

Vlastislav Červený

O amplitudách odražených harmonických vln v kritickém bodě

Acta Universitatis Carolinae. Mathematica, Vol. 1 (1960), No. 2, 33--44

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/142114>

Terms of use:

© Univerzita Karlova v Praze, 1960

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

O AMPLITUDÁCH ODRAŽENÝCH HARMONICKÝCH VLN V KRITICKÉM BODĚ

ОБ АМПЛИТУДАХ ОТРАЖЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЛН
В КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКЕ

NOTES ON AMPLITUDES OF REFLECTED HARMONIC WAVES
AT A CRITICAL POINT

VLASTISLAV ČERVENÝ

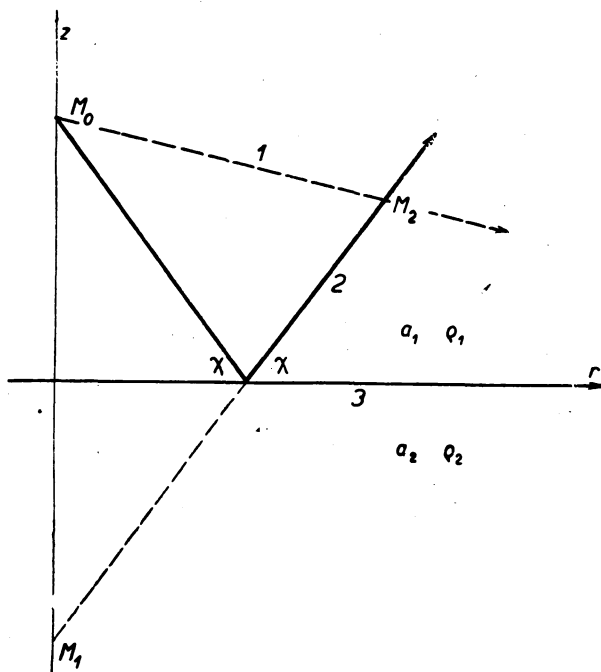
Geofysikální ústav matematicko-fyzikální fakulty University Karlovy v Praze

1. ÚVOD

V poslední době se ukazuje, že velký význam pro interpretaci seismických záznamů mají nejen kinematické, ale i dynamické vlastnosti elastických vln. Zatímco teoretický rozbor kinematických vlastností vln, s kterými seismika pracuje, není příliš složitý, činí výpočet dynamických charakteristik vln i v případě velmi jednoduchých podmínek značné potíže. Proto se v seismice zkoumaly nejdříve nejjednodušší případy šíření elastických vln. Nejjednodušším problémem, který byl řešen, je úloha o odrazu rovinných harmonických vln na rovinném rozhraní mezi dvěma ideálně elastickými poloprostory. Výsledky nám říkají, že poměry amplitud odražených vln vzhledem k amplitudě dopadající vlny jsou dány tzv. koeficienty odrazu, které závisí pouze na úhlu dopadu a parametrech obou prostředí. V druhé etapě byla řešena úloha odrazu kulové vlny na rovinném rozhraní. Metodami geometrické seismiky (případně asymptotickými metodami) se zjistilo, že v dostatečně velkých vzdálenostech od zdroje (v tzv. vlnové zóně) dostáváme obdobné výsledky jako pro rovinné vlny i pro kulové vlny. V užití seismice, kde se pracuje s kulovými vlnami, neboť výbuch přibližně reprezentuje bodový zdroj kulových vln, se samozřejmě používají tyto zjednodušené výsledky platné pro vlnovou zónu. Pro koeficienty odrazu, které jsou dány velmi složitými vzorci, byly vypracovány rozsáhlé a podrobné tabulky [1].

Při podrobnějším řešení se však ukazuje, že ani ve vlnové zóně není aproximace geometrické seismiky všude použitelná. Význačnou úlohu při studiu pole odražených vln má tzv. kritický (nebo též mezní) paprsek, tj. paprsek, na kterém platí, že se kosinus úhlu dopadu χ rovná indexu lomu (viz obr. 1). Na kritickém paprsku mění odražené vlny výrazně své dynamické vlastnosti. Zatímco před kritickým bodem (tj. bodem ležícím na kritickém paprsku) existuje pouze vlna odražená, za kritickým bodem existují vlna odražená a vlna čelná. V kritickém bodě se vlnoplochy obou těchto vln od sebe oddělují. Víme z praxe, že v okolí kritického bodu jsou amplitudy odražených vln značně veliké. A právě v okolí kritického bodu nám geometrická seismika říká o amplitudách odražených vln velmi málo. Můžeme tam sice v určitých případech jako první

aproximace vzorců geometrické seismiky použít, ale chyba bude většinou tak velká, že bude převažovat a vzorce geometrické seismiky budou v okolí kritického bodu neplatné. Proto se užitá seismika oblasti kolem kritického bodu snaží vyhýbat. Pracuje se buď dostatečně daleko před kritickým bodem (tzv. reflektivní metody), anebo dostatečně daleko za kritickým bodem (refrakční metody, využívající čelných vln). To je ovšem velmi často na újmu efektivnosti měření. Proto se budeme snažit v této práci ukázat na některé vlastnosti od-



Obr. 1. $M_0 [0; z_0]$ - zdroj, $M_1 [0; -z_0]$ zdánlivý zdroj, $M_2 [r; z]$ - pozorovatel, 1 - paprsek přímé vlny, 2 - paprsek odražené vlny, 3 - rozhraní

ražených vln přímo v kritickém bodě a dosažené výsledky vždy srovnáme s výsledky geometrické seismiky. Pro jednoduchost budeme zprvu předpokládat, že jsou obě prostředí kapalná, v dalších kapitolách bude ukázáno na to, jak se situace změní za předpokladu, že rychlosti transversálních vln jsou nenulové. K diskusi použijeme výsledků práce [2], kde byla oblast okolo kritického bodu podrobně teoreticky prozkoumána.

2. ZÁKLADNÍ PŘEDPOKLADY A VZORCE

Zavedme válcové souřadnice r , z a φ tak, že zdroj longitudinálních harmonických vln o frekvenci f se bude nacházet v bodě $r = 0$, $z = z_0$ a rozhraní mezi dvěma kapalnými prostředími v rovině $z = 0$. Řešení z důvodů symetrie nebude záviset na φ . Rychlost šíření longitudinálních vln a hustotu v prostředí se zdrojem označíme a_1 a ρ_1 , v prostředí bez zdroje a_2 a ρ_2 . Poměru $n = a_1/a_2$

budeme říkat index lomu, dále budeme označovat $\varrho = \varrho_2/\varrho_1$. Složky posunutí podél r a z označíme u a v . Řešení budeme hledat v prostředí se zdrojem. Zavedeme potenciál longitudinálních vln Φ vztahy

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial r}; v = \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \quad (1)$$

Nechť má dopadající vlna v bodě r, z potenciál Φ_0 , daný vzorcem

$$\Phi_0 = \frac{e^{ik(R_0 - a, t)}}{R_0}, \quad (2)$$

kde $R_0 = \sqrt{r^2 + (z - z_0)^2}$ je vzdálenost od zdroje, $i = \sqrt{-1}$, t je čas, $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{a_1}$ je vlnové číslo, λ vlnová délka. Potom pro potenciál odražené vlny Φ° v kritickém bodě (tj. v bodě, v kterém platí $r/R = n$, kde $R = \sqrt{r^2 + (z + z_0)^2}$ je vzdálenost od imaginárního zdroje) dostaneme podle [2], vzorce (25) v případě, že je splněno

$$\frac{kRn^2}{\sqrt{2}} \geq 1, \quad \sqrt{\frac{kR(1-n^2)}{2n^2(\varrho^2-1)}} \geq 1 \quad (3)$$

výraz

$$\Phi^\circ = \frac{e^{ikR}}{R} \left\{ 1 - \frac{2n^2}{\varrho kR(1-n^2)} F(\alpha, 0) \right\}, \quad (4)$$

kde

$$F(\alpha, 0) = i - \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varphi^2} \left[\varphi + \frac{\alpha}{2}(1+i) \right] \sqrt{\varphi + \alpha(1+i)} \sqrt{\varphi} d\varphi, \quad (5)$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{kR(1-n^2)}{n^2}} = \sqrt{k(z+z_0)} \frac{(1-n^2)^{\frac{1}{2}}}{n},$$

a $\arg \sqrt{\varphi} = 0$ pro $0 < \varphi < \infty$.

Upravíme nyní ještě vzorec (4) do výhodnějšího tvaru

$$\Phi^\circ = \frac{e^{ikR}}{R} \left\{ 1 - \frac{2}{\varrho} \frac{F(\alpha, 0)}{\alpha^2} \right\}. \quad (6)$$

Poněvadž $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha^{-2} F(\alpha, 0) = \frac{1}{2}$ může být též vhodné vyjádření pro malá α

$$\Phi^\circ = \frac{e^{ikR}}{\varrho R} \{ (\varrho - 1) + Z(\alpha) \}, \quad (7)$$

kde

$$Z(\alpha) = 1 - 2 \frac{F(\alpha, 0)}{\alpha^2}. \quad (8)$$

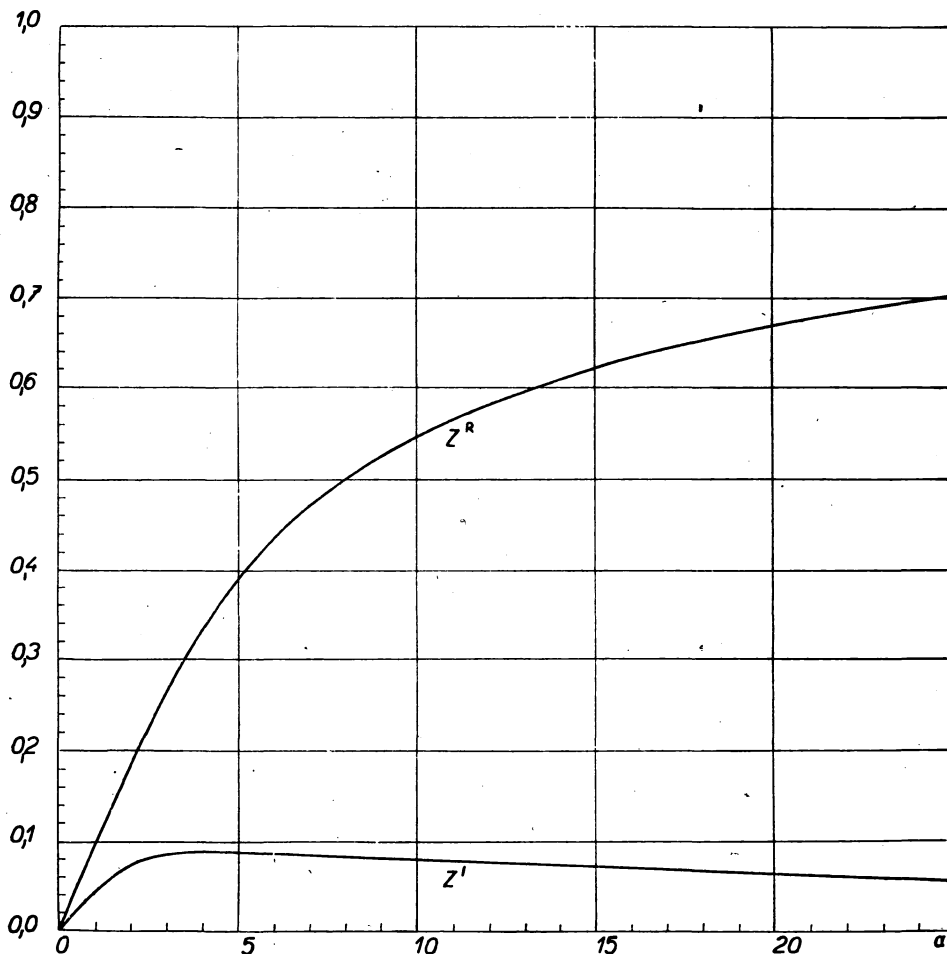
Obr. 2 udává hodnoty reálné a imaginární části $Z(\alpha)$, označené $Z^R(\alpha)$ a $Z^I(\alpha)$. Pro amplitudu odražené vlny v kritickém bodě dostáváme tedy

$$A^{\circ} = |\Phi^{\circ}| = \frac{1}{R} \sqrt{\left[1 - \frac{1}{\varrho} (1 - Z^R(\alpha))\right]^2 + \frac{1}{\varrho^2} [Z^I(\alpha)]^2}, \quad (9)$$

nebo

$$A^{\circ} = \frac{1}{\varrho R} \sqrt{[(\varrho - 1) + Z^R(\alpha)]^2 + [Z^I(\alpha)]^2}. \quad (9')$$

Vzorce (9) a (9') budeme diskutovat v následující kapitole. Všimněme si nyní ještě poměru skutečné amplitudy, dané vzorcem (9) k amplitudě získané



Obr. 2. Hodnoty funkcí $ReZ(\alpha) = Z^R(\alpha)$ a $ImZ(\alpha) = Z^I(\alpha)$ v závislosti na parametru α .

aproximací geometrické seismiky. Metody geometrické seismiky nám pro amplitudu dávají jednoduchý vzorec

$$A_G^{\circ} = \frac{1}{R}$$

(neboť v kritickém bodě je koeficient odrazu roven jedné). Pro $\frac{A^\circ}{A_G^\circ}$ tedy dostáváme

$$\frac{A^\circ}{A_G^\circ} = RA^\circ = \frac{1}{\varrho} \sqrt{[(\varrho - 1) + Z^R(\alpha)]^2 + [Z^I(\alpha)]^2} \quad (10)$$

nebo

$$\frac{A^\circ}{A_G^\circ} = \sqrt{\left[1 + \frac{1}{\varrho} (Z^R - 1)\right]^2 + \frac{1}{\varrho^2} [Z^I(\alpha)]^2}. \quad (10')$$

3. DISKUSE VÝSLEDKŮ

V tomto odstavci budeme diskutovat vzorce (7) — (10). Nejdříve si všimneme, co nám dávají tyto vzorce pro velká α . Bude-li $\alpha \gg 1$, můžeme rozvinout integrál (5) asymptoticky. Spokojíme-li se s prvními dvěma členy, dostaneme

$$Z(\alpha) \approx 1 - \frac{2^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\sqrt{\pi} \sqrt{\alpha}} e^{i \frac{\pi}{8}},$$

čili

$$\Phi^\circ \approx \frac{e^{ikR}}{R} \left\{ 1 - \frac{1,6445}{\varrho \sqrt{\alpha}} e^{i \frac{\pi}{8}} \right\} = \frac{e^{ikR}}{R} \left\{ 1 - \frac{1,6445 n}{\varrho [kR(1 - n^2)]^{\frac{1}{2}}} e^{i \frac{\pi}{8}} \right\} \quad (11)$$

a pro amplitudu

$$A^\circ \approx \frac{1}{R} \left\{ 1 - \frac{1,5194}{\varrho \sqrt{\alpha}} \right\} = \frac{1}{R} \left\{ 1 - \frac{1,5194 n}{\varrho [kR(1 - n^2)]^{\frac{1}{2}}} \right\}. \quad (12)$$

Je známo, že v dostatečně velkých vzdálenostech od kritického bodu ubývá oprava k výsledkům geometrické seismiky s rostoucím kR jako $(kR)^{-1}$. Z formule (12) vidíme, že v kritickém bodě ubývá amplituda daleko pomaleji, a to jako $(kR)^{-\frac{1}{2}}$. I ve velmi velikých vzdálenostech bude mít druhý člen podstatný význam a nebudeme jej moci zanedbat (hlavně tehdy, bude-li n blízké k jedné).

Bude-li α malé, nebudeme moci samozřejmě vzorce (12) použít. V tom případě budeme muset použít obecných vzorců (9). Hodnotu funkce $RA_0 = \frac{1}{\varrho} \sqrt{[(\varrho - 1) + Z^R(\alpha)]^2 + [Z^I(\alpha)]^2}$ pro $\varrho = 1; 1,2; 1,5; 2$ a 3 nám udává obr. 3. Z obr. 3 vidíme, že výraz RA_0 , který se podle geometrické seismiky rovná jedné, je ve skutečnosti vždy menší než jedna, tj. amplituda má vždy menší hodnotu než udávají vzorce geometrické seismiky.

Ještě poznámka k obr. 3: Při $n \rightarrow 1$ se bude ve většině případů též ϱ blížit k jedné, to znamená, že $1 - n^2$ a $\varrho^2 - 1$ budou stejného řádu a bude splněna podmínka (3). Údaje pro α velmi malé a $\varrho \neq 1$ na obr. 3 tedy nejsou plně hodnověrné. To však není na újmu závěrům, které učiníme.

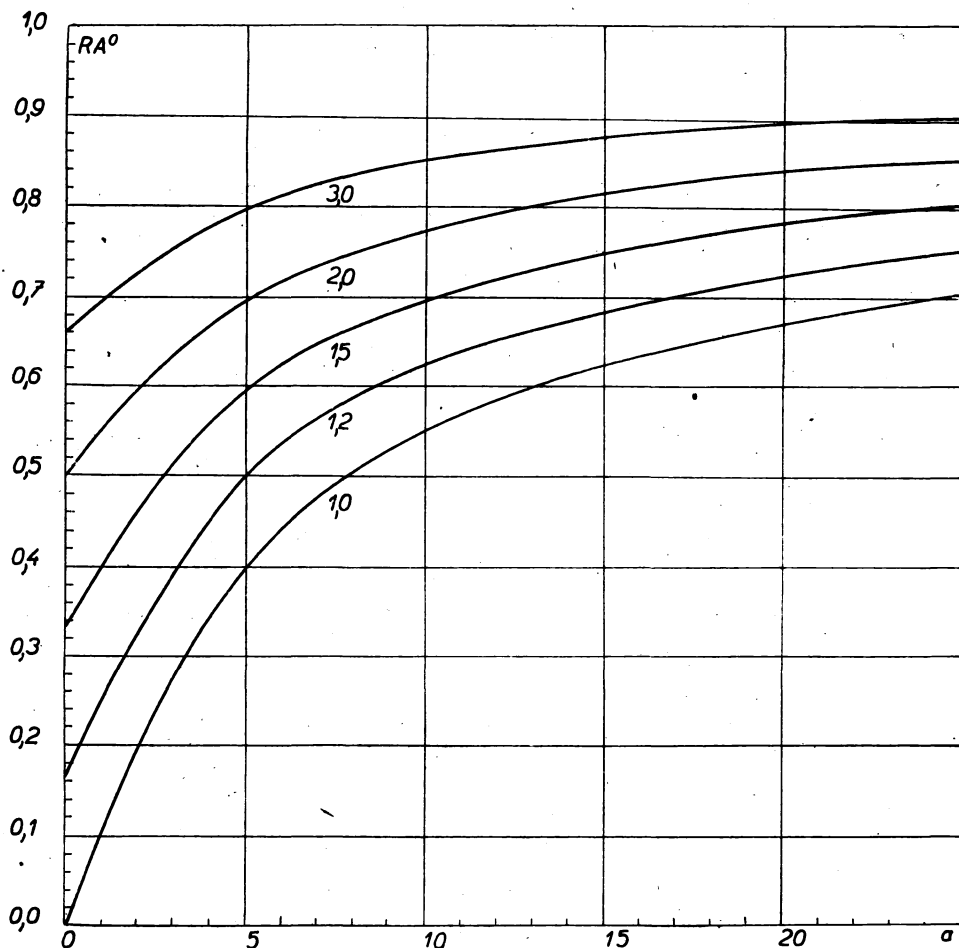
Všimněme si nyní, jak amplituda závisí na jednotlivých proměnných.

a) Závislost na ϱ .

Přesto že podle vzorců geometrické seismiky amplituda na ϱ nezávisí, vidíme z obr. 3, že amplituda je tím větší, čím je větší ϱ . Rozdíly jsou veliké hlavně při malých α .

b) Závislost na indexu lomu n .

Chceme-li zkoumat tuto závislost, musíme si uvědomit, že se změnou n a ostatních parametrech konstantních bychom se dostali mimo kritický paprsek, takže by naše vzorce byly neplatné. Musíme tedy některý parametr měnit zároveň s n tak, aby zůstalo zachováno $r/R = n$. Budeme např. předpokládat, že se pozorovatel nachází v konstantní vzdálenosti z od rozhraní a že se změnou



Obr. 3. Hodnoty funkcí $RA_0 = \frac{1}{q} \sqrt{[(q-1) + Z^R(\alpha)]^2 + (Z(\alpha))^2}$ v závislosti na parametru α při $q = 1,0; 1,2; 1,5; 2,0$ a $3,0$.

n se též změní r podle vzorce $r = (z + z_0) n (1 - n^2)^{-1/2}$. S n blížícím se k jedné se tedy bude pozorovací bod posouvat do nekonečna. Můžeme též předpokládat, že je $R = \text{konst}$, tj. že se pozorovatel nachází na kružnici se středem v imaginárním zdroji a s n rostoucím se posouvá po této kružnici směrem k rozhraní. V prvním případě dostáváme

$$A^\circ = \frac{\sqrt{1-n^2}}{(z+z_0)\varrho} \cdot \sqrt{[(\varrho-1) + Z^R(\alpha)]^2 + [Z^I(\alpha)]^2},$$

kde

$$\alpha = \sqrt{k(z+z_0)} \frac{(1-n^2)^{\frac{1}{2}}}{n},$$

a v druhém

$$A^\circ = \frac{1}{\varrho R} \sqrt{[(\varrho-1) + Z^R(\alpha)]^2 + [Z^I(\alpha)]^2},$$

kde

$$\alpha = \sqrt{kR} \frac{(1-n^2)^{\frac{1}{2}}}{n}.$$

V každém případě tedy dostáváme, že s rostoucím n klesá α , z čehož samozřejmě plyne, že s rostoucím n se zmenšuje hodnota výrazu

$$\sqrt{[(\varrho-1) + Z^R(\alpha)]^2 + [Z^I(\alpha)]^2}.$$

Shrneme-li tato fakta, dostáváme z nich závěrem: S n blížícím se jedné se amplituda vždy zmenšuje. Tento výrok je ovšem nutno chápat tak, jak bylo uvedeno dříve.

3. Závislost na vlnovém čísle k .

Podle výsledků geometrické seismiky amplituda nezávisí na k . Ze vzorce (9) a obr. 3 vidíme, že s $k \rightarrow 0$ se amplituda zmenšuje. Čím je tedy menší frekvence dop. vlny, tím je menší amplituda. Dále: Čím je menší vlnová délka, tím je větší amplituda.

4. Závislost na vzdálenosti od zdánlivého zdroje R .

Geometrická seismika nám udává, že amplituda je nepřímě úměrná R . Závislost však bude složitější. Budeme předpokládat, že amplituda s rostoucím R ubývá podle vzorce

$$A^\circ = \frac{C}{R^\varepsilon}$$

a budeme hledat, jak je velké ε . Při konstantních parametrech a daném $R = R_D$ pro ε dostaneme

$$\varepsilon = - \left(\frac{\partial \ln A^\circ}{\partial \ln R} \right)_{R=R_D}$$

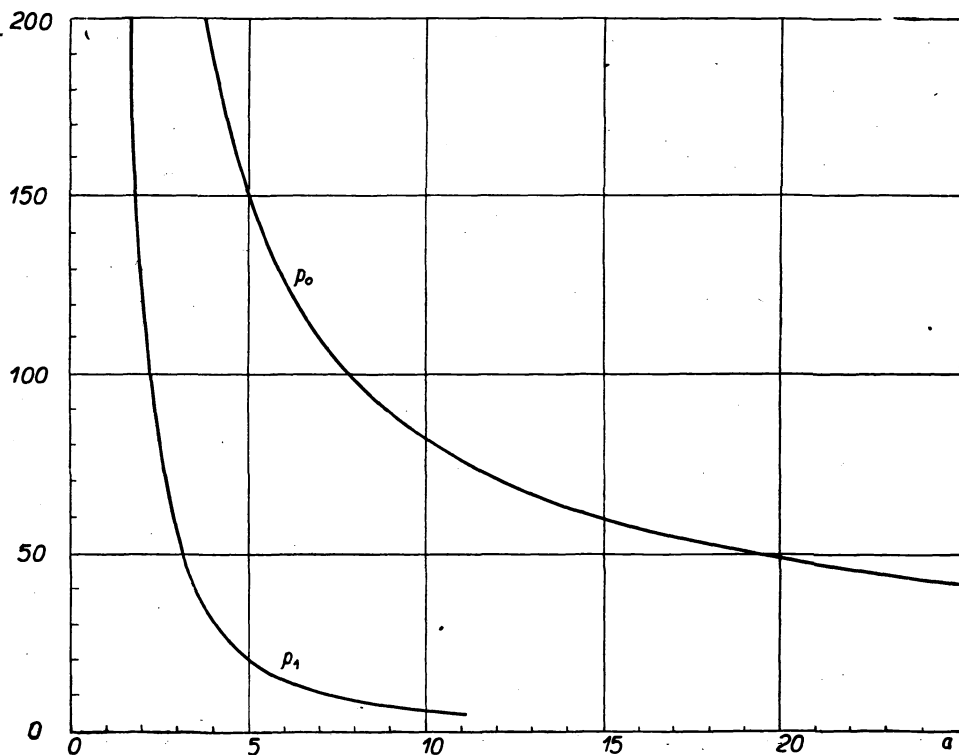
Hodnoty ε bychom nejvýhodněji získali grafickým derivováním z obr. 3. Pro velká α dostaneme ze vzorce (12) asymptotické vyjádření pro ε

$$\varepsilon \approx 1 - \frac{0,3798}{\varrho [kR_D(1-n^2)]^{\frac{1}{2}}}.$$

Z tohoto vyjádření vidíme: ε bude vždy menší než jedna, tj. amplituda bude s rostoucí vzdáleností od zdánlivého zdroje ubývat vždy pomaleji než funkce $\frac{1}{R}$. Amplituda bude s rostoucím R ubývat tím pomaleji, čím bude n blíže k jedné, menší ϱ , k a R_D .

Jak již bylo řečeno dříve, skutečná hodnota amplitudy bude vždy menší než hodnota $\frac{1}{R}$, kterou nám dává geometrická seismika. Nahradíme-li pro zjednodušení skutečnou amplitudu hodnotou $\frac{1}{R}$, uděláme tím chybu p_0 %, kde

$$p_0 = 100 \left(\frac{A_G^\circ}{A^\circ} - 1 \right) = 100 \left(\frac{1}{RA_0} - 1 \right).$$



Obr. 4. Hodnoty funkcí p_0 a p_1 v procentech (v závislosti na parametru α)

Hodnotu p_0 pro $q = 1$ nám udává obr. 4. Vidíme z něho, že chyba bude tím větší, čím bude menší α , tj. čím bude n blíží k jedné a menší $\frac{z + z_0}{\lambda}$. Při

běžných podmínkách, např. $\frac{z + z_0}{\lambda} = 10$, $n = 0,4$ bude $\alpha \doteq 20$, čili chyba bude činit přibližně 50 %. Chyba prudce vzroste při změně n např. na 0,9. Pak bude $\alpha \doteq 6$ a chyba kolem 125 %.

Přesnost se značně zvětší, použijeme-li pro amplitudu dva členy asymptotického rozvoje — vzorec (12). Použijeme-li vzorec (12), učiníme chybu p_1 %. Hodnoty p_1 v závislosti na α udává též obr. 4. Z něho vidíme, že při stejných podmínkách, jako jsme uvažovali v předchozím odstavci, klesne chyba při $n = 0,4$ z 50 % pod 5 % a při $n = 0,9$ z 125 % na 20 %. Při malých α (tj. n

velmi blízkých k jedné) bude chyba stále ještě nabývat značné velikých hodnot.

Z obr. 3 můžeme dále snadno usoudit, že chyba bude tím menší, čím bude větší ρ .

4. PŘÍPAD PEVNÝCH PROSTŘEDÍ

Nejsou-li prostředí kapalná, ale připouštějí možnost vzniku transversálních vln s rychlostmi b_1 (b_1 v prostředí se zdrojem a b_2 v prostředí bez zdroje), dostáváme výsledky samozřejmě složitější. Pro Φ° dostáváme podle [2] místo vzorce (6)

$$\Phi^\circ = \frac{e^{ikR}}{R} \left\{ A(n) + A_2(n)(1 - n^2) \frac{F_0(\alpha, 0)}{\alpha^2} \right\},$$

resp.

$$\Phi^\circ = \frac{e^{ikR}}{R} \left\{ A(n) + \frac{1}{2} A_2(n)(1 - n^2) + \frac{1}{2} A_2(n)(1 - n^2) Z(\alpha) \right\},$$

$$\text{kde } A(n) = \frac{K_2(n)}{K_1(n)}; \quad A_2(n) = \frac{K_2(n)L_1(n) - L_2(n)K_1(n)}{K_1^2(n)};$$

$$K_{1,2}(n) = \pm n^2 [n_1^2(\rho - 1) - 2n^2(\mu - 1)]^2 +$$

$$+ \sqrt{1 - n^2} \sqrt{n_1^2 - n^2} [\rho n_1^2 - 2n^2(\mu - 1)]^2 + \sqrt{1 - n^2} \sqrt{n_2^2 - n^2} \rho n_1^4;$$

$$L_{1,2}(n) = 4 \sqrt{1 - n^2} \sqrt{n_1^2 - n^2} \sqrt{n_2^2 - n^2} n^2 (\mu - 1)^2 \pm$$

$$\pm \sqrt{n_1^2 - n^2} \rho n_1^4 \pm \sqrt{n_2^2 - n^2} [n_1^2 + 2n^2(\mu - 1)]^2;$$

$$n_1 = \frac{a_1}{b_1}; \quad n_2 = \frac{a_1}{b_2}; \quad \mu = \frac{\rho_2 b_2^2}{\rho_1 b_1^2}.$$

Hodnoty koeficientů odrazu $A(n)$ a tzv. koeficientů čelných vln $A_2(n)$ udávají tabulky [1]. Mohli bychom tedy opět celkem bez potíží určit s pomocí těchto tabulek hodnoty amplitud v kritickém bodě. Dá se ale ukázat, že se situace nikterak podstatně nemění proti případu kapalných prostředí. Jak totiž bylo dříve řečeno, největší význam má oprava ke geometrické seismice v případě

$n \rightarrow 1$. V tom případě však $A(n) \rightarrow 1$ a $A_2(n) \rightarrow -\frac{2}{\rho(1 - n^2)}$, čili dostáváme

pro amplitudy opět vzorce (9) jako pro prostředí kapalná. Ani v případě, že n není blízké k jedné, však nepřestanou platit závěry, které jsme učinili v předešlé kapitole. Nebudeme proto tento případ zvlášť diskutovat.

5. ZÁVĚR

V práci byl proveden rozbor amplitud odražených harmonických vln v kritickém bodě.

V kap. 2 bylo předpokládáno, že obě prostředí jsou kapalná. Pro ten případ jsme pro amplitudu dostali vzorce (9). Funkce $Z(\alpha)$, která v těchto formulích vystupuje, je dána na obr. 2.

V kap. 3 byly vzorce (9) diskutovány. Bylo ukázáno, že:

1) amplituda se vzrůstající vzdáleností od zdánlivého zdroje R ubývá jako $\frac{C}{R^\varepsilon}$, kde ε je vždy menší než jedna. ε je tím menší (tj. amplituda ubývá s rostoucí

R tím pomaleji) čím je n bližší k jedné a čím je menší $\frac{z + z_0}{\lambda}$;

2) amplituda bude tím menší, čím je menší ρ ;

3) amplituda bude tím menší, čím je menší vlnové číslo k , tj. čím je menší frekvence dopadající vlny, resp. větší vlnová délka;

4) při n blízkém se k jedné se bude amplituda vždy zmenšovat, bude-li se odpovídajícím způsobem posouvat pozorovatel tak, aby zůstal na kritickém paprsku. Pro $n = 1$ dostáváme samozřejmě amplitudu rovnou nule.

Numerické hodnoty amplitudy A° snadno dostaneme z obr. 3, kde jsou dány hodnoty funkce RA° .

V praxi se často užívá pro amplitudy přibližných hodnot geometrické seismiky. Obr. 4 nám ukazuje, jak velká je chyba v procentech (označená p_0 %), které se dopustíme tím, že nahradíme správné vzorce (9) vzorcem geometrické seismiky. Tato chyba je tím větší, čím je n bližší k jedné, menší ρ a menší $\frac{z + z_0}{\lambda}$. Na obr. 4 je dále uvedena chyba p_1 v procentech, které se dopustíme,

jestliže správný vzorec nahradíme vzorcem (12).

V kap. 4 jsou uvedeny vzorce pro amplitudu pro případ, že prostředí není kapalně, tj. pro případ nenulových rychlostí transversálních vln.

РЕЗЮМЕ

В этой работе был осуществлен анализ амплитуд гармонических отраженных волн в начальной точке. В главах 2 и 3 предполагается, что среда жидкая. В главе 4 приведены формулы также для случая твердых тел.

В главе 2 для амплитуды выведены формулы (9). Функция $Z^R(\alpha)$, которая в этих формулах выступает, дана на рис. 2.

В главе 3 разбираются формулы (9). Было показано, что:

1. с увеличением расстояния от мнимого источника амплитуда падает пропорционально $\frac{1}{R^\varepsilon}$, где ε всегда меньше единицы. ε тем меньше (т. е. амплитуда падает с увеличением R тем медленнее), чем n ближе к единице и чем меньше $\frac{z + z_0}{\lambda}$.

2. амплитуда будет тем меньше, чем меньше ρ .

3. амплитуда будет тем меньше, чем меньше волновое число k , т. е. чем меньше частота, или чем больше длина падающей волны.

4. амплитуда будет тем меньше, чем n будет ближе к единице, если, конечно, наблюдатель будет смещаться таким образом, чтобы он остался в начальной точке. Для $n = 1$ получаем, конечно, амплитуду равную нулю.

Числовые значения амплитуды для разных параметров можно определить по рис. 3, где даны значения функции

$$RA_0 = \frac{1}{\rho} \sqrt{[(\rho-1) + Z^R(\alpha)]^2 + [Z^I(\alpha)]^2}.$$

В практике часто пользуются для определения амплитуд приближенными асимптотическими формулами.

На рис. 4 приводится величина ошибки в процентах (обозначена p_0 %), которая возникает при замещении правильной формулы (9) асимптотической формулой. Эта ошибка тем больше, чем n ближе к единице, меньше $\frac{z+z_0}{\lambda}$ и ρ .

На рис. 4 кроме того введена еще ошибка p_1 в процентах, которая возникает при замещении правильной формулы формулой (12).

В главе 4 приведены формулы для амплитуды в твердых телах.

SUMMARY

This study deals with the analysis of the amplitudes of harmonic reflected waves at a critical point. In chapter 2 and 3 a liquid medium is considered, in chapter 4 formulae are also given for the case of velocity of transversal waves not being zero.

In chapter 2 formulae are derived for the amplitude (9). The function $Z(\alpha)$ in these formulae is defined in fig. 2.

In chapter 3 the formulae (9) are discussed. It was shown that:

1) The amplitude decreases with the increasing distance R from the source according to $R^{-\varepsilon}$, where ε is always smaller than one. The nearer n is to one and the smaller the value $\frac{z+z_0}{\lambda}$, the smaller will be the value of ε (i. e. the slower the decrease in the amplitude will be with an increase of R).

2) With the decrease of ρ the amplitude decreases.

3) The amplitude will decrease with a decrease of the wave number k , i. e. with a decrease of the frequency of the incident wave (or with the decrease of the wave length).

4) The amplitude will decrease, the nearer n approaches the value one, assuming of course that the observer will move in the corresponding manner in such a way as to remain on the critical ray. For $n = 1$ we obtain of course an amplitude equal to zero.

Numerical values of the amplitudes for various parameters are given in fig. 3 where the values of the function $RA_0 = \frac{1}{\rho} \sqrt{[(\rho-1) + Z^R(\alpha)]^2 + [Z^I(\alpha)]^2}$ are plotted.

In practical use the approximate values from geometric ray theory are used for the amplitudes. Fig. 4 shows the % error (p_0 %), which we make by using the geometric ray theory formula instead of the correct ones (9). This error increases the closer n approaches one, and the smaller the values of $\frac{z+z_0}{\lambda}$ and ρ . Fig. 4 shows also the percentage error (P_1) introduced by using formula (12) instead of the correct one.

Chapter 4 deals with the formulae for amplitudes for solid media, i. e. for the case where the velocity of the transversal waves is not zero.

LITERATURA

- [1] ПЕТРАШЕНЬ Г. И.: Материалы количественного изучения динамики сейсмических волн. Изд. ленинградского университета, 1957.
- [2] ČERVENÝ V.: On the Reflection of Spherical Elastic Waves at a Plane Interface with Refractive Index Near to One. *Studia geoph. et geod.* 3 (1959), 116.