Petr Vopěnka

Množiny v rovině, které každá algebraická ireducibilní křivka protne v předepsaném počtu bodů

Acta Universitatis Carolinae. Mathematica, Vol. 1 (1960), No. 2, 45--50

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/142116`

1960 ACTA UNIVERSITATIS CAROLINAE — MATHEMATICA NO. 2. PAG. 45—50

MNOŽINY V ROVINĚ, KTERÉ KAŽDÁ ALGEBRAICKÁ IREDUCIBILNÍ KŘIVKA PROTNE V PŘEDEPSANÉM POČTU BODŮ

МНОЖЕСТВА В ПЛОСКОСТИ, КОТОРЫЕ ВСЯКАЯ ИРРЕДУЦИБИЛЬНАЯ АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ КРИВАЯ ПЕРЕСЕКАЕТ В ПРЕЖДЕ ЗАДАННОМ ЧИСЛЕ ТОЧЕК

SETS IN A PLANE WHICH EVERY IRREDUCIBLE ALGEBRAIC CURVE MEETS IN A GIVEN NUMBER OF POINTS

PETR VOPĚNKA

Matematicko-fysikální fakulta University Karlovy

Jedním z výsledků této práce je důkaz existence množiny v rovině, kterou každá přímka protne přesně v předem daném počtu bodů, jenž je nejméně roven 2. Tento předepsaný počet může být pro každou přímku jiný. Dále je ukázáno, že taková množina není určena jednoznačně, neboť existuje dokonce $2^{\aleph_0}$ takových různých množin v rovině. Problém existence a jednoznačnosti takové množiny položil H. Steinhaus na mezinárodním matematickém sjezdu v Praze v roce 1955. V této práci je rozřešen ještě mnohem obecnější problém (viz důsledky I, II, III, IV).

Hlavní výsledky jsou obsaženy ve dvou větách, z nichž první je existenční a druhá je větou o nejednoznačnosti. Obě věty jsou formulovány v čistě množinovém tvaru, což dovoluje jejich užití na řadu konkrétních případů, z nichž nejdůležitější jsou uvedeny v důsledcích I, II, III, IV.

Problém efektivní konstrukce takových množin zůstává otevřen.

Věta I: Buď R nekonečná množina. Buďte A^k ($k = 1, 2, \dots$) systémy množin v R, $A^k = \{A^k_\alpha\}$, moh $A^k \leqq$ moh R, moh $A^k_\alpha =$ moh R. Buď moh $(A^k_\alpha \cap A^l_\beta) < \aleph_0$, je-li $\alpha \neq \beta$ nebo $k \neq l$. Nechť existují přirozená čísla n_k taková, že pro $\alpha \neq \beta$ je moh $(A^k_\alpha \cap A^k_\beta) < n^k$. Buďte a^k_α přirozená čísla, $a^k_\alpha \geqq n_k$.

Potom existuje v R množina N taková, že moh $(N \cap A^k_\alpha) = a^k_\alpha$ pro každé A^k_α.

Důkaz: Buď Ω první ordinalní číslo mohutnosti $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A^k$. Zřejmě moh $\Omega \leqq$ moh R. Všechny prvky množiny $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A^k$ lze dobře uspořádat podle ordinálního typu Ω. Buď $\{B_\alpha\}_{\alpha<\Omega}$ tato množina, kde α probíhá všechna ordinální čísla menší než Ω a větší než 0.

Definujeme nyní indukcí množiny M_α, kde $\alpha < \Omega$.

Položme nejprve $M_0 = \emptyset$.

Předpokládejme, že jsou již sestrojeny množiny M_β pro všechna $\beta < \alpha$, kde α je nějaké ordiální číslo menší než Ω a nechť platí:

a) Jestliže $\beta' < \beta$, pak $M_{\beta'} \subset M_\beta$.

b) moh $M_\beta \leqq$ moh β pro β nekonečné,
moh $M_\beta < \aleph_0$ pro β konečné.

c) Pro $\gamma \leqq \beta$ nechť $B_\gamma = A^k_\delta$, pak moh $(M_\beta \cap B_\gamma) = a^k_\delta$.

d) Pro $\gamma > \beta$ nechť $B_\gamma = A^k_\delta$, pak moh $(M_\beta \cap B_\gamma) \leqq n_k$.

Potom platí:

a') Jestliže $\beta < \alpha$, pak $M_\beta \subset \underset{\delta<\alpha}{U} M_\delta$.

b') moh $\underset{\beta<\alpha}{U} M_\beta \leqq$ moh α pro α nekonečné,
moh $\underset{\beta<\alpha}{U} M_\beta < \aleph_0$ pro α konečné.

c') Pro $\gamma < \alpha$, je-li $B_\gamma = A^k_\delta$, pak moh $(\underset{\beta<\alpha}{U} M_\beta \cap B_\gamma) = a^k_\delta$.

d') Pro $\gamma \geqq \alpha$, je-li $B_\gamma = A^k_\delta$, pak moh $(\underset{\beta<\alpha}{U} M_\beta \cap B_\gamma) \leqq n_k$.

Skutečně případ a') plyne bezprostředně, b') platí, neboť pro α konečné je $\underset{\beta<\alpha}{U} M_\beta$ množina konečná a pro α nekonečné je $\underset{\beta<\alpha}{U} M_\beta$ sjednocením nejvýše moh α množin mohutnosti nejvýše moh α, tedy moh $\underset{\beta<\alpha}{U} M_\beta \leqq$ moh α. Důkaz c'). Poněvadž podle c) je moh $(M_\beta \cap B_\gamma) = a^k_\delta$, je zřejmě moh $(\underset{\beta<\alpha}{U} M_\beta \cap B_\gamma) \geqq a^k_\delta$. Nechť platí ostrá nerovnost. Pak ale, poněvadž a^k_δ je přirozené číslo, existuje množina M_β $(\beta < \alpha)$ tak, že moh $(M_\beta \cap B_\gamma) > a^k_\delta$, což je spor s c) a d). Důkaz d'). Nechť moh $(\underset{\beta<\alpha}{U} M_\beta \cap B_\gamma) > n_k$. Pak existuje podobně jako v případě c') množina M_β $(\beta < \alpha)$ tak, že moh $(M_\beta \cap B_\gamma) > n_k$, což je opět spor s d), poněvadž $\beta < \gamma$.

Nyní bude popsána konstrukce množiny M_α. Buď T^1_α množina, jejímiž prvky jsou všechny $A^k_\delta \neq B_\alpha$, které mají průnik s $\underset{\beta<\alpha}{U} M_\beta$ nejméně mohutnosti n_k. Pro pevné k je ve třídě A^k takových množin ne více než moh α pro α nekonečné a ne více než $\aleph_0$ pro α konečné. (Skutečně, každá n_k-tice bodů z $\underset{\beta<\alpha}{U} M_\beta$ určuje nejvýše jedno takové A^k_δ.) Je tedy moh $T^1_\alpha \leqq \aleph_0$ pro α konečné a moh $T^1_\alpha \leqq$ moh α pro nekonečné. Každá z těchto množin $A^k_\delta \in T^1_\alpha$ protne B_α nejvýše v konečné množině, tedy moh $(\underset{T^1_\alpha}{U} A^k_\delta \cap B_\alpha) \leqq$ moh $T^1_\alpha <$ moh $R =$ moh B_α. Existuje tedy $b^1_\alpha \in B_\alpha$ tak, že b^1_α non $\in A^k_\delta$ pro každé A^k_δ T^1_α a že b^1_α non $\in M_\beta$ pro $\beta < \alpha$.

Buď $s_\xi = a^k_\xi -$ moh $(\underset{\beta<\alpha}{U} M_\beta \cap B_\alpha)$, kde $B_\alpha = A^k_\xi$.

$s_\xi \geqq 0$ podle c') a d').

Body b^i_α pro $i = 1, 2, \ldots s_\xi$ sestrojíme následujícím způsobem. Podobně jako při konstrukci b^1_α buď T^i_α množina všech $A^k_\delta \neq B_\alpha$ takových, že protnou množinu

$$\underset{\beta<\alpha}{U} M_\beta \cup (b^1_\alpha) \cup (b^2_\alpha) \cup \ldots \cup (b^{i-1}_\alpha)$$

alespoň v n_k bodech. Těchto množin, ze zcela analogických důvodů jako prve, je méně než moh R. Existuje tedy $b^i_\alpha \in B_\alpha$ tak, že b^i_α neleží na žádné $A^k_\delta \in T^i_\alpha$, $b^i_\alpha \neq b^l_\alpha$ $(l < i)$, b^i_α non $\in M_\beta$ pro $\beta < \alpha$.

Položme nyní

$$M_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} M_\beta \cup (b_\alpha^1) \cup (b_\alpha^2) \cup \ldots \cup (b_\alpha^{s_\xi}).$$

Platí:

a'') Jestliže $\beta < \alpha$, pak $M_\beta \subset M_\alpha$.

b'') moh $M_\alpha \leqq$ moh $\bigcup_{\beta<\alpha} M_\beta + s_\xi$, což je menší nebo rovno podle b') než moh α pro α nekonečné a menší než $\aleph_0$ pro α konečné.

c'') Buď $\gamma \leqq \alpha$. Pak moh $(M_\alpha \cap B_\gamma) = a_\delta^k$, je-li $B_\gamma = A_\delta^k$. Skutečně

$$M_\alpha \cap B_\gamma = (B_\gamma \cap \bigcup M_\beta) \cup (B_\gamma \cap [(b_\alpha^1) \cup (b_\alpha^2) \cup \ldots (b_\alpha^{s_\xi})]\}.$$

Oba sčítance jsou disjunktní a druhý má mohutnost 0 pro $\gamma < \alpha$, neboť platí c').

Je-li $\gamma = \alpha$, je mohutnost druhého rovna s_ξ, jež je zvoleno tak, aby sečteno s mohutností prvního sčítance dalo a_ξ^k.

d'') Buď $\gamma > \alpha$, pak moh $(M_\alpha \cap B_\gamma) \leqq n_k$, je-li $B_\gamma = A_\delta^k$. Skutečně, nechť moh $(M_\alpha \cap B_\gamma^{\mathbf{z}}) > n_k$. Pak existuje podle d') $i < s_\alpha$ takové, že moh $(B_\gamma \cap M_\alpha) =$
$= \text{moh } (B_\gamma \cap (\bigcup_{\beta<\alpha} M_\beta \cup (b_\alpha^1) \cup \ldots \cup (b_\alpha^1)]\} +$
$+ \text{moh } (B_\gamma \cap [(b_\alpha^{i+1}) \cup \ldots \cup (b_\alpha^{s_\xi})]$, kde mohutnost prvního sčítance je n_k a druhý je nenulový.

Pak ale B_γ je prvkem množiny T_α^i a tedy nemůže obsahovat žádný z bodů $b_\alpha^{i+1}, \ldots, b_\alpha^{s_\xi}$, což je spor.

Položme $N = \bigcup_{\alpha<\Omega} M_\alpha$.

Buď dáno nějaké $B_\alpha = A_\delta^k$. Pak platí

$$\text{moh } (N \cap B_\alpha) \geqq \text{moh } (M_\alpha \cap B_\alpha) = a_\delta^k$$

podle c''). Nechť moh $(N \cap B_\alpha) > a_\delta^k$. Pak existuje $\gamma < \Omega$ tak, že moh $(M_\gamma \cap B_\alpha) > a_\delta^k$, což je spor s c'') a d'').

Poznámka: moh $N =$ moh $\bigcup_k A^k$, je-li N nekonečná. Skutečně, všech konečných podmnožin množiny N je opět moh N a každá taková podmnožina určuje nejvýše spočetně množin A_δ^k, tedy moh $\bigcup_k A^k \leqq$ moh N.

Obrácená nerovnost je zřejmá, neboť kdyby bylo moh $\bigcup_k A^k <$ moh N, pak by existoval bod množiny N, který neleží na žádné A_δ^k.

Věta 2: Za těchže předpokladů jako ve větě I., buď $\{N_\mu\}_{\mu \in E}$ systém všech různých množin, pro něž moh $(N_\mu \cap A_\alpha^k) = a_\alpha^k$.

Pak moh $E = 2^{\text{moh } R}$.

D ů k a z: Podle věty I. existuje alespoň jedna množina N_0, pro níž moh $(N_0 \cap A_\alpha^k) = a_\alpha^k$. Předpokládejme, že jsme již pro nějaké ordinální číslo $\lambda < \Omega$ sestrojili množiny N_μ pro každé $\mu < \lambda$ tak, že moh $(N_\mu \cap A_\delta^k) =$
$= a_\delta^k$ pro každé A_δ^k a je-li $\mu' \neq \mu$ pak $N_{\mu'} \cap N_\mu = 0$.

Položme $P = R - \bigcup_{\mu<\lambda} N_\mu$. Pak zřejme moh $P =$ moh R, neboť je-li dáno nějaké A_δ^k, pak množina $\bigcup_{\mu<\alpha} N_\mu \cap A_\delta^k$ má mohutnost menší než moh $A_\alpha^k =$

moh R. (Každé N_μ protne A^k_δ v množině konečné.) Odtud rovněž plyne, že každá množina $A^{k'}_\delta = P \cap A^k_\delta$ má mohutnost rovnu moh P.

Pro P a $A^{k'}_\delta$ jsou splněny všechny předpoklady věty I. a existuje tedy $N_\lambda \subset P$, že moh $(N_\lambda \cap A^{k'}_\delta) = a^{k'}_\delta$, zřejmě $N_\lambda \cap N_\mu = \emptyset$ pro $\mu < \lambda$.

Indukcí jsou tedy sestrojeny množiny N^1_μ pro $\mu < \Omega$ po dvou disjunktní.

Položme $R' = \underset{\mu \in S}{U} N_\mu$, kde S je nějaká podmnožina ordinálních čísel menších než Ω, moh S = moh Ω.

Zřejmě moh $A^k_\alpha \cap R'$ = moh S = moh Ω, neboť každá N^n_μ $(\mu \in S)$ protne A^{k}_{α} v $a^k_\alpha > 0$ různých bodech. Odtud moh R' = moh Ω.

Položme $A^{k'}_\alpha = A^k_\alpha \cap R'$, $A^{0'} = \{A^{0'}_\alpha\} = \underset{\mu \in S}{\{N_\mu\}}$. Zřejmě moh $A^0 \leqq$ moh R'. Zvolme ještě $n_0 = 1$, $a^0_\alpha = 1$. Pak množiny A^k_α v prostoru R' splňují předpoklady věty I. a existuje tedy množina N_s taková, že moh $(N_s \cap A^{k'}_\alpha) = a^k_\alpha$ pro $k = 1, 2 \ldots$, moh $(N_s \cap N_\mu) = 1$, $N_s \subset R'$.

Je-li $S \neq S'$, kde S' má podobné vlastnosti jako S, pak $N_s \neq N_{s'}$, což je zřejmé. Všech takových množin S je $2^{\text{moh}\, R}$ a tedy i všech různých množin N_s je $2^{\text{moh}\, R}$.

Důsledek I. Buď R eukleidovský n rozměrný (projektivní nebo Hilbertův) prostor. Každé přímce v R přiřaďme nějaké přirozené číslo větší nebo rovno 2. Pak existuje v R množina N, kterou každá přímka protne přesně v tomto předepsaném počtu různých bodů.

Přiřaďme každé přímce totéž číslo $m \geqq 2$. Pak existuje $2^{2^{\aleph_0}}$ množin N takových, že se jedna v druhou nedá zobrazit afinitou (kolineací). (S každou množinou je afinní jen $2^{\aleph_0}$ množin v R.)

Důsledek II. Buď R eukleidovská rovina (nebo projektivní). Buď A^k množina všech ireducibilních algebraických křivek stupně k. Buď $n_k = k^2 + 1$. Pak podle [4] jsou splněny předpoklady věty I.

Důsledek III. R je eukleidovský nebo projektivní n rozměrný prostor. A^k systém všech rovinných ireducibilních algebraických křivek stupně k. Položme $n_k = k^2 + 1$. Pak jsou zřejmě splněny předpoklady věty I.

Důsledek IV. Každé rovině v eukleidovském (projektivním) přiřaďme číslo $\geqq 3$. Pak existuje množina, kterou každá rovina protne přesně v tom předepsaném počtu bodů.

Skutečně existuje množina, kterou každá přímka protne právě ve dvou bodech. Každá rovina protne tuto množinu v kontinuu bodech. Vezměme tuto množinu jako R ve větě I. Každé dvě roviny se v ní protnou nejvýše ve dvou bodech a jsou tedy splněny předpoklady věty I.

Příklad lze zřejmým způsobem zobecnit i na vícerozměrné prostory a jejich lineární podprostory.

Poznámka: Je známo, že v eukleidovské (nebo projektivní) rovině existuje množina R 1. kategorie, kterou každá algebraická ireducibilní křivka protne v množině mohutnosti kontinua. Mezi všemi množinami, jejichž existence je dána důsledky I. a II., existují tedy takové, které jsou I. kategorie. Odtud je vidět, že problém efektivního nalezení množiny N z důsledků I a II nelze mechanicky převést na problém efektivního nalezení množiny, která nemá Baireovu vlastnost.

Zcela analogicky není možno tento problém převést na efektivní nalezení neměřitelné množiny, neboť mezi množinami, jejichž existence je dokázána v důsledku I resp., II, existují takové, které mají míru nula.

РЕЗЮМЕ

В этой работе доказаны две теоретико множественные теоремы, которые имеют несколько интересных следствий для евклидовых или проективных пространств.

Теорема I. Пусть R бесконечное множество, A^k системы множеств в R. $A^k = \{A^k_\alpha\}$, мощ A^k_α = мощ R, мощ $(A^k_\alpha \cap A^l_\beta) < \aleph_0$ для $\alpha \neq \beta$ или $k \neq l$. Пусть существуют натуральные числа n_k, что для $\alpha \neq \beta$ имеем мощ $(A^k_\alpha \cap A^k_\beta) < n_k$. Пусть a^k_α натуральные числа, $a^k_\alpha \geq n_k$.

Тогда существует в R множество N, для которого мощ $(N \cap A^k_\alpha) = a^k_\alpha$ для всякого A^k_α.

Теорема II. При условиях теоремы I., система всех отличных множеств N_μ для которых мощ $(N_\mu \cap A^k_\alpha) = a^k_\alpha$ имеег мощность $2^{\text{мощ } R}$

Следствие: Если A^k_α обозначает иррелуцибильную алгебраическую кривую степени k, $n_k = k^2 + 1$, то выполняются условия теоремы I.

SUMMARY

In this note two theorems are proved in terms of the theory of sets which have a number of applications. For example a problem given by Steinhaus in 1955 is here solved as a special case.

Theorem 1. Let R be an infinite set. Let A^k ($k = 1, 2 \ldots$) be systems of sets in R. $A^k = \{A^k_\alpha\}$, card A^k_α = card R. Let card $(A^k_\alpha \cap A^l_\beta) < \aleph_0$ for $\alpha \neq \beta$ or $k \neq l$. Let there exist such positive integers n_k, so that for $\alpha \neq \beta$ card $(A^k_\alpha \cap A^k_\alpha) < n_k$. Let a^k_α be positive integers, $a^k_\alpha \geqq n_k$.

Then there exists a set N in R such that card $(N \cap A^k_\alpha) = a^k_\alpha$ for every A^α_k.

Theorem II. Let $\{N_\mu\}_{\mu \in E}$ be a system of all sets for which card $(N_\mu \cap A^k_\alpha) = a^k_\alpha$. Then card $E = 2^{\text{card } R}$.

Corollary. For every algebraic irreducible curve C of degree k let a positive integer $n(C)$ greater than or equal to $k^2 + 1$ be given. Then there exists a set meeting every C in $n(C)$ of points.

LITERATURA

[1] F. BAGEMIHL: A theorem on intersections of prescribea cardinality. Annals of Math. 55 (1952) p. 34.

[2] S. MAZURKIEWICZ: C. R. Soc. Sc. et Letter de Varsovie 7 (1914), p. 322—383.

[3] W. SIERPINSKI: Cardinal and ordinal numbers. Warszawa 1958.

[4] R. WALKER: Algebraic curves. Princeton 1950.