi (42) je úloha nalézt rušivé zrychlení od hmotného prstence rozřešena.

Poznámka:

Při aplikaci Gaussovy metody je možné logaritmy veličin

$$\mathfrak{K}\,;\ \mathfrak{L}' = \frac{(2 - c^2)\,\mathfrak{L} + 2c^2 - 1}{c^2\,(1 - c^2)}\,; \quad \mathfrak{A} = \frac{1 + \mathfrak{L}}{1 - c^2} \tag{43}$$

nalézt tabelovány v publikaci [XVII.], kde jsou uvedeny jako funkce proměnné Θ = arcsin c.

4,25. NALEZENÍ SEKULÁRNÍCH PERTURBACÍ

Máme-li určeny složky rušivých zrychlení S_0, T_0, W_0, zbývá pouze provést integraci podle E podél dráhy rušeného tělesa. Podle (10) a Lagrangeových rovnic můžeme například pro i psát:

$$[\dot{i}]_{00} = \frac{1}{4\pi^2} \iint_0^{2\pi} \dot{i}.(1 - e.\cos E).(1 - e'.\cos E').\mathrm{d}E.\mathrm{d}E' =$$

$$= \frac{m'n}{1 + m}.\sec\varphi.\int_0^{2\pi} W_0.\cos u.\mathrm{d}E \tag{44}$$

a zcela obdobně další vztahy.

Integrály typu (44) se určují pomocí numerické integrace. Zavedeme podle Hilla označení:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Psi(E).\mathrm{d}E = M_E\{\Psi\} \tag{45}$$

kde Ψ je libovolná měřitelná funkce excentrické anomálie. M_E značí střední hodnotu funkce Ψ podle E. Integrál (45) zpravidla nahrazujeme takovouto aproximací: Zvolí se sudý počet hodnot funkce Ψ stejnoměrně rozložených po obvodu dráhy vzhledem k E (například 12 hodnot), pomocí nichž se provede numerická integrace. Vzhledem k (2,17), (9), (12), Lagrangeovým rovnicím a oddílu 3,51 můžeme psát:

$$\begin{aligned} [\dot{a}]_{00} &= 0 \\ [\dot{e}]_{00} &= \frac{m'.n.\cos\varphi}{1 + m} M_E\{\sin v.S_0 + (\cos v + \cos E)\,T_0\} \\ [\dot{i}]_{00} &= \frac{m'.n.\sec\varphi}{1 + m} M_E\{\cos u\, W_0\} \end{aligned} \tag{46}$$

$$[\dot{\Omega}]_{00} = \frac{m'.n.\sec\varphi.\operatorname{cosec} i}{1+m} M_E \{\sin u\, W_0\} \tag{46}$$

$$[\dot{\pi}]_{00} = \frac{m'.n.\operatorname{tg}\varphi}{1+m} M_E \left\{-\cos v.S_0 + \left(1+\frac{r}{p}\right)\sin v\, T_0\right\} + 2\sin^2\frac{i}{2}[\dot{\Omega}]_{00}$$

$$[\dot{\lambda}]_{00} = \frac{m'.n}{1+m} M_E \left\{-\frac{2r}{a} S_0\right\} + 2\sin^2\frac{\varphi}{2}.[\dot{\pi}]_{00} - 2.\sin^2\frac{i}{2}.\cos\varphi\,[\dot{\Omega}]_{00}$$

Rovnicemi (46) je problém nalezení sekulárních perturbací rozřešen.

4,26. DOPLŇKY KE GAUSSOVĚ METODĚ

a) Hledají-li se pomocí Gaussovy metody sekulární perturbace zemské dráhy, je $i = 0$ a Ω ztrácí smysl. Tato neurčitost se dá obejít zavedením jiné vztažné soustavy (například analogické elementy brané vůči neměnné rovině Laplaceově). Aby však nebyly nutné zcela nové výpočty, bývá výhodný tento postup:

Definujme zcela obecně veličiny:

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \sin i.\sin\Omega \\ \Psi_2 &= \sin i.\cos\Omega \end{aligned} \tag{47}$$

Vzhledem k (2,16) musí platit:

$$\dot{\Psi}_1 = \frac{a.n.r.\sec\varphi}{1+m}\left[\sin(v+\pi) - 2\sin^2\frac{i}{2}\sin\Omega.\cos u\right] W_z$$

$$\dot{\Psi}_2 = \frac{a.n.r.\sec\varphi}{1+m}\left[\cos(v+\pi) - 2\sin^2\frac{i}{2}\cos\Omega\cos u\right] W_z$$

odkud pro $i = 0$ vyplývá vzhledem k (2,17), (12) a (45)

$$[\Psi_1]_{00} = \frac{m'.n.\sec\varphi}{1+m} M_E\{\sin(v+\pi)\, W_0\}$$

$$[\Psi_2]_{00} = \frac{m'\,n\,\sec\varphi}{1+m} M_E\{\cos(v+\pi)\, W_0\} \tag{48}$$

b) Numerickou integraci v rovnicích (46) můžeme provést takovýmto způsobem: Vezměme pro konkrétnost opět element i a vyjděme z rovnice

$$\Phi = W_0.\cos u = \sum_j c_j.\cos(j.E + C_j)$$

Zvolme v intervalu $\langle 0, 2\pi)$ n bodů, pro které $E_j = j\frac{2\pi}{n}$, přičemž j nabývá hodnot $0, 1, \ldots, n-1$. Označme $\Phi_j = \Phi(E_j)$.
Potom platí:

$$M_E\{W_0.\cos u\} = c_0 = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\Phi_j - c_n - c_{2n} - \ldots \tag{49}$$

Protože řada pro Φ konverguje zpravidla dosti rychle, stačí ve většině případů nevelké n pro značnou přesnost.

Poznámka:

Při použití tohoto postupu se koeficienty c_n, c_{2n}, ... samozřejmě nehledají. V (49) jsou uvedeny pouze pro odhad chyby. Protože c_n je obecně veličina n-tého stupně, ukazuje rovnice (49), že zvolíme-li n bodů, je chyba nejvýše $(n - 1)$-ho stupně.

c) Protože

$$\mathrm{d}M' = (1 - e' . \cos E')\,\mathrm{d}E' = \left(\frac{r'}{a'}\right)^2 . \sec \varphi' \,\mathrm{d}v'$$

a všechny anomálie mají stejnou periodu, je principielně lhostejné, kterou z nich zvolíme jako nezávisle proměnnou. Hill volí excentrickou anomálii proto, že poměr průvodiče a velké poloosy je lineární funkcí cos E. Proti této volbě lze namítnout, že v tomto případě mají stejnou váhu body proběhnuté „rychle" jako body proběhnuté „pomalu". Přednost před střední anomálií se excentrické anomálii dává proto, že pro velké excentricity jsou ekvidistantní body vzhledem k E mnohem rovnoměrněji rozložené po dráze než body stejných vlastností vzhledem k M.

d) Jiný způsob integrace rovnic (2,16) zavádí Sehnal. [XVIII.] Vzhledem k (2,17) se ukazuje výhodnou transformace:

$$\Delta^2 = \xi\,(\Delta_0^2 + \Psi) \tag{50}$$

kde ξ je konstanta, Δ_0 je vzdálenost, kterou by měla obě tělesa, kdyby obíhala po soustředných kruhových drahách s poloměry rovnými velkým poloosám skutečných drah. V paragrafu 3,6 jsme uvedli, že Ψ je trigonometrický polynom vzhledem k E a E'. Dále jsme nalezli rozvoj výrazů $\Delta_0^{-\nu}$ pomocí Laplaceových koeficientů. Nyní můžeme podle (50) Lagrangeových rovnic ve tvaru (2,17) a podle úvah z oddílu 4,21 napsat:

$$[\dot{i}]_{00} = \frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{m' . a . n . \sec \varphi}{1 + m} \iint_0^{2\pi} \frac{z'}{\Delta^3} \cdot \frac{r}{a} \cdot \frac{r'}{a'} . \mathrm{r} . \cos u . \mathrm{d}E . \mathrm{d}E' =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{m' . a . n . \sec \varphi}{1 + m} \iint_0^{2\pi} \frac{z'}{\Delta_0^3} \cdot \frac{r}{a} \cdot \frac{r'}{a'}\, \mathrm{r} . \cos u \left(1 + \frac{\Psi}{\Delta_0^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \mathrm{d}E\, \mathrm{d}E' \tag{51}$$

Poněvadž pro všechny planety a většinu planetek bývá Ψ pouze korekční člen, vystačíme zpravidla s rozvojem:

$$\left(1 + \frac{\Psi}{\Delta_0^2}\right)^{-\frac{3}{2}} = 1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{\Psi}{\Delta_0^2} + \frac{15}{8} \cdot \frac{\Psi}{\Delta_0^4} - \ldots .$$

Dosadíme-li právě získaný rozvoj do (51), dostaneme s pomocí (3,51), že sekulární člen je úměrný integrálu v mezích 0, 2π z výrazu:

$$\sum_{\nu} \sum_{\mathrm{h}=-\infty}^{\infty} z' \frac{r}{a} \cdot \frac{r'}{a'} . \mathrm{r} . \cos u\, a'^{-\nu} . c_\nu^{(\mathrm{h})} . \cos (h\,\Theta) . \Psi^{\frac{\nu - 3}{2}} \tag{52}$$

Protože:

$$z' . \frac{r}{a} . \frac{r'}{a'} a'^{-\nu} . r . \cos u . \Psi_l \tag{53}$$

je vzhledem k (15), známým vztahům z problému dvou těles a úvahám za (50) trigonometrický polynom, redukuje se řada (52) po integraci na konečný počet členů. Je tomu tak proto, že pro všechna $j > j^*$, kde j je stupeň polynomu (53) vzhledem k E', je roven příslušný člen integrálu (52) nule. Proto například pro $n = 3$ zbudou po integraci z (52) pouze dva nenulové členy.

Poznámka:

Uvedený postup je snahou o spojení klasických analytických metod s metodou Gaussovou. Tento postup však je použitelný pouze tehdy, když $\Psi \ll \Delta_0^2$, takže se nehodí pro komety a podobně. Přesnost tohoto postupu nemůže převýšit přesnost daného rozvoje perturbační funkce.

e) O Gaussově metodě můžeme říci, že patří do skupiny numericko-analytických metod (rušivé zrychlení od prstence se hledá analyticky, ale integrace podle E se provádí numericky). Postup z odstavce d) je ryze analytický, ale má s Hillovým postupem pouze stejné výchozí rovnice. V druhém krajním případě lze chápat Gaussovu metodu jako numerickou, neboť je možné hledat integrály (12) pomocí numerických kvadratur. Hlavní předností Gaussovy metody je, že ji můžeme použít pro libovolné excentricity ($e < 1$) a sklony. Má tedy širší uplatnění nežli metody z 4,1, které podle dodatku jsou pro $e > 0{,}6627$ zaručeně divergentní.

4,27 POSTUP PŘI PRAKTICKÉM UŽITÍ GAUSSOVY METODY

1. Určíme elementy dráhy rušeného tělesa (problém dvou těles).
2. Nalezneme veličiny J, Π, Π' podle (3,32).
3. Nalezneme veličiny ${}^1k$, K_1, ${}^2k$, K_2 podle (14).
4. Nalezneme veličiny A, B, C, ϑ podle (16).
5. Rozřešíme rovnici (21), přičemž G_1, G_2 a G_3 se zvolí tak, aby $G_1 > G_2$ a $-G_3$ byl záporný kořen této rovnice.
6. Vypočteme veličinu $c^2 = \sin^2 \Theta = (G_2 + G_3).(G_1 + G_3)^{-1})$.
7. Určíme veličinu N podle (38) a veličiny P, Q, V z (40).

Zde je výhodné užít identit:

$$P = \frac{N . \mathfrak{L}'}{G_1 + G_3} ; \qquad Q = \frac{N . \mathfrak{A}}{G_1 + G_3}$$

přičemž log $\mathfrak{K}$, log $\mathfrak{L}'$, log $\mathfrak{A}$ se naleznou v Hillových tabulkách jako funkce Θ.

8. Veličiny f_S^*, ..., I_W^* určíme podle (31), (32), (33) a (39).
9. S_0, T_0, W_0 určíme podle (42).
10. Obvod dráhy rušeného tělesa rozdělíme vzhledem k excentrické anomálii na sudý počet stejných dílů. Počet bodů volíme větší či menší podle toho, jaký je tvar dráhy (je třeba, aby byly zachyceny změny v křivosti dráhy).

Poznámka:

Hill uvádí ještě jeden postup při aplikaci Gaussovy metody. Poněvadž tento postup je založen na mnohonásobném užití goniometrických funkcí, není v současné době zdaleka tak účelný jako modifikace, kterou jsme uvedli.

4,3 LAGRANGEOVA METODA URČENÍ PERTURBACÍ MINIMÁLNÍ HODNOSTI

Zkoumáme-li poruchy planetárních drah v nedlouhém časovém intervalu (maximálně několik století), stačí se omezit na sekulární perturbace prvého řádu. K jejich určení je nejvýhodnější Gaussova metoda, která dovoluje vypočíst tyto členy bez potřeby rozvojů perturbační funkce. Pro velmi dlouhé období je však třeba znát i sekulární perturbace vyšších řádů. Poněvadž při přechodu k perturbacím vyšších řádů počet členů velmi rychle roste, jsou už perturbace třetího řádu analyticky téměř nezvládnutelné.

Lagrange zkoumal problém integrace rovnic (2,11) za zjednodušujícího předpokladu, že perturbační funkce je nahrazena jejími sekulárními členy. Třebaže nelze tvrdit, že tímto postupem dostaneme stejně přesné výsledky jako metodou postupných aproximací, přece nám výsledky takto získané mnoho napoví o charakteru pohybu za velmi dlouhé časové intervaly.

Zaměňme v (2,11) perturbační funkci jejími sekulárními členy a omezme se na veličiny druhého stupně (ukazuje se, že pouze v tomto případě existuje explicitní řešení ve tvaru elementárních funkcí). Označme takto zjednodušenou perturbační funkci R^*, popřípadě R'^*.

Podle (3,74) můžeme psát:

$$R^* = \frac{k^2 m'}{a'} \left[\frac{1}{2} c_1^{(0)} - \frac{1}{2} \sigma^2 c_3^{(1)} + \frac{1}{8} (e^2 + e'^2).(D^2 + D).c_1^{(0)} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{4} e.e'.(D^2 + D).c_1^{(1)}.\cos(\Pi' - \Pi) \right] \tag{54}$$

kde Π' a Π značí délky perihelu v oběžných drahách (viz obr. 3), $D = \dfrac{\partial}{\partial(\ln\alpha)}$. Ostatní jsou obvyklá značení z paragrafu 3,6. Poněvadž podle (1) platí:

$$\Pi' - \Pi = (\pi' - \pi) - (\tau' - \tau)$$

a $\tau' - \tau$ je podle (4) veličinou druhého stupně, můžeme při naší přesnosti zaměnit $\cos(\Pi' - \Pi)$ za $\cos(\pi' - \pi)$ a dále se stejnou přesností:

$$2.\sigma^2 = 1 - \cos J = 1 - \cos i.\cos i' - \sin i.\sin i'.\cos(\Omega' - \Omega) \doteq$$
$$\doteq 2.\sin^2\frac{i}{2} + 2.\sin^2\frac{i'}{2} - \sin i.\sin i'.\cos(\Omega' - \Omega) \doteq$$
$$\doteq \frac{1}{2}.\mathrm{tg}\, i + \frac{1}{2}.\mathrm{tg}\, i' - \mathrm{tg}\, i.\mathrm{tg}\, i'.\cos(\Omega' - \Omega)$$

Proto můžeme (54) přepsat na tvar:

$$R^* = k^2.m'.\{M^* + [e^2 + e'^2 - \mathrm{tg}^2\, i - \mathrm{tg}^2\, i' +$$
$$+ 2.\mathrm{tg}\, i.\mathrm{tg}\, i'.\cos(\Omega' - \Omega)]\, N^* - 2.e.e'.\cos(\pi' - \pi).\, P^*\} \tag{55}$$

kde M^*, N^*, P^* jsou funkce Laplaceových koeficientů a lze dokázat, že jsou symetrickými funkcemi vůči a a a'. Lagrange zavádí dále nové proměnné:

$$h = e.\sin\pi\,; \qquad q = \mathrm{tg}\, i.\cos\Omega$$
$$l = e.\cos\pi\,; \qquad s = \mathrm{tg}\, i.\sin\Omega \tag{56}$$

Pomocí právě zavedených veličin můžeme místo (55) napsat:

$$R^* = k^2.m' \{M^* + [h^2 + h'^2 + l^2 + l'^2 - s^2 - s'^2 - q^2 - q'^2 + \\ + 2 (s.s' + q.q')].N^* - 2 (h.h' + l.l').P^*\} \tag{57}$$

Protože:

$$\frac{\partial}{\partial e} = \sin \pi \frac{\partial}{\partial h} + \cos \pi \frac{\partial}{\partial l}$$

$$\frac{\partial}{\partial \pi} = l \frac{\partial}{\partial h} - h \frac{\partial}{\partial l}$$

$$\dot{h} = \dot{e}.\sin \pi + e.\dot{\pi}.\cos \pi \,; \qquad \dot{l} = \dot{e}.\cos \pi - e\,\dot{\pi} \sin \pi$$

a zcela obdobně pro veličiny s a q, můžeme podle (2,11) napsat:

$$\dot{h} = \frac{(1 - h^2 - l^2)^{\frac{1}{2}}}{n\,a^2} \left[\frac{\partial R}{\partial l} - \frac{h}{1 + (1 - h^2 - l^2)^{1/2}} \cdot \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} + \frac{l \operatorname{tg} \frac{i}{2}}{1 - h^2 - l^2} \frac{\partial R}{\partial i}\right]$$

$$\dot{l} = - \frac{(1 - h^2 - l^2)^{\frac{1}{2}}}{n\,a^2} \left[\frac{\partial R}{\partial h} + \frac{l}{1 + (1 - h^2 - l^2)^{1/2}} \cdot \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} + \right. \tag{58}$$

$$\left. + \frac{h.\operatorname{tg} \frac{i}{2}}{1 - h^2 - l^2} \cdot \frac{\partial R}{\partial i}\right]$$

Dosadíme-li za perturbační funkci její sekulární část, podle (57), jest

$$\frac{\partial R^*}{\partial \varepsilon} = 0 \,; \qquad \frac{\partial R^*}{\partial i} \sim i \,; \qquad \frac{\partial R^*}{\partial h} \sim h$$

takže při dosavadní přesnosti lze psát:

$$\dot{h} \doteq \frac{1}{n\,a^2} \cdot \frac{\partial R^*}{\partial l} \,; \qquad \dot{l} = - \frac{1}{n\,a^2} \cdot \frac{\partial R^*}{\partial h} \tag{59}$$

Zcela obdobným postupem bychom odvodili:

$$\dot{s} = \frac{1}{n\,a^2} \cdot \frac{\partial R^*}{\partial q} \,; \qquad \dot{q} = - \frac{1}{n\,a^2} \cdot \frac{\partial R^*}{\partial s} \tag{60}$$

4,31 ZOBECNĚNÍ PŘEDEŠLÉHO POSTUPU

Zkoumejme zcela obecný případ, kdy se jedná o nalezení sekulárních perturbací minimální hodnosti v důsledku rušivého působení livovolného počtu planet. Vzhledem k tomu, že perturbační funkce je skalární veličina, platí princip superposice, takže místo (59) a (60) můžeme psát:

$$\dot{h}_\mu = \frac{1}{n_\mu\, a_\mu^2} \cdot \frac{\partial R_\mu^*}{\partial l_\mu} \,; \qquad \dot{l}_\mu = - \frac{1}{n_\mu\, a_\mu^2} \cdot \frac{\partial R_\mu^*}{\partial h_\mu} \tag{61}$$

Popřípadě:

$$\dot{s}_\mu = \frac{1}{n_\mu\, a_\mu^2} \cdot \frac{\partial R_\mu^*}{\partial q_\mu}; \qquad q_\mu = - \frac{1}{n_\mu\, a_\mu^2} \cdot \frac{\partial R_\mu^*}{\partial s_\mu} \tag{62}$$

kde

$$\begin{aligned} R_\mu^* = \sum_\nu R_{\mu\nu}^* = k^2 \sum_\nu m_\nu \{M_{\mu\nu}^* + [h_\mu^2 + h_\nu^2 + l_\mu^2 + l_\nu^2 - \\ - s_\mu^2 - s_\nu^2 - q_\mu^2 - q_\nu^2 + 2.(s_\mu . s_\nu + q_\mu . q_\nu)]\, N_{\mu\nu}^* - \\ - 2.(h_\mu\, h_\nu + l_\mu . l_\nu).P_{\mu\nu}^*\} \end{aligned} \tag{63}$$

přičemž

$$M_{\mu\mu}^* = N_{\mu\mu}^* = P_{\mu\mu}^* = 0$$

Zavedeme-li symboly

$$[\mu, \nu] = \frac{2k^2\, m_\nu}{n_\mu\, a_\mu^2}\, P_{\mu\nu}^*; \qquad (\mu, \nu) = \frac{2k^2\, m_\nu}{n_\mu\, a_\mu^2}\, N_{\mu\nu}^*; \tag{64}$$

$$\sum_\nu (\mu, \nu) = A_{\mu\mu}$$

můžeme soustavu (61) přepsat na tvar:

$$\begin{aligned} \dot{h}_\mu &= A_{\mu\mu} . l_\mu - \sum_\nu [\mu, \nu] . l_\nu \\ \dot{l}_\mu &= - A_{\mu\mu} . h_\mu + \sum_\nu [\mu, \nu] . h_\nu \end{aligned} \tag{65}$$

a místo (62) máme:

$$\begin{aligned} \dot{s}_\mu &= - A_{\mu\mu} . q_\mu + \sum_\nu (\mu, \nu) . q_\nu \\ \dot{q}_\mu &= A_{\mu\mu} . s_\mu - \sum_\nu (\mu, \nu) . s_\nu \end{aligned} \tag{66}$$

Z rovnic (65) a (66) můžeme odvodit některé důležité prvé integrály, které ukazují dlouhodobé vlastnosti soustav.

Znásobíme-li prvou z rovnic (65) $m_\mu . n_\mu . a_\mu^2 . h_\mu$ a druhou $m_\mu . n_\mu . a_\mu^2 . l_\mu$, dostaneme po sečtení obou rovnic a po integraci podle času:

$$\begin{aligned} \sum_\mu m_\mu . n_\mu . a_\mu^2 . (h_\mu^2 + l_\mu^2) = \sum_\mu m_\mu . n_\mu . a_\mu^2 . e_\mu^2 \doteq \\ \doteq k \sum_\mu m_\mu . a_\mu^{\frac{1}{2}} . e_\mu^2 = \text{const} \end{aligned} \tag{67}$$

a analogicky

$$\begin{aligned} \sum_\mu m_\mu . n_\mu . a_\mu^2 . (s_\mu^2 + q_\mu^2) = \sum_\mu m_\mu . n_\mu . a_\mu^2 . \text{tg}^2\, i_\mu \doteq \\ \doteq k \sum_\mu m_\mu . a_\mu^{\frac{1}{2}} . \text{tg}^2\, i_\mu = \text{const} \end{aligned} \tag{68}$$

Konstanty na pravých stranách (67) a (68) jsou určeny počátečními podmínkami. Protože v současné době jsou excentricity a sklony planetárních drah ve sluneční soustavě malé veličiny a poněvadž podle oddílu 3,51 jsou sekulární perturbace velké poloosy nulové (do druhého řádu včetně), je zcela oprávněné tvrzení, že e_μ a i_μ budou malými ještě velmi dlouhou dobu.

Poznámka:

Právě vyslovené tvrzení nelze aplikovat na planetky, kde vliv excentricit a sklonů drah je vzhledem k malosti hmot malý.

4,32 ŘEŠENÍ LAGRANGEOVÝCH ROVNIC PRO SEKULÁRNÍ PERTURBACE

Hledejme řešení soustavy (65) ve tvaru:

$$h_\mu = \frac{L_\mu}{a_\mu (m_\mu n_\mu)^{\frac{1}{2}}} \sin(\varkappa . t + \beta)$$

$$l_\mu = \frac{L_\mu}{a_\mu (m_\mu n_\mu)^{\frac{1}{2}}} \cos(\varkappa . t + \beta) \tag{69}$$

kde L_μ, $\varkappa$ a β jsou konstanty.

Zavedeme-li označení:

$$A_{\mu\nu} = -\frac{a_\mu}{a_\nu}\left(\frac{m_\mu n_\mu}{m_\nu . n_\nu}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot [\mu, \nu]\,; \qquad \mu \neq \nu \tag{70}$$

dostaneme po dosazení do (65) soustavu lineárních rovnic pro L_ν:

$$\sum_\nu (A_{\mu\nu} - \varkappa . \delta_{\mu\nu}) . L_\nu = 0 \tag{71}$$

kde $\delta_{\mu\nu}$ je Kroneckerův homogenní tensor druhého řádu. Jelikož $N^*_{\mu\nu}$ a $P^*_{\mu\nu}$ jsou symetrické vzhledem k a_μ a a_ν, jest $A_{\mu\nu} = A_{\nu\mu}$.

Poněvadž rovnice (71) jsou homogenní, mohou nenulové veličiny L_ν existovat jen tehdy, když:

$$D(\varkappa) = \begin{vmatrix} A_{00} - \varkappa, A_{01}, \dots, A_{0n} \\ A_{10}, A_{11} - \varkappa, \dots, A_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ A_{n0}, A_{n1}, \dots, A_{nn} - \varkappa \end{vmatrix} = 0 \tag{72}$$

Označíme-li $\varkappa_\varrho$ kořeny sekulární rovnice (72), dostaneme pro dané ϱ řešení ${}^\varrho L_\nu$ až na konstantní faktor. Můžeme proto položit:

$${}^\varrho L_\nu = C_\varrho . {}^\varrho b_\nu$$

kde C_ϱ jsou libovolné nenulové konstanty a ${}^{\varrho}b_\nu$ zcela určené veličiny. C_ϱ tvoří spolu s β_ϱ integrační konstanty soustavy (65), jejíž obecné řešení má tvar:

$$h_\mu = \sum_\varrho {}^{\varrho}K_\mu . \sin(\varkappa_\varrho . t + \beta_\varrho)$$

$$l_\mu = \sum_\varrho {}^{\varrho}K_\mu . \cos(\varkappa_\varrho . t + \beta_\varrho) \tag{73}$$

kde

$${}^{\varrho}K_\mu = \frac{{}^{\varrho}L_\mu}{a_\mu (m_\mu n_\mu)^{\frac{1}{2}}} = \frac{{}^{\varrho}b_\mu}{a_\mu (m_\mu n_\mu)^{\frac{1}{2}}} . C_\varrho ,$$

Zcela analogicky by se řešily rovnice (66). Jediný rozdíl bude v tom, že

$$A^*_{\mu\nu} = -\frac{a_\mu}{a_\nu}\left(\frac{m_\mu n_\mu}{m_\nu n_\nu}\right)^{\frac{1}{2}} (\mu, \nu) \; ; \qquad A^*_{\mu\mu} = A_{\mu\mu} \tag{74}$$

Veličiny $A_{\mu\nu}$ a $A^*_{\mu\nu}$ jsou téhož řádu jako hmoty planet. Proto jsou kořeny sekulární rovnice obecně srovnatelné s hmotami rušících planet. Rozvedeme-li (73) a obdobné vztahy pro s a q v řady mocnin $\varkappa_\varrho . t$, dostaneme pouze členy nulové — to jest minimální — hodnosti.

4,33 NĚKTERÉ DŮSLEDKY PŘEDEŠLÝCH ÚVAH

a) Ve stabilní soustavě nemůže mít sekulární rovnice (72) imaginární kořeny.

Důkaz:

Kdybychom mohli psát například $\varkappa_0 = \alpha_1 + \alpha_2 \sqrt{-1}$, obsahovaly by příspěvky od tohoto kořenu v řešení (73) hyperbolické funkce, což je v rozporu s předpokladem stability.

Poznámka:

Domnívám se, že i v případě, kdy sekulární rovnice má imaginární kořeny (což je do jisté míry analogie soustavy s kladnou energií) mohou existovat dráhy, které nejeví „hyperbolisační" tendenci.

b) Platí:

$$e_\mu \leqq \sum_\varrho |{}^{\varrho}K_\mu| \tag{75}$$

Důkaz:

$$e_\mu^2 = h_\mu^2 + l_\mu^2 = \sum_\varrho {}^{\varrho}K_\mu^2 + 2 \sum_{\sigma > \varrho} {}^{\varrho}K_\mu . {}^{\sigma}K_\mu \cos[(s_\sigma - s_\varrho)\, t + \beta_\sigma - \beta_\varrho] \leqq$$

$$\leqq \sum_\varrho {}^{\varrho}K_\mu^2 + 2 \sum_{\sigma > \varrho} |{}^{\varrho}K_\mu| . |{}^{\sigma}K_\mu|$$

Odtud:

$$e_\mu \leqq \sum_\varrho |{}^\varrho K_\mu| \text{, cbd.}$$

c) Obdobně platí nerovnost

$$|\operatorname{tg} i_\mu| \leqq \sum_\varrho |{}^\varrho K_\mu^*|$$

kde ${}^\varrho K_\mu^*$ jsou násobky base řešení rovnic (66).

d) Existuje-li index τ takový, že

$$|{}^\tau K_\mu| > \sum_\varrho |{}^\varrho K_\mu| \qquad \varrho \neq \tau \qquad (76)$$

posouvá se perihel planety P_μ se střední rychlostí $\varkappa_\tau$.

Důkaz:

Z rovnic (73) vyplývá

$$e_\mu . \cos (\pi_\mu - \varkappa_\tau . t - \beta_\tau) = {}^\tau K_\mu + \sum_\varrho {}^\varrho K_\mu . \cos [(\varkappa_\varrho - \varkappa_\tau)\, t + \beta_\varrho - \beta_\tau]$$

Vzhledem k nerovnosti v předpokladu nemůže být $\cos (\pi_\mu - \varkappa_\tau . t - \beta_\tau)$ nikdy roven nule. Proto

$$\pi_\mu = \beta_\tau + \varkappa_\tau . t + \delta_\mu(t)$$

kde

$$|\delta_\mu (t)| < 90^\circ$$

Odtud je vidět, že perihel se od bodu rovnoměrně se pohybujícího rychlostí $\varkappa_\tau$ nemůže nikdy vzdálit o víc než 90^0, cbd.

4,4 PŘECHOD OD PERTURBACÍ ELEMENTŮ K PERTURBACÍM SOUŘADNIC

Známe-li perturbace elementů a střední délky, můžeme přejít k určení perturbací libovolných souřadnic.

4,41. PERTURBACE DÉLKY PLANETY V ROVINĚ DRÁHY

Pro nerušený pohyb platí:

$$w = \lambda + f \qquad (76)$$

kde f je rovnice středu daná formulí (5, 28).

Poněvadž střední anomálií můžeme napsat ve tvaru $M = \lambda - \Pi$, platí pro perturbace délky planety v rovině dráhy (omezíme-li se na členy prvého řádu vzhledem k hmotám) vztah:

$$\delta_1 w = \delta_1\lambda + \sum_{j=-\infty}^{\infty} C_j . \cos j\,(\lambda - \pi) . (\delta_1\lambda - \delta_1\pi)$$
$$+ \sum_{j=-\infty}^{\infty} C_j^* . \sin j\,(\lambda - \pi) . \delta_1 e \qquad (77)$$

kde $j \neq 0$ a

$$C_j = \frac{1}{j}\left[e . J_{j-1}(j . e) + 2\sum_{h=1}^{\infty} \beta^h . J_{j-h}(j . e)\right]; \qquad \beta = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\,\varphi$$

$$C_j^* = \frac{\mathrm{d}C_j}{\mathrm{d}e}; \qquad J_n(x) \text{ značí Besselovy funkce.}$$

Poznámka:

a) Pro Zemi jsou některé veličiny tabelovány Newcombem. Pro ekvinokcium 1900,0 platí:

$$f = 6910'', 057 . \sin M + 72'', 338 . \sin 2M + 1'', 054 . \sin 3M + 0'', 018 . \sin 4M + \ldots$$

Rozvoje pro pohyb Země jsou publikovány v Astronomical Papers Vol. VI.

b) Formulí (77) se většinou používá pouze pro hledání periodických členů rozvojů.

4,42. Perturbace průvodiče

Poněvadž $\ln r = \ln a + \varrho$, přičemž rozvoj pro ϱ je dán vztahem (3,56)'', platí:

$$\delta_1(\ln r) = \delta_1(\ln a) - \sum_{j=0}^{\infty} A_j . \sin j\,(\lambda - \pi) . (\delta_1\lambda - \delta_1\pi)$$
$$+ \sum_{j=1}^{\infty} A_j^* . \cos j\,(\lambda - \pi) . \delta_1 e \qquad (78)$$

kde

$$A_j^* = \frac{\mathrm{d}A_j}{\mathrm{d}e}$$

4,43. Perturbace heliocentrické šířky a délky

Poněvadž podle obrázku 5 platí:

$$\operatorname{tg}(l - \Omega) = \operatorname{tg} u . \cos i \qquad (79)$$
$$\sin b = \sin i . \sin u$$

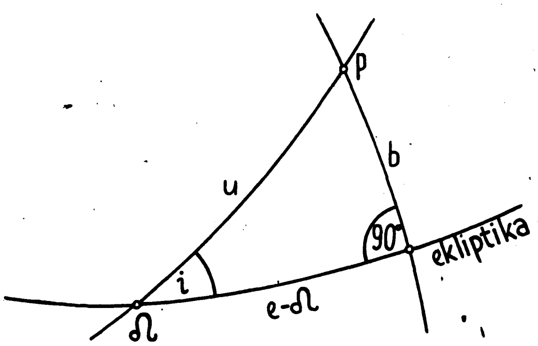
a dále:

$$u = w - \Omega = v + \pi - \Omega \tag{80}$$

můžeme [stejným postupem jako při odvozování vztahů (24) a (25) v dodatku] nalézt rozvoj:

$$l = w + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h} \left(-\operatorname{tg} \frac{i}{2}\right)^h . \sin 2\,hu \tag{81}$$

což dovoluje tabelovat b a l jako funkce u.



Obr. Vztah mezi ekliptikálními a přirozenými souřadnicemi

Nyní můžeme napsat vyjádření perturbací:

$$\begin{aligned} \delta_1 l = \delta_1 w &+ \sum_{h=1}^{\infty} \frac{(-1)^h}{h} \operatorname{tg}^h \frac{i}{2} . \cos 2h\,(w - \Omega) . 2 . (\delta_1 w - \delta_1 \Omega) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{\infty} (-1)^h . \operatorname{tg}^{h-1} \frac{i}{2} \cdot \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{i}{2}\right) (\sin 2)\, h\,(w - \Omega) . \delta_1\, i \end{aligned} \tag{82}$$

Zavedeme-li dále veličiny s a q podle (56), můžeme napsat místo (79) výraz:

$$\sin b = \cos i\,(q . \sin w - s . \cos w) \tag{83}$$

Z (83) dostaneme ihned:

$$\delta_1\, b = \frac{\cos i}{\cos b} (\sin w . \delta_1\, q - \cos w . \delta_1\, s) - \operatorname{tg} b . \operatorname{tg} i . \delta_1\, i \tag{84}$$

Formule (82) a (84) jsou správné jedině tenkrát, bereme-li všechny veličiny opravené o veškeré perturbace.

5. kapitola

ROZVOJE SOUŘADNIC ELIPTICKÉHO POHYBU V ŘADY

(dodatek)

5,1. ÚVOD

V analytických metodách nebeské mechaniky hledáme řešení problému ve tvaru řad. O dráze planet předpokládáme, že jsou eliptické a hledáme příslušné korekce. Analytická integrace Lagrangeových rovnic je možná jen tenkrát, máme-li perturbační funkci vyjádřenu v explicitní závislosti na nezávisle proměnné (čas, libovolná anomálie, střední délka ap.). Proto jsou analytické metody studia rušeného pohybu v podstatě metodami pro určení vhodných rozvojů perturbační funkce. K jejich určení je však třeba znát rozvoje jednotlivých souřadnic eliptického pohybu. Proto si v dodatku k pojednání o perturbacích elementů planetárních drah všimneme nejdůležitějších metod určování těchto rozvojů. V dalším budeme vždy předpokládat, že se jedná o nerušený pohyb po eliptické dráze.

5,2. POTŘEBNÉ VLASTNOSTI BESSELOVÝCH FUNKCÍ

Definice:

Basi rozvoje

$$\exp\left[\frac{x}{2}\,(t - t^{-1})\right] \equiv \sum_{n-\infty}^{\infty} J_n\,(x).t^n \tag{1}$$

tvoří soustava funkcí $J_n\,(x)$. Funkci $J_n\,(x)$ nazýváme Besselovou funkcí prvého druhu n-tého řádu.

Poznámka:

Poněvadž Besselovy funkce druhého druhu nebudeme v dalším potřebovat, nebudeme se zde obecnější definicí Besselových funkcí zabývat a pod pojmem Besselovy funkce budeme vždy rozumět *B.* funkci prvého druhu s celočíselným indexem. •

Taylorův rozvoj Besselovy funkce n-tého řádu lze napsat ve tvaru:

$$J_n\,(x) = \sum_{h=\varrho}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{2h+n} \cdot \frac{(-1)^h}{h!\,(h+n)!} \tag{2}$$

kde $\varrho = \max\,(0,\text{-}n)$.

Důkaz:

$$\exp\left(\frac{x}{2}\,t\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^k \frac{t^k}{k!}\,; \qquad \exp\left(-\frac{x}{2}\,t^{-1}\right) = \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h.\left(\frac{x}{2}\right)^h \frac{t^{-h}}{h!}$$

Obě tyto řady vždy absolutně konvergují. Lze je proto mezi sebou znásobit a potom členy vhodně přerovnat. Poněvadž k $\geqq$ 0, platí:

$$\exp\left[\frac{x}{2}\,(t - t^{-1})\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^h\left(\frac{x}{2}\right)^{h+k}\frac{t^{k-h}}{h!\,k!} =$$

$$k - h = n\,; \qquad = \sum_{h=\varrho}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^h\left(\frac{x}{2}\right)^{2h+n}\frac{1}{h!\,(h+n)!}\,.\,t^{n}$$

Srovnáním s (1) je důkaz proveden.

Ze vztahu (2) plynou okamžitě identity:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,[x^{n}.J_{n}(x)] = x^{n}.J_{n-1}(x) \tag{3}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,[x^{-n}.J_{n}(x)] = -\,x^{-n}.J_{n+1}(x) \tag{3'}$$

Provedeme-li operace, naznačené na levých stranách (3) a (3)′, dostaneme po jednoduché úpravě důležité vztahy:

$$\frac{n}{x}\,.J_{n}(x) = \frac{1}{2}\,[J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)] \tag{4}$$

$$J'_{n}(x) = \frac{1}{2}\,[J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)] \tag{5}$$

Ze vztahu (2) vyplývá dále:

$$J_{n}(-x) = J_{-n}(x) = (-1)^{n}\,J_{n}(x) \tag{6}$$

Důkaz:

Rovnost prvého a třetího členu je evidentní. Rovnost druhého a třetího členu dokážeme takto:

$$J_{-n}(x) = \sum_{h=\sigma}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{2h-n}\frac{(-1)^{h}}{h!\,(h-n)!} = (-1)^{n}\sum_{j=\varrho}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{2j+n}\cdot\frac{(-1)^{j}}{j!\,(j+n)!}$$

kde $h - n = j$. Poněvādž σ = max (0, n), jest ϱ = max (0, —n), takže opravdu $J_{-n}(x) = (-1)^{n}.J_{n}(x)$, cbd.

Přejdeme nyní k vyjádření Besselových funkcí ve tvaru určitého integrálu. Položíme-li v (1) $t = \exp(i.\,\varphi)$, dostaneme:

$$\exp\left[\frac{x}{2}\,(t - t^{-1})\right] = \exp(i.x.\sin\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{n}(x).\exp(i.n.\varphi)$$

Srovnáním složek a užitím (6) obdržíme identity:

$$\cos(x.\sin\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x).\cos n.\varphi = J_0(x) + 2.\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x).\cos 2n.\varphi$$

$$\sin(x.\sin\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x).\sin n.\varphi = 2.\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(x).\sin(2n-1)\varphi \tag{8}$$

Záměnou φ za $\varphi + \frac{\pi}{2}$ obdržíme z (8) rozvoje:

$$\cos(x.\cos\varphi) = J_0(x) + 2.\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n.J_{2n}(x).\cos 2.n.\varphi$$

$$\sin(x.\cos\varphi) = 2.\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}.J_{2n-1}(x).\cos(2.n-1)\varphi \tag{8)'$$

Z (8) vyplývají vztahy:

$$J_{2n}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(x.\sin\varphi).\cos 2.n.\varphi.d\varphi$$

$$J_{2n-1}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(x.\sin\varphi).\sin(2n-1)\varphi.d\varphi \tag{9}$$

Z (8) však vyplývá rovněž:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(x.\sin\varphi).\sin 2.n.\varphi.d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(x.\sin\varphi).\cos(2n-1)\varphi.d\varphi = 0$$

takže můžeme napsat jednotné integrální vyjádření Besselových funkcí:

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(x.\sin\varphi - n.\varphi).d\varphi \tag{10}$$

Obdobným postupem lze z (8) odvodit:

$$\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(x.\sin\varphi - n.\varphi).d\varphi = 0$$

Proto platí:

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp i(x.\sin\varphi - n.\varphi).d\varphi \tag{10)'$$

Na závěr tohoto paragrafu odvodíme ještě jedno integrální vyjádření Besselových funkcí, které se hodí zejména pro velká n, kdy je formule (10) velmi nevýhodná. Z integrálního počtu je známo:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^{2n}\varphi.\cos^{2h}\varphi\, d\varphi = \frac{1.3\ldots(2n-1).1.3\ldots(2h-1)}{2^{n+h}.(n+h)!}$$

Použitím této identity a záměnou sumace a integrace dostaneme z (2):

$$J_n(x) = \frac{x^n}{1.3\ldots.(2n-1)}\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^{2n}\varphi.\cos(x.\cos\varphi)\, d\varphi \tag{11}$$

5,3. TRANSFORMACE ŘADY MOCNIN E NA ŘADU MOCNIN M

Besselových funkcí, o nichž jsme pojednali v minulém paragrafu, použijeme nyní při hledání rozvojů souřadnic eliptického pohybu. Jak známo z nebeské mechaniky, lze řešení problému dvou těles (nehledíme-li na polohu roviny dráhy v prostoru) napsat ve tvaru:

$$\begin{aligned} M &= k_1.a^{-\frac{3}{2}}(t-T)\\ E - e.\sin E &= M\\ r &= a(1-e.\cos E)\\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}v &= \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}.\operatorname{tg}\frac{1}{2}E \end{aligned} \tag{12}$$

Mějme funkci $\exp(i.n.E)$. Podle teorie Fourierových rozvojů musí vzhledem k druhé rovnosti (12) platit:

$$\exp(i.n.E) = \sum_{k-\infty}^{\infty} c_k^{(n)}.\exp(i.k.M) \tag{13}$$

kde pro $k \neq 0$

$$\begin{aligned} c_k^{(n)} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp(i.n.E).\exp(-i.k.M).dM =\\ &= \left[-\frac{1}{2\pi i k}\exp(i.n.E).\exp(-i.k.M)\right]_{M=0}^{2\pi} +\\ &\quad + \frac{n}{2\pi k}\int_0^{2\pi}\exp i(n.E-k.M).\, dE \end{aligned}$$

Prvý člen je zřejmě roven nule. Druhý lze s pomocí (12) a (10)′ upravit takto:

$$c_k^{(n)} = \frac{n}{2\pi k}\int_0^{2\pi}\exp[i.k.e.\sin E - i(k-n)E].\, dE = \frac{n}{k}J_{k-n}(ke)$$

Poněvadž $c_0^{(n)} = 0$ pro $n \neq 1$, $c_0^{(1)} = -\frac{1}{2}e$, lze pro $n \neq 1$ *a*: $k \neq 0$ psát:

$$\exp(i.n.E) = n \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k} J_{k-n}(ke).\exp(i.k.M) \tag{14}$$

Pro $n = 1$, *a* $k \neq 0$ platí:

$$\exp(i.E) = -\frac{1}{2}e + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k} J_{k-1}(ke).\exp(i.k.M) \tag{15}$$

Srovnáním složek u (15) dostaneme po zjednodušení pomocí (4) a (5):

$$\left.\begin{aligned} \cos E &= -\frac{1}{2}e + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} J'_k(ke).\cos k.M \\ \sin E &= \frac{2}{e}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} J_k(ke).\sin k.M \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Ze vztahů (14) — (16) vyplývá celá řada důležitých rozvojů. Některé si uvedeme:

1) Keplerovu rovnici $E - e.\sin E = M$ lze přepsat ve tvaru řady:

$$E = M + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} J_k(ke).\sin kM \tag{17}$$

2) Pro poměr průvodiče a velké poloosy platí:

$$\left(\frac{r}{a}\right) = 1 - e.\cos E = 1 + \frac{1}{2}e^2 - 2.e\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{k} J'_k(ke).\cos kM \tag{18}$$

3) Poněvadž

$$\frac{d}{dM}\left(\frac{r}{a}\right)^2 = 2.e.\sin E = 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} J_k(ke).\sin kM$$

můžeme po integraci napsat:

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2 = C - 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} J_k(ke).\cos kM$$

Hodnotu konstanty C určíme rozvedením výchozího vztahu:

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2 = 1 + \frac{1}{2}e^2 - 2.e.\cos E + \frac{1}{2}e^2.\cos 2E$$

Výraz pro $\cos E$ má podle (16) konstantní člen $-e$.
Výraz pro $\cos 2E$ nemá podle (14) žádný konstantní člen.

Proto $C - = 1 + \frac{3}{2} e^2$, takže

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2 = 1 + \frac{3}{2} e^2 - 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} J_k (ke) . \cos kM \tag{19}$$

4) Hodnotu $\frac{a}{r}$ nalezneme s pomocí (12) a (17) takto:

$$\frac{a}{r} = \frac{1}{1 - e . \cos E} = \frac{dE}{dM} = 1 + 2 \sum_{h=1}^{\infty} J_k (ke) . \cos kM \tag{20}$$

5) Jako poslední aplikaci vzorců (14) — (16) nalezneme rozvoj $\left(\frac{a}{r}\right)^2$. Zákon zachování momentu hybnosti pro problém dvou těles můžeme napsat ve tvaru:

$$r . \frac{dv}{dt} = k_1 . a^{1/2} . \cos \varphi$$

kde $e = \sin \varphi$. Odtud vyplývá:

$$\left(\frac{a}{r}\right)^2 = \sec \varphi . k_1^{-1} . a^{3/2} . \frac{dv}{dt} = \sec \varphi . \frac{dv}{dM}$$

Jak ukážeme později (viz rovnice 28), lze pro $k \neq 0$ psát:

$$\frac{dv}{dM} = 1 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} k . C_k . \cos kM$$

Proto:

$$\left(\frac{a}{r}\right)^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k . \cos kM \tag{21}$$

kde $e = \sin \varphi$. $\beta = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$. Pro k $\neq$ 0

$$D_k = \left[e . J_{k-1} (ke) + 2 \sum_{h=1}^{\infty} \beta^h J_{k-h} (ke) \right] \sec \varphi; \qquad D_0 = \sec \varphi$$

Poznámka:

Takto odvozený rozvoj veličiny $\left(\frac{a}{r}\right)^2$ je v tomto článku publikován poprvé.

Nyní budeme zkoumat přechod od Fourierova rozvoje vzhledem k E k Fourierovu rozvoji vzhledem k M. Mějme funkci $F(E)$, pro níž platí:

$$F = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n . \exp (i . n . E) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n . y^n \tag{22}$$

Vzhledem k (12) musí být také:

$$F = \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_k . \exp(i.k.M) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_k . z^k \tag{23}$$

Naší snahou nyní bude vyjádřit koeficienty B_k jako funkce b_k a excentricit. Všimneme si tří metod, jak toho lze dosáhnout:

1) S pomocí vztahů (14)

$$F = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \exp(i.n.E) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n.b_n.k^{-1}.J_{k-n}(ke).\exp(i.k.M)$$

kde $k \neq 0$ dostaneme srovnáním s (23):

$$B_0 = b_0 - \frac{1}{2} e$$

$$B_k = \frac{1}{k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n.b_n.J_{k-n}(ke)$$

což jsou hledané převodní vztahy. Nevýhodou tohoto postupu však je nutnost znát hodnoty „všech" Besselových funkcí ve „všech" celočíselných násobcích excentricity. Proto bývá často užitečné užít některého z dalších postupů.

2) Podle teorie Fourierových rozvojů platí (s užitím 12):

$$B_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F.z^{-k}.\mathrm{d}M = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F.\exp\left[\frac{1}{2} k.e(y - y^{-1})\right]\left[1 - \frac{1}{2} e(y + y^{-1})\right] y^{-k}.\mathrm{d}E = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T.y^{-k}.\mathrm{d}E$$

kde $T = F.\exp\left[\frac{1}{2} k.e(y - y^{-1})\right]\left[1 - \frac{1}{2} e(y + y^{-1})\right]$

Odtud vyplývá prvé Cauchyho pravidlo:

K nalezení koeficientů B_k v rozvoji (23) je třeba rozložit ve Fourierovu řadu funkci T, v níž za F je dosazen rozvoj (22). Koeficient u y^k je roven hledanému B_k.

3) Obdobně jako v minulém odstavci lze psát:

$$B_k = \frac{1}{2\pi} \int^{2\pi} F.z^{-k}.\mathrm{d}M = \frac{i}{2\pi k} \int_0^{2\pi} F \frac{\mathrm{d}(z^{-k})}{\mathrm{d}M} \mathrm{d}M =$$

$$= \left[\frac{i}{2\pi k} F.z^{-k}\right]_{M=0}^{2\pi} - \frac{i}{2\pi k} \int^{2\pi} \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}M} z^{-k}.\mathrm{d}M = -\frac{i}{2\pi k} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}E} z^{-k}.\mathrm{d}E =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y}\, y^{-(k-1)}\, \frac{1}{k} \exp\left[\frac{1}{2} k.e\,(y - y^{-1})\right].\mathrm{d}E = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} W.y^{-(k-1)}.\mathrm{d}E$$

kde $W = \frac{1}{k}\,\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}y} \exp\left[\frac{1}{2} k.e\,(y - y^{-1})\right]$

Odtud vyplývá druhé Cauchyho pravidlo:

K nalezení koeficientů B_k v rozvoji (23) je třeba rozložit ve Fourierovu řadu funkci W, v níž za F je dosazen rozvoj (22). Koeficient u y^{k-1} je roven hledanému B_k.

5,4. ROZVOJE, KTERÉ OBSAHUJÍ PRAVOU ANOMÁLII

Poloha planety v rovině dráhy je, jak známo, určena pravou anomálií. Mezi pravou a excentrickou anomálií je vztah:

$$\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\,v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\;\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\,E$$

Tento vztah je ekvivalentní s rozvoji:

$$v = E + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(+\beta)^k}{k}.\sin kE \qquad (24)$$

$$E = v + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\beta)^k}{k}.\sin kv \qquad (25)$$

kde $e = \sin\varphi$, $\beta = \mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\,\varphi$.

Důkaz:

1) Zřejmě platí:

$$\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\,v = \frac{\exp(iv) - 1}{i\,[\exp(iv) + 1]}\,; \qquad \mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\,E = \frac{\exp(iE) - 1}{i\,[\exp(iE) + 1]}\,;$$

$$\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} = \frac{1+\beta}{1-\beta}$$

Odtud dostaneme s pomocí převodního vztahu:

$$\exp(i.v) = \frac{1 - \beta\exp(-iE)}{1 - \beta\exp(iE)}\,.\exp(i.E)$$

Logaritmováním posledního vztahu dostaneme s užitím rozvoje přirozených logaritmů

$$iv = iE + \ln [1 - \beta \exp (-iE)] - \ln [1 - \beta . \exp (iE)] =$$

$$= iE - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta^k \exp (-ikE)}{k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta^k \exp (ikE)}{k}$$

$$= iE + 2i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta^k}{k} \cdot \frac{\exp (ikE) - \exp (-ikE)}{2i} =$$

$$= iE + 2i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta^k}{k} \cdot \sin kE, \text{ cbd.}$$

2) Druhé tvrzení se dokáže zcela obdobně.

Dalšími důležitými veličinami, jejichž rozvoj budeme hledat, je $\sin v$ a $\cos v$. Z (12) vyplývá:

$$r = \frac{a . \cos^2 \varphi}{1 + e . \cos v}$$

Neboli:

$$e . \cos v = \left(\frac{a}{r}\right) . \cos^2 \varphi - 1$$

Proto podle (20):

$$\cos v = -e + \frac{2 \cos^2 \varphi}{e} \sum_{k=1}^{\infty} J_k (ke) . \cos kM \tag{26}$$

Dále si všimněme vztahu, který po jednoduchých úpravách vyplývá z (12):

$$\frac{d}{dM}\left(\frac{r}{a}\right) = \frac{dE}{dM} \cdot \frac{d}{dE} (1 - e . \cos E) = \frac{e . \sin E}{1 - e . \cos E} = \frac{e}{\cos \varphi} \cdot \sin v.$$

Odtud dostaneme s pomocí (18):

$$\sin v = 2 . \cos \varphi \sum_{k=1}^{\infty} J'_k (ke) . \sin kM \tag{27}$$

Odvodíme si nyní důležitý vztah, který nazýváme **rovnice středu.** Dosadíme-li rozvoje (14) do (24) dostaneme:

$$v = M + \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k . \sin kM \tag{28}$$

kde $k \neq 0$ a

$$C_k = \frac{1}{k} \left[e . J_{k-1} (ke) + 2 \sum_{h=1}^{\infty} \beta^h J_{k-h} (ke) \right]$$

Poznámka:

a) Ve tvaru (28) je zde rovnice středu uvedena poprvé. V literatuře je zpravidla uváděna ve tvaru:

$$v = M + \sum_{k=1}^{\infty} H_k . \sin kM \tag{28'}$$

kde vzhledem k (6) a (16) zřejmě $H_k = C_k + C_{-k}$. Pro koeficienty H_k uvádí SUBBOTIN rozvoje:

$$H_1 = 4\left(\frac{e}{2}\right) - 2\left(\frac{e}{2}\right)^3 + \frac{5}{3}\left(\frac{e}{2}\right)^5 + \frac{107}{36}\left(\frac{e}{2}\right)^7 - \dots$$

$$H_2 = 5\left(\frac{e}{2}\right)^2 - \frac{22}{3}\left(\frac{e}{2}\right)^4 + \frac{17}{3}\left(\frac{e}{2}\right)^6 + \dots$$

atd.

b) Někteří autoři (např. TISSERAND) nazývají rovnicí středu rozvoj výrazu $\sin(v - M)$. Analytické vyjádření tohoto rozvoje nalezneme takto:

Vzhledem k rozvojům (15) jsou formule (26) a (27) ekvivalentní se vztahy:

$$\sin v = \cos \varphi \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{k-1}(ke) . \sin kM$$

$$\cos v = -e + \cos^2 \varphi \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{k-1}(ke) . \cos kM$$

kde $k \neq 0$.

Odtud dostaneme po jednoduchých úpravách:

$$\sin(v - M) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k . \sin kM \tag{29}$$

kde

$$F_k = \cos\varphi \left[J_{k-2}(ke - e) . \sin^2 \frac{\varphi}{2} - J_k(ke - e) . \cos^2 \frac{\varphi}{2} \right] \quad \text{pro } k \neq 1$$

$$F_1 = e$$

Ve tvaru (29) je rovnice středu uvedena poprvé.

Na závěr paragrafu uvedeme rozvoj opačný k rovnici středu.
Platí:

$$M = v + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 + k . \cos\varphi)(-\beta)^k}{k} . \sin kv \tag{30}$$

Důkaz:

Z (12) lze s pomocí Keplerovy rovnice dokázat:

$$\sin E = \frac{\cos\varphi . \sin v}{1 + e . \cos v} = \frac{\cos\varphi}{e} . \frac{d}{dv} [\ln(1 + 1 . \cos v)]$$

Poněvadž

$$1 + e.\cos v = \cos^2 \frac{\varphi}{2} [1 + \beta \exp (i.v)].[1 + \beta \exp (-i.v)]$$

Neboli:

$$\ln (1 + e.\cos v) = \ln \cos^2 \frac{\varphi}{2} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\beta)^k}{k} \cos k.v$$

Můžeme psát:

$$\sin E = \frac{2 \cos \varphi}{e} \sum_{k=1}^{\infty} (-\beta)^k \sin k.v$$

A s pomocí (25):

$$M = v + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\beta)^k}{k} (1 + k.\cos \varphi).\sin k.v, \quad \text{cbd}$$

5,5. OTÁZKA KONVERGENCE ROZVOJŮ SOUŘADNIC ELIPTICKÉHO POHYBU

Dosud jsme ve všech úvahách mlčky předpokládali stejnoměrnou a absolutní konvergenci zkoumaných řad. Kdyby tyto předpoklady nebyly splněny, nebyly by možnými různé operace, které jsme se řadami prováděli (derivování a integrace člen po členu, přerovnávání členů, záměna sumace a integrace atd). Zbývá nám tedy rozhodnout, kdy jsou prováděné operace oprávněné — tj. — kdy je odvozený aparát použitelný.

Mějme funkci:

$$F (E) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m.\exp (2.i.m.E) \qquad (31)$$

kde m nabývá všech celočíselných násobků jedné poloviny.

Zvolme libovolné pevné M a hledejme maximální excentricitu, pro níž (31) pro toto M konverguje. Pro dané M je funkce F holomorfní v těch oblastech, kde $\frac{dF}{de}$ je konečné. Protože podle Keplerovy rovnice

$$\frac{dF}{de} = \frac{dF}{dE} \cdot \frac{\sin E}{1 - e.\cos E}$$

budou obecně singulární body tam, kde

$$1 - e.\cos E = 0$$

Při tom jsme nechali stranou případy, kdy $\frac{dF}{dE} = 0$ nebo $\frac{dF}{dE} = \infty$

Pro dané M_1 musíme zřejmě řešit soustavu:

$$\begin{aligned} 1 - e.\cos E &= 0 \\ E - e.\sin E &= M_1 \end{aligned} \qquad (32)$$

Hledaný maximální poloměr konvergence bude roven nejmenšímu (co do absolutní hodnoty) imaginárnímu kořenu (32). Na imaginární řešení se stačí omezit proto, že pro řešení (32) $e^{(1)}$ atd. platí:

$$\varrho\,(M_1) = \min\,(|e^{(1)}|) = \min\,|\sec E^{(1)}| \tag{33}$$

což je pro každé reálné řešení v rozporu se zřejmým faktem $\varrho\,(M_1) \leqq 1$.

Z (32) a (33) vyplývá:

$$\varrho\,(\pi \pm M) = \varrho\,(M) \tag{34}$$

Důkaz:

Zaměníme-li M a E v (32) za $\pi \pm M$ a $\pi \pm E$, zachovávají vztahy (32) svůj tvar, dosadíme-li za e $(-e)$. V tomto případě se podle (33) nezmění ani poloměr konvergence, cbd.

Budeme nyní řešit obecnější problém: Určit maximální poloměr konvergence, při němž rozvoj (31) ještě konverguje pro všechna M. Abychom mohli tento problém rozřešit, musíme určit, pro která M je poloměr konvergence nejmenší. Dříve než přejdeme k vlastní problematice, dokážeme jednu pomocnou větu:

Mějme funkce

$$\begin{aligned} \Phi\,(M, e) &= \exp\,(2.i.m.E) \\ \Psi\,(M, e) &= \Phi\,(M, e) + \Phi\,(\pi + M, e) \end{aligned} \tag{35}$$

Funkce $\Psi\,(M,\, e)$ diverguje právě tehdy, diverguje-li alespoň jeden ze sčítanců v její definiční rovnici.

Důkaz:

1) Předpokládejme divergenci $\Psi\,(M, e)$. Kdyby konvergovaly oba sčítanci na pravé straně druhé rovnice (35), konvergoval by i jejich součet — spor.

2) Předpokládejme divergenci $\Phi\,(M, e)$. Řada pro $\Psi\,(M,\, e)$ by mohla konvergovat jedině tenkrát, kdyby prvý i druhý sčítanec měly stejné singulární body, jejichž vlivy by se „kompensovaly". Odpovídá-li prvému sčítanci singulární bod e, odpovídá druhému $-e$. Pokud $M \neq \pi \pm M$, nemůže být $-e$ singulárním bodem $\Phi\,(M, e)$, neboť záměně e za $-e$ odpovídá záměna M za $\pi \pm M$. Obdobně by se dokázalo, že obecně nemůže být e singulárním bodem $\Phi\,(\pi + M, e)$. Je-li $M = \frac{\pi}{2}$, výplývá z divergence $\Phi\,(M, e)$ neabsolutní konvergence $\Phi\,(\pi + M,\, e)$. Tím je dokázáno, že z divergence jednoho sčítanců vyplývá divergence součtu v druhé rovnici (35).

Nyní dokážeme nejdůležitější tvrzení tohoto paragrafu:

$$\min\,[\varrho\,(M)] = \varrho\left(\frac{\pi}{2}\right) \tag{36}$$

Důkaz:

Vzhledem k tomu, že koeficienty B_m v rozvoji (31) závisí pouze na charakteru funkce $F(E)$, může se poloměr konvergence této řady měnit jenom se změnou poloměru konvergence činitelů $\exp\,(2\,.\,i\,.\,m\,.\,E)$. Označme $M_1 \neq \frac{\pi}{2}$ libovolnou pevnou hodnotu střední anomálie. Nechť $\varrho\,(M_1) < e_1 < 1$. Pak řada

$\Psi(M_1, e_1)$, kde Ψ je funkce z (35), jistě diverguje. Vezměme funkci $\Psi(M, \alpha e_1)$, která má podle (14) a (35) rozvoj:

$$\Psi(M, \alpha e_1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{h=\nu}^{\infty} \frac{2m}{k} (k \alpha e_1)^{2h+2k-2m} \frac{(-1)^h}{h!\,(h+2k-2m)!} z$$

kde $k \neq 0$, $z = \exp(i.M)$, $\nu = \max(0, 2m - 2k)$.

Zvolíme-li za α komplexní jednotku, mají odpovídající si členy rozvojů $\Psi(M_1, e_1)$ a $\Psi(M, \alpha e_1)$ stejné moduly. Nejpříznivější případ pro divergenci řady $\Psi(M, \alpha e_1)$ nastane tenkrát, když argumenty všech jejích členů budou stejné. Argument obecného členu je roven:

$$M.2k + (2h + 2k - 2m) - \pi.h = k(2M + 2\beta) + h(2\beta - \pi) - 2m\beta$$

Na sčítacích indexech bude poslední výraz nezávislý tehdy, když

$$M = -\frac{\pi}{2}, \beta = \frac{\pi}{2} =) \alpha = i$$

To znamená: Z divergence $\Psi(M_1, e_1)$ vyplývá divergence $\Psi(-\frac{\pi}{2}, i e_1)$, odkud podle pomocné věty vyplývá divergence alespoň jednoho z rozvojů $\Psi(\pm\frac{\pi}{2}, ie)$. To však vzhledem k (33) neznamená nic jiného, než že poloměr konvergence pro $M = \frac{\pi}{2}$, není nikdy větší než poloměr konvergence pro libovolné M, cbd.

Z (32) a (36) nyní vyplývá, že musíme řešit rovnici:

$$E_0 - \operatorname{tg} E_0 = \frac{\pi}{2}$$

Neboli:

$$G_0 . \sin G_0 + \cos G = 0 \qquad (37)$$

kde $G_0 = \frac{\pi}{2} - E_0$.

Nyní se naskýtá možnost nalézt všechny imaginární kořeny (37) a ten, jehož absolutní hodnota je nejmenší, ztotožnit s hledaným poloměrem konvergence. Tento postup by však byl vzhledem k transcendentnosti (37) velmi obtížný. Lze však postupovat takto:

Z (37) je ihned vidět: Je-li A kořenem této rovnice, je i komplexně sdružené číslo $\bar{A}$ jejím řešením. Odtud však vyplývá dále, že se stačí omezit na ryze imaginární kořeny (37).

Důkaz:

Označme A a $\bar{A}$ dva komplexně sdružené kořeny rovnice (37).
Zaveďme funkce:

$$f_1(\tau) = \cos A\tau, \quad f_2(\tau) = \cos \bar{A}\tau$$

Zřejmě platí:

$$f_1'' + A^2.f_1 = 0; \quad f_2'' + \bar{A}^2.f_2 = 0$$
$$f_1'(0) = 0, f_2'(0) = 0, f_1'(1) = -A.\sin A = \cos A, f_2'(1) = \cos \bar{A}$$
$$(\bar{A}^{-2} - A^2).f_1.f_2 = f_1''.f_2 - f_1.f_2''$$

Integrací v mezích 0, 1 dostaneme:

$$(\bar{A}^2 - A^2) \int_0^1 f_1.f_2 \, d\tau = [f_1'.f_2 - f_1.f_2']_0^1 = 0$$

Jelikož integrál v posledním výrazu je vždy různý od nuly, musí být vzhledem k (33) A a $\bar{A}$ ryze imaginární čísla, obd.

Po substituci $H_0 = i.G_0$ dostaneme z (36):

$$H_0.shH_0 - chH = 0$$

kde se vyskytují pouze reálné veličiny. Tato rovnice má jediný reálný kořen $H_0 = 1{,}19968\ldots.$

Protože:

$$\varrho\left(\frac{\pi}{2}\right) = |e_0| = |\sec E_0| = |\operatorname{cosec} G_0| = |\operatorname{cosech} H_0| = 0{,}66274\ldots$$

To znamená, že pokud je excentricita menší než

$$e = 0{,}66274\ldots \tag{38}$$

rozvoje souřadnic eliptického pohybu teoreticky konvergují. Praktická použitelnost odvozených řad je však daleko omezenější. Naopak však hodnota (38) ukazuje, že pro planety, planetky, umělé družice a jiné dráhy s malou excentricitou jsou uvedené rozvoje celkem dobře použitelné.

ZNAČENÍ NEJDŮLEŽITĚJŠÍCH VELIČIN

$k_1^2 = k^2.(1 + m)$ ... k^2 ... gravitační konstanta, m ...hmota planety jako násobek sluneční hmoty,
a ... velká poloosa eliptické dráhy, a_j ... vektor v Lagrangeově pohybu,
$e = \sin\varphi$ ... numerická excentricita,
i ... sklon dráhy, výjimečně sčítací index, popř. imaginární jednotka,
ω ... vzdálenost perihelu (na počátku 3. kapitoly kanonický element),
π ... délka perihelu, Ludolfovo číslo,
☊ ... délka výstupného uzlu,
$p = a.\cos^2\varphi$... parametr
r ... průvodič, r ... průvodič jakožto vektor,
M ... střední anomálie,
E ... excentrická anomálie,
v ... pravá anomálie,
$u = v + \omega$ ... argument šířky,

$\lambda = \pi + M$ ... střední délka,
$\varepsilon = \pi + M_0$ ... střední délka epochy,
R ... perturbační funkce,
$\mathbf{R}$ ... průvodič význačného bodu (těžiště),
S, T, W (s příslušným indexem) ... rušící zrychlení (viz 2, 25),
W ... délka planety měřená od průsečíku drah,
T ... okamžik průchodu perihelem, kinetická energie,
n ... střední denní pohyb, počet planet, výjimečně sčítací index,
ω ... vektor rotace,
t ... čas.

НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ ПЛАНЕТНЫХ ОРБИТ

Резюме

Статья состоит из четырех глав. Первая глава трактует об общих свойствах проблемы n тел и некоторых ее применениях (движение Лаґранжа, движение в сопротивляющейся среде и т. д.) — Вторая глава трактует о выводе дифференциальных уравнений для оскулирующих элементов и о различных системах канонических элементов. — Третья глава трактует о разложениях пертурбационной функции в ряды и можно ее разделить на две части: 1) общие свойства разложений (изучено формой доказательств существования), 2) конкретный вид разложений. — Четвертая глава трактует о методах определения возмущений (Леверье, метод Гаусс-Хилля для определения вековых возмущений, метод Лагранжа для определения вековых возмущений минимального ранга).

Характер статьи преимущественно теоретический. Поэтому — по мере осуществления — всегда используется векторная символика и разложения по мере возможности приведены в самом общем виде.

В нескольких случаях проблематика в приведенном виде публикована первый раз. Это относится именно к разложениям координант эллиптического движения в ряды [например уравнения (21), (28), (29)], к преобразованию Гаусса [коэффициенты α_{ij} в уравнениях (4, 19) имеют после простых приспособлений тензорный характер, откуда вытекает обобщение других рассуждений] и к другим специальным вопросам.

SOME PROBLEMS OF THE ANALYTICAL THEORY OF THE PERTURBATIONS OF THE ELEMENTS OF PLANETARY ORBITS

Abstract

This paper is divided into four chapters. The first chapter deals with the general quality of the problem of n bodies and with some applications of it. — The second chapter deals with the derivation of the differential equations for the osculant elements and with the different systems of the canonic elements. — The third chapter deals with the development of the perturbative function and can be divided into two parts:

1. The general qualities of the developments (it is written in the form of proofs of existence).

2. The concrete form of the development. — The fourth chapter deals with the methods of the determination of the perturbations (Leverrier method, Gauss-Hill method for the determination of the secular perturbations, Lagrange's method for the determination of the secular perturbations of minimal rank).

The character of the paper is mostly theoretical. Therefore the vector symbolic is prefered as much as possible and the development are treated in their general forms into the final limits.

In several cases the problematic is published for the first time in this form. This concérns particularly: Some developments of the co-ordinantes of the elliptical movement [for example the equations (21), (28), 29)], the quality of the Gauss transformation [the coefficients α_{ij} in the equation (4,19) acquire after simple arrangements tensor character, which also generalises the following reflections] and the other special questions.

LITERATURA

I. Procházka: Sférická astronomie, Brno 1951.
II. Субботин: Курс небесной механики I., Москва, 1941.
III. Субботин: Курс небесной механики II., Москва, 1937.
IV. Tisserand: Traité de mécanique céleste I, Paříž, 1889.
V. Andoyer: Cours de mécanique céleste I., Paříž, 1923.
VI. Poincaré: Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste I., Paříž 1892.
VII. Plummer: Dynamical Astronomy, Cambridge, 1918.
VIII. Moulton: Celestial Mechanics, New York, 1914.
IX. Smart: Celestial Mechanics, Londýn, 1910.
X. Charlier: Die Mechanik des Himmels I, Berlín, 1953.
XI. Wintner: Analytical Foundation of Celestial Mechanics, Londýn, 1947.
XII. Дубяго: Определение орбит Москба 1950.
XIII. Хильми: Качественныеметоды в проблеме n тел:, Москва, 1952.
XIV. Хильми: Проблема n тел в небесной механике и космогонии, Москва, 1957.
XV. Зигель: Лекции по небесной механике, Москва, 1960.
XVI. Блажко: Курс сферической астрономии, Москва, 1951.
XVII. Sehnal: 1959, Bac. 10. No 2, 67
XVIII. Hill: Collected Mathematical Works II. (On Gauss's Method of Computing Secular Perturbations...), Washington, 1906.
XIX. Степанов: Сферическая тригонометрия, Москва, 1955.
XX. Голдстейн: Классическая механика, Москва, 1957.
XXI. Lebeděv: Speciální funkce a jejich použití, Praha, 1956.
XXII. Ilkovič: Vektorový počet, Bratislava, 1950.
XXIII. Trkal: Mechanika hmotných bodů a tuhého tělesa, Praha, 1956.