Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Pavel Rucki; Marian Genčev; Simona Pulcerová

Aproximace reálných čísel a příspěvek českých matematiků. (1. část)

*Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, Vol. 56 (2011), No. 3, 238–252

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/142011

# Aproximace reálných čísel a příspěvek českých matematiků (1. část)

*Pavel Rucki, Marian Genčev, Simona Pulcerová, Ostrava*

## 1. Úvod

Počátky matematiky sahají až k prvním písemným záznamům v Mezopotámii, v níž se z období 2200 až 1800 př. n. l. dochovalo velké množství matematických tabulek ukazující pokročilý stupeň rozvoje algebry i geometrie. Je to doba, kdy lidé ještě neznali pojmy jako iracionální číslo nebo záporné číslo, ale kdy můžeme najít algebraické úlohy, které vedou na rovnice lineární, kvadratické, kubické a kvartické i jejich soustavy.

Pokud jde o Evropu, kolébkou evropské kultury a vzdělanosti bylo starověké Řecko, které za své rozvinuté matematické poznatky vděčí Pythagorovi a jeho následovníkům, kteří jako první odhalili, že kromě racionálních čísel existují i čísla jiná, do té doby neznámá. Vzpomeňme jeden z nejstarších důkazů z teorie čísel, že číslo $\sqrt{2}$ je iracionální. Vedle Pythagora nesmíme opomenout dalšího řeckého matematika Eukleida, jehož třináctidílné „Základy" obsahují systém axiomů, z nichž vychází klasická geometrie. Poznamenejme, že v tomto díle podává Euklides také důkaz Pythagorovy věty a důkaz nekonečnosti prvočísel. Dalším matematikem té doby byl Archimédes, který jako jeden z prvních pracoval s nekonečnými posloupnostmi a řadami, když se snažil určit obsah plochy omezené parabolou metodou vpisování trojúhelníků. Své poznatky shrnul ve spise „O metodě mechanicky odvoditelných vět", v němž mimo jiné odvodil obvod a obsah kruhu určením přibližné hodnoty Ludolfova čísla $\pi$.

V následujících kapitolách se budeme věnovat novodobým poznatkům z teorie čísel s důrazem na tu část, která ke svému bádání používá prostředky matematické analýzy, ať už v reálném, nebo v komplexním oboru. Navážeme na Archiméda a ukážeme, že s Ludolfovým číslem $\pi$ lidé pracovali od pradávna a že se je snažili vyjádřit (dnes bychom řekli aproximovat) číslem racionálním. Dále pronikneme do teorie diofantických aproximací a podáme stručný přehled nejdůležitějších výsledků. V třetí kapitole uvedeme novodobé výsledky z teorie iracionálních a transcendentních čísel, která úzce souvisí s tzv. sedmým Hilbertovým problémem. Zmíníme se také o tom, že důležitou roli hrají v teorii čísel také nekonečné řady, sloužící jako jeden z nástrojů, jak vyjádřit reálná čísla. Ukážeme si nekonečné řady ve speciálním tvaru mající specifické vlastnosti a také využití nekonečných řad k určování algebraických vlastností reálných čísel. Na to

---

RNDr. Pavel Rucki, Ph.D., Mgr. Marian Genčev, Ph.D., RNDr. Simona Pulcerová, Ph.D. (roz. Sobková), Vysoká škola báňská, Ekonomická fakulta, Katedra matematických metod v ekonomice, Sokolská třída 33, 701 21 Ostrava 1, e-mail: `pavel.rucki@vsb.cz`, `marian.gencev@vsb.cz`, `simona.pulcerova@vsb.cz`.

navazuje další kapitola, v níž uvedeme moderní výsledky z konce 20. a počátku 21. století týkající se nekonečných řad a algebraickou povahou jejich součtu, s důrazem na výsledky českých popř. československých matematiků. V současné době se touto problematikou v České republice dlouhodobě zabývá skupina matematiků soustředěných kolem prof. RNDr. Jaroslava Hančla, CSc., z Ostravské university v Ostravě, kteří odhalují nové souvislosti, pokud jde o otázky iracionality nekonečných řad a pojmů z ní odvozených, vyjádřitelných množin apod. Poznamenejme jen, že uvedené výsledky byly publikovány v mnoha zahraničních recenzovaných časopisech, jejichž seznam je uveden v samotném závěru.

## 2. Diofantické aproximace

Při praktických aplikacích se zpravidla setkáváme s reálnými čísly, která však mají tu nevýhodou, že ne vždy můžeme počítat s jejich přesnou hodnotou. Vezměme například čísla iracionální, která nelze zapsat ve tvaru zlomku $p/q$, kde $p, q \in \mathbb{Z}$ a $q$ je navíc kladné, a proto v praxi používáme jejich přibližné hodnoty. Jinými slovy, iracionální čísla aproximujeme čísly racionálními. Podobné problémy vyvstávají, uvažujeme-li zlomky jako reprezentanty racionálních čísel s velkým jmenovatelem, např. 12345/6789101213. I zde vzniká snaha aproximovat tato čísla „vhodnými“ racionálními čísly, která, vyjádřená ve tvaru zlomku, mají menšího a tím pro praktické užití vhodnějšího jmenovatele. Těmito problémy se zabývá tzv. teorie diofantických aproximací, jež zkoumá, proč se některá čísla aproximují lépe než jiná a nabízí metody, jak nalézt v jistém slova smyslu „nejlepší“ racionální aproximaci daného reálného čísla, např. pomocí tzv. řetězových zlomků. Podívejme se nejdříve do minulosti a ukažme si, že hledání vhodných aproximací započalo ještě dříve, než byly položeny základy teorie diofantických aproximací.

Začněme Ludolfovým číslem, jednou z nejznámějších konstant, jíž se lidé zabývali odpradávna. Nejstarší zmínku o Ludolfově čísle $\pi = 3{,}141592653\ldots$ můžeme najít už kolem roku 1000 př. n. l. v hebrejské bibli, v první knize královské, kde se $\pi$ aproximovalo číslem 3. Archimedes (287 – 212 př. n. l) používal aproximaci $22/7 = 3{,}142857142\ldots$ a v pátém století našeho letopočtu se ve spisech čínského matematika Tsu Chung-Chi (429 – 501) objevuje aproximace $355/113 = 3{,}14159292\ldots$ Ve středověku kolem roku 1600 pracuje matematik Adriaan Anthoniszoon (zvaný Metius) (1571 – 1635) s aproximacemi $333/106 = 3{,}141509433\ldots$ a $355/113 = 3{,}14159292\ldots$ Zlomky 22/7, 333/106 a 355/113 aproximují $\pi$ po řadě s přesností na dvě, čtyři a šest desetinných míst, přestože jmenovatelé těchto zlomků jsou maximálně trojciferná čísla.

S problémem aproximace racionálních čísel jinými racionálními čísly s menším jmenovatelem se potýkal holandský fyzik, matematik a astronom Christiaan Huygens (1629 – 1695). Huygens se snažil vytvořit pomocí ozubených kol model Sluneční soustavy tak, aby tento model co nejvíce odpovídal skutečnosti. V jeho době byl znám poměr dob oběhů Saturnu a Země kolem Slunce, který činil 29,43 : 1. Huygens se pokoušel vyrobit ozubená kola pro modely Saturnu a Země tak, aby poměr počtu zubů jednotlivých kol byl přibližně roven skutečnému poměru 29,43 : 1 a jednotlivá kola obsahovala přijatelný počet zubů. Huygens proto zvolil ozubená kola, jejichž počty zubů jsou v poměru 206 : 7. Tento poměr aproximuje skutečnou dobu s dostatečnou přesností ($206/7 = 29{,}4285\ldots$), uvážíme-li, že jmenovatel zlomku je pouze 7.

Všimněme si, že při hledání vhodných racionálních aproximací klademe důraz nejen na chybu, které se při práci s aproximací dopouštíme, ale i na velikost jmenovatele zlomku, který tuto aproximaci reprezentuje. Těmito aproximacemi se v 19. století zabýval francouzský matematik Joseph Liouville (1809 – 1882), jenž objevil mnoho jejich důležitých vlastností.

Uvažujme $\alpha \in \mathbb{R}$. Zajímá nás, jak přesně může být reálné číslo $\alpha$ aproximováno racionálními čísly ve tvaru $p/q$. Zkoumáme tedy, jak malým můžeme učinit výraz

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \tag{1}$$

vhodnou volbou čísla $p/q$. Odpověď je triviální. Protože je množina racionálních čísel $\mathbb{Q}$ hustá v $\mathbb{R}$, může být tento rozdíl libovolně malý. Budeme-li například požadovat, aby byl rozdíl (1) menší než předem dané reálné číslo $\varepsilon > 0$, stačí zvolit $q > 1/(2\varepsilon)$ a $p$ jako nejbližší celé číslo k číslu $q\alpha$. Pak

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{2q} < \varepsilon. \tag{2}$$

Z této nerovnosti je zřejmé, že přesnost aproximace bude záležet také na jmenovateli zlomku, kterým aproximujeme číslo $\alpha$. Jinými slovy, aproximace čísla $\alpha$ bude tím přesnější, čím větší bude jmenovatel, závislý na $q$, na pravé straně této nerovnosti. Samozřejmě racionální čísla $p/q$ splňující například nerovnost

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2} < \varepsilon,$$

budou mnohem lépe aproximovat číslo $\alpha$ než zlomky vyhovující předchozí nerovnosti. Nicméně najdeme-li jedno řešení jedné z těchto nerovností, pak to ještě nic nevypovídá o tom, jak snadno lze číslo $\alpha$ aproximovat. Abychom se k němu mohli přiblížit libovolně blízko, budeme požadovat, aby taková nerovnost měla nekonečně mnoho řešení $p/q$.

**Definice 2.1** *Reálné číslo $\alpha$ se nazývá aproximovatelné (racionálními čísly) do řádu $s \in \mathbb{R}$, $s > 0$, existuje-li konstanta $c > 0$ taková, že nerovnosti*

$$0 < \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{c}{q^s}$$

*jsou splněny pro nekonečně mnoho dvojic $(p, q)$, kde $p \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{N}$.*

Pokud jde o zlomky $p/q$, pak není nutné požadovat, aby $p$ a $q$ byla nesoudělná. Poněvadž míra přiblížení se k číslu $\alpha$ závisí na exponentu $s$, můžeme prohlásit, že číslo $\alpha$ je dobře aproximovatelné racionálními čísly, je-li $s$ velké, a špatně aproximovatelné, je-li $s$ malé. Z definice jednoduše vyplývá, že je-li číslo $\alpha$ aproximovatelné do řádu $s$, pak je také aproximovatelné do libovolného řádu menšího než $s$. Základní otázka tedy spočívá v hledání co největšího řádu aproximace pro dané reálné číslo $\alpha$.

**Příklad 2.1** *Nechť*

$$\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} 10^{-2^k} = 0{,}11010001000000010\ldots$$

*Není obtížné ukázat, že*

$$0 < \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{2}{q^2}$$

*pro nekonečně mnoho racionálních čísel $p/q$, za která lze vzít právě částečné součty řady definující $\alpha$ (jak čtenář lehce ověří). Číslo $\alpha$ je tedy aproximovatelné do řádu 2.*

Toto je příklad jednoho konkrétního reálného čísla. Můžeme se dále ptát, zda jsme schopni určit řád aproximace libovolného reálného čísla. Nerovnost (2) dává odpověď na tuto otázku.

**Věta 2.1** *Každé reálné číslo je aproximovatelné do řádu* 1.

Nicméně tato věta neříká nic o tom, zda je možné dané reálné číslo aproximovat do řádu vyššího než 1. V příkladu 2.1 jsme viděli, že takové číslo existuje. Nyní si ukážeme, že takových čísel je více, a dokonce je dokážeme přesně vymezit.

Uvažujme nyní, že číslo $\alpha$ je racionální. Pak lze snadno dokázat, že existuje konstanta $c > 0$ taková, že pro každé racionální číslo $p/q \neq \alpha$ platí

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{c}{q}\,.$$

Bude-li totiž $\alpha = m/n$, kde $m \in \mathbb{Z}$ a $n \in \mathbb{N}$, pak

$$\left|\frac{m}{n} - \frac{p}{q}\right| = \frac{|mq - np|}{nq} \geq \frac{1}{nq}\,.$$

Stačí tedy vzít kladnou konstantu $c < 1/n$. Důsledkem tohoto tvrzení je následující věta.

**Věta 2.2** *Racionální čísla nejsou aproximovatelná do řádu vyššího než* 1.

Jinak řečeno, racionální čísla jsou špatně aproximovatelná jinými racionálními čísly ve smyslu definice 2.1. Má smysl se tedy ptát, do jakého řádu lze aproximovat čísla iracionální. Tento problém vyřešil v roce 1842 německý matematik Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 – 1859).

**Věta 2.3 (Dirichlet, 1842, [7])** *Každé iracionální číslo je aproximovatelné do řádu* 2. *Tzn. je-li $\alpha$ iracionální číslo, pak existuje nekonečně mnoho racionálních čísel $p/q$ takových, že*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}\,.$$

Z hlediska řádu aproximace se tedy racionální a iracionální čísla liší v tom, že racionální čísla nejsou na rozdíl od iracionálních aproximovatelná do řádů větších než 1. Dále se můžeme ptát, zda existují taková iracionální čísla, která by byla aproximovatelná do řádu vyššího než 2.

Ukážeme si nyní, že je to možné, a že tato otázka úzce souvisí s rozdělením množiny reálných čísel na jiné dvě disjunktní podmnožiny než na množinu racionálních a iracionálních čísel. Reálná čísla můžeme také rozdělit podle toho, zda jsou nebo nejsou kořeny nějakého nenulového polynomu s celočíselnými koeficienty, na čísla algebraická a čísla transcendentní. Aproximovatelností těchto čísel se zabýval právě Liouville, který v roce 1844 dokázal následující tvrzení, viz [29] a [35].

**Věta 2.4 (Liouville, 1844)** *Je-li $\alpha$ algebraické číslo stupně $n$, pak není aproximovatelné do řádu vyššího než $n$.*

Připomeňme, že stupeň algebraického čísla je nejmenší stupeň polynomu s racionálními koeficienty, jehož je dané algebraické číslo kořenem. Použitím předchozí věty zkonstruoval Liouville první příklad reálného čísla, o kterém se tehdy s určitostí vědělo, že není algebraické (a tedy je transcendentní). Jeho vyjádření je následující

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k!} = 0{,}110001000000000000000001 00\ldots$$

Číslo $\alpha$ se na jeho počest nazývá *Liouvilleova konstanta* a má tu vlastnost, že je aproximovatelná do libovolně velkého kladného řádu. Čísel s touto vlastností existuje dokonce nespočetně mnoho a nazývají se souhrnně *Liouvilleova čísla*. Pokud jde o čísla algebraická, tak v roce 1909 vylepšil Liouvilleův výsledek (věta 2.4) norský matematik Axel Thue (1863 – 1922), když dokázal zmenšit jejich řád aproximace, viz [51]. Dokázal, že každé algebraické číslo stupně $n$ je aproximovatelné nejvýše do řádu $1+n/2$. Po něm se o další snížení řádu aproximace algebraických čísel zasloužil německý matematik Carl Ludwig Siegel (1896 – 1981), který v roce 1921 ukázal, že algebraická čísla stupně $n$ jsou aproximovatelná nejvýše do řádu $2\sqrt{n}$, viz [46]. Konečně v roce 1955 publikoval britský matematik Klaus Roth tvrzení, které je jedním ze stěžejních výsledků analytické teorie čísel a odhaluje zásadní rozdíl mezi algebraickými a transcendentními čísly z pohledu jejich aproximovatelností racionálními čísly. Za tento výsledek získal Roth nejvyšší ocenění v matematických disciplínách, Fieldsovu medaili.

**Věta 2.5 (Roth, 1955, [42])** *Je-li $\alpha$ algebraické číslo, pak není aproximovatelné do řádu vyššího než 2.*

Shrneme-li všechny dosavadní poznatky, můžeme prohlásit, že racionální čísla jsou aproximovatelná právě do řádu 1, iracionální čísla pak alespoň do řádu 2 a algebraická čísla nejvýše do řádu 2. Takže iracionální algebraická čísla mají řád právě 2. Speciální množinu pak tvoří čísla Liouvilleova, která jsou aproximovatelná do libovoloně velkého kladného řádu.

Dosud jsme se zabývali tím, jak přesně lze aproximovat reálná čísla. Nyní si položme otázku, jak tyto racionální aproximace najít. Jednou z možností je použít aparát tzv. *řetězových zlomků*. Jako první se jimi systematicky zabýval italský matematik Rafael Bombelli (1526 – 1572), když se v roce 1572 snažil najít přibližné hodnoty druhých odmocnin přirozených čísel, viz [41]. Řetězový zlomek příslušný k danému kladnému reálnému číslu $\alpha$ je zlomek ve speciálním tvaru:

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \ddots}}}},$$

kde $a_0$ je dolní celá část čísla $\alpha$ a $a_1, a_2, \ldots$ jsou přirozená čísla. Postup, jak tyto koeficienty vypočítat, přesná definice řetězových zlomků a otázky jejich konvergence jsou podrobně rozebrány např. v [29] nebo [48].

Pro naše potřeby bude stačit, když toto vyjádření nazveme *(nekonečný) řetězový zlomek* čísla $\alpha$. Budeme jej zapisovat v stručnější formě $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \ldots]$. Počet přirozených čísel $a_0, a_1, a_2, \ldots$ může být konečný i nekonečný. Není obtížné ukázat, že je konečný, je-li $\alpha$ racionální číslo, a nekonečný, je-li $\alpha$ iracionální. Speciální roli hrají v teorii řetězových zlomků tzv. *sblížené zlomky* $p_k/q_k$, $k = 1, 2, \ldots$, které definujeme rekurentně

$$\begin{aligned} p_k &= a_k p_{k-1} + p_{k-2} \\ q_k &= a_k q_{k-1} + q_{k-2}, \qquad k = 1, 2, \ldots, \end{aligned}$$

přičemž $p_{-1} := 1$, $q_{-1} := 0$, $p_0 := a_0$ a $q_0 := 1$. A právě tyto sblížené zlomky $p_k/q_k$ je možné použít jako racionální aproximace daného reálného čísla $\alpha$.

**Příklad 2.2** *Najděme prvních pět sblížených zlomků Ludolfova čísla $\pi$, známe-li jeho řetězový zlomek*

$$\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, \ldots].$$

*Pomocí předchozích rekurentních vztahů určíme prvních pět sblížených zlomků,*

$$\frac{3}{1}, \ \frac{22}{7}, \ \frac{333}{106}, \ \frac{355}{113}, \ \frac{103993}{33102}.$$

Můžeme si všimnout, že některé z uvedených zlomků matematici používali již v době, kdy skutečnost, že sblížené zlomky jsou právě těmi nejlepšími racionálními aproximacemi daného reálného čísla, nebyla známa.

Nyní také můžeme odpovědět na otázku, proč Huygens použil při stavbě svého modelu Sluneční soustavy ozubená kola, sloužící jako modely Saturnu a Země, s poměrem zubů 206 : 7.

**Příklad 2.3** *Najděme všechny sblížené zlomky čísla* 29,43*, známe-li jeho řetězový zlomek*

$$29{,}43 = [29, 2, 3, 14].$$

*Stejně jako v předchozím příkladu použijeme již uvedené rekurentní vztahy a určíme všechny sblížené zlomky,*

$$\frac{29}{1}, \ \frac{59}{2}, \ \frac{206}{7}, \ \frac{2943}{100}.$$

Zlomek 206/7 je sblíženým zlomkem čísla 29,43, a proto jej aproximuje nejlépe, vezmeme-li v úvahu, že s ohledem na jednociferného jmenovatele je chyba, které se použitím této aproximace dopustíme, velmi malá.

## 3. Teorie iracionálních a transcendentních čísel

Již v antických dobách bylo známo, že existují i čísla, která nelze vyjádřit ve tvaru $p/q$. Příkladem takového čísla je třeba $\sqrt{2}$. Pokud omezíme naše pozorování na chvíli pouze na čísla intervalu $[0, 1]$, můžeme snadno ukázat, že všech racionálních a algebraických čísel z tohoto intervalu je nekonečně mnoho, ovšem na druhou stranu pouze spočetně. Georg Cantor vypracoval důkaz tvrzení, že interval $[0, 1]$ je nespočetný (viz třeba [48]). Z toho lze usoudit, že existuje velmi obsažná podmnožina intervalu $[0, 1]$, která obsahuje čísla, jež nejsou racionální ani algebraická. Pokud aplikujeme tuto úvahu na množinu všech komplexních čísel $\mathbb{C}$, obdržíme množinu všech transcendentních čísel. A právě studium transcendence (popř. iracionality) matematických konstant je jedna z oblastí, kterou se zabývá analytická teorie čísel.

V 18. a 19. století se matematici zabývali charakterem matematických konstant $\pi$, e, jejich přirozených mocnin, popř. jinými konstrukcemi jako $\mathrm{e}^{\pi}$, $\pi^{\mathrm{e}}$, $\pi + \mathrm{e}$ a podobně. Zároveň se velmi živě diskutovalo v závěru 19. století o obecném charakteru čísel $\alpha^{\beta}$, kde $\alpha$ a $\beta$ byla jistá algebraická čísla nad tělesem $\mathbb{Q}$.

Studium algebraické povahy Eulerova čísla e a Ludolfova čísla $\pi$ patří k mezníkům analytické teorie čísel. U čísla $\pi$ můžeme zaznamenat první zájem o tento druh informace dokonce již v antických dobách, a to na úloze o kvadratuře kruhu. Řešení této úlohy bylo však nalezeno až v 19. století. Před podáním důkazu o nemožnosti kvadratury kruhu byly konstruovány metody důkazu iracionality čísla $\pi$. Jedna z nich využívá rozvoje funkce $\operatorname{tg} x$ do nekonečného řetězového zlomku a jejím autorem je švýcarský matematik Johann Heinrich Lambert (1728 – 1777), který ji prezentoval v roce 1761 ve svém článku [33]. Důkaz iracionality $\pi$ sporem je v Pokrocích podán v [37, s. 220].

Transcendence Ludolfova čísla $\pi$ byla dokázána až později a zakládá se na zobecnění metody francouzského matematika Charlese Hermiteho (1822 – 1901), který v roce 1873 dokázal transcendenci Eulerova čísla. Jeho metoda využívá konstrukci speciální třídy polynomů s celočíselnými koeficienty a odhadů jejich hodnot v jistých bodech. Ve svém článku Hermite [28] položil základy teorie Padého aproximací a navíc dokázal následující tvrzení.

**Věta 3.1 (Hermite, 1873)** *Nechť $r$ je nenulové racionální číslo. Pak číslo $\mathrm{e}^r$ je transcendentní.*

Jeho myšlenky byly dále rozvinuty německým matematikem Ferdinandem von Lindemannem (1852 – 1939), který dokázal ve své práci [53] z roku 1882, že číslo $\pi$ je transcendentní, a vyřešil tak antickou úlohu o nemožnosti kvadratury kruhu. Tento poznatek spolu s Hermiteho větou vyústily v následující větu.

**Věta 3.2 (Hermiteho-Lindemannova věta)** *Nechť $\alpha$ je komplexní algebraické číslo různé od 0 a 1. Nechť dále $\ln \alpha$ je libovolná hodnota logaritmu čísla $\alpha$. Pak číslo $\ln \alpha$ je transcendentní. Ekvivalentně, nechť $\beta$ je nenulové algebraické číslo. Pak $\mathrm{e}^{\beta}$ je transcendentní.*

Důkaz této věty vyžaduje hlubší znalosti z teorie funkce komplexní proměnné. Transcendence čísla $\pi$ plyne z předchozí věty volbou $\alpha = \mathrm{i}$, neboť $\ln(\mathrm{i}) = \frac{\mathrm{i}}{2} \cdot \pi$.

Dalším posunem v oblasti studia vlastností exponenciální funkce $\mathrm{e}^x$ je věta o algebraické nezávislosti jejích hodnot z roku 1888. Připomeňme jen, že reálná čísla $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\ldots$, $\alpha_n$ jsou *algebraicky nezávislá nad tělesem* $\mathbb{Q}$, jestliže neexistuje nenulový polynom o $n$ proměnných $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ s racionálními koeficienty takový, že

$$P(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 0.$$

Tato definice je zobecněním již zavedených pojmů iracionality, resp. transcendence čísel.

**Věta 3.3 (Lindemannova-Weierstraßova)** *Nechť $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ jsou algebraická čísla lineárně nezávislá nad tělesem $\mathbb{Q}$. Pak čísla $\mathrm{e}^{\beta_1}, \mathrm{e}^{\beta_2}, \ldots, \mathrm{e}^{\beta_n}$ jsou algebraicky nezávislá nad tělesem $\mathbb{Q}$.*

Před rokem 1900 byly však nalezeny i jiné typy iracionálních, popř. transcendentních čísel. Příklad historicky prvního transcendentního čísla byl zkonstruován v roce 1844 J. Liouvillem (viz Liouvillova konstanta, kap. 2). Další příklady byly prezentovány ve tvaru nekonečné řady pomocí čísel, jež se v současnosti označují jako $\theta_a$, $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 2$, a jsou definována jako

$$\theta_a := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^{n!}}\,.$$

Vývoj analytické teorie čísel v první polovině 20. století je významně ovlivněn tzv. sedmým Hilbertovým problémem, který tak reaguje na otázku Eulera týkající se algebraického charakteru čísel ve tvaru $\alpha^\beta$, kde čísla $\alpha$, $\beta$ jsou algebraická taková, že $\alpha \notin \{0, 1\}$ a číslo $\beta$ je iracionální. Sedmý Hilbertův problém byl vyřešen sovětským matematikem Alexandrem O. Gel'fondem (1906 – 1968) v roce 1934 (viz [10], [11]), který podal kompletní důkaz následujícího tvrzení.

**Věta 3.4 (Gel'fond)** *Nechť $\alpha$, $\beta$ jsou taková algebraická čísla, že $\alpha \notin \{0, 1\}$ a $\beta$ je iracionální. Pak číslo $\alpha^\beta$ je transcendentní.*

Gel'fond použil ve své práci zcela novou analytickou metodu, která spočívala ve speciální interpolaci exponenciální funkce $\mathrm{e}^z$, $z \in \mathbb{C}$. Nezávisle na něm zkonstruoval velice podobnou metodu německý matematik Theodor Schneider (1911 – 1988) a dokázal ve své dizertační práci nezávisle na Gel'fondovi v roce 1935 tuto větu také (viz [44], [45]). Proto se někdy nazývá uvedené tvrzení jako Gel'fondova-Schneiderova věta. Po roce 1935 byli matematici schopni v důsledku platnosti Gel'fondovy-Schneiderovy věty odhalit velice obsažnou třídu transcendentních čísel.

Příkladů použití věty 3.4 je hned několik. Jeden z těch snadnějších, spadající až do Eulerovy doby, je tzv. *Gel'fondova-Schneiderova konstanta* $2^{\sqrt{2}}$, jejíž transcendence plyne snadno z Gel'fondovy věty, položíme-li $\alpha = 2$, $\beta = \sqrt{2}$. Velmi významným příkladem je tzv. *Gel'fondova konstanta* $\mathrm{e}^\pi$, kde ovšem není volba hodnot $\alpha$ a $\beta$ tak zřejmá. Platí totiž $-1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = \left(\mathrm{e}^\pi\right)^{\mathrm{i}}$. Poněvadž $-1$ není transcendentní, $\mathrm{e}^\pi$ jistě není ani 0 ani 1 a i je algebraické iracionální, vyplývá z Gel'fondovy-Schneiderovy věty, že $\mathrm{e}^\pi$ je nutně transcendentní.

Gel'fondova-Schneiderova metoda byla dále rozvinuta a zobecněna. Někdy hovoříme také o multidimenzionální verzi Hilbertova sedmého problému, jehož řešení bylo nalezeno anglickým matematikem Alanem Bakerem v roce 1967 (viz např. [3]). Svou metodou doslova způsobil revoluci, když se mu podařilo dokázat transcendenci jisté lineární kombinace logaritmů algebraických hodnot. Jeho výsledek obsažený v následující větě byl oceněn nejvyšším matematickým oceněním,Fieldsovou medailí v roce 1970. Tato věta se navíc stala klíčem k rozvoji významných částí teorie čísel v posledních čtyřiceti letech.

**Věta 3.5 (Baker)** *Nechť* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *je n-tice algebraických nenulových čísel. Pak čísla* $\ln \alpha_1, \ln \alpha_2, \ldots, \ln \alpha_n$ *jsou lineárně nezávislá nad tělesem algebraických čísel tehdy a jen tehdy, když jsou lineárně nezávislá nad tělesem* $\mathbb{Q}$.

Důsledkem této věty je třeba algebraická povaha čísel, která jsou dána hodnotami určitých Riemannových integrálů racionálních funkcí s algebraickými koeficienty. Věta 3.5 říká, že např. číslo

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1} = \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

je transcendentní.

Další typy transcendentních čísel byly objeveny koncem 20. století pomocí komplikovaných metod využívajících mnoho nových a náročných pojmů z teorie transcendentních čísel. Některé výsledky jsou však velmi čitelné i pro relativního laika. V roce 1996 ruský matematik Jurij Valentinovič Nesterenko dokázal následující tvrzení.

**Věta 3.6 (Nesterenko)** *Čísla* $\pi$, $\mathrm{e}^{\pi}$ *a* $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$ *jsou algebraicky nezávislá nad tělesem racionálních čísel.*

Připomeňme, že funkce $\Gamma(z)$ je definována nekonečným součinem

$$\Gamma(z) := \frac{1}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^z}{1+\frac{z}{n}},$$

kde $z$ je libovolné komplexní číslo kromě nuly a celých záporných čísel. Navíc pro přirozená čísla $n$ platí $\Gamma(n) = (n-1)!$, a proto funkci $\Gamma(z)$ můžeme chápat jako zobecnění pojmu faktoriál.

Z předchozí věty plyne například transcendence čísla $\pi + \mathrm{e}^{\pi}$. Navíc tento výsledek byl použit k důkazu transcendence součtu nekonečné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1} = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\mathrm{e}^{\pi}+\mathrm{e}^{-\pi}}{\mathrm{e}^{\pi}-\mathrm{e}^{-\pi}}. \tag{3}$$

Dalším významným příkladem je Rogersův-Ramanujanův řetězový zlomek $RR(\alpha)$, který je definován vztahem

$$RR(\alpha) := 1 + \cfrac{\alpha}{1+\cfrac{\alpha^2}{1+\cfrac{\alpha^3}{1+\ddots}}}.$$

Matematici D. Bertrand, D. Duverney, K. Nishioka a I. Shiokawa v roce 1996 ukázali, že pro libovolné algebraické číslo $\alpha \in (0,1)$ je hodnota Rogersova-Ramanujanova zlomku $RR(\alpha)$ transcendentní číslo.

## 4. Nekonečné řady ve speciálním tvaru

Zmíníme se nyní krátce o nekonečných řadách ve speciálním tvaru ve vztahu k povaze jejich součtu (iracionalita, transcendence a jiné). Jedna z nejjednodušších řad, pokud jde o určení jejího součtu, je řada geometrická. Je-li $q$ celé číslo různé od 0, 1 a $-1$, pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q^n} = \frac{q}{q-1},$$

tzn. součet je racionální číslo. Můžeme se nyní ptát, jak se změní vlastnosti součtu řady, pokud v ní přičteme k mocnině $q^n$ racionální číslo $r \neq q^n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. V roce 1992 dokázal kanadský matematik Peter Borwein v [5], že součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q^n + r} \tag{4}$$

je iracionální číslo, avšak není to číslo Liouvilleovo. O sedm let později dokázali Peter Borwein a Ping Zhou tentýž výsledek o nekonečné řadě v obecnějším tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + q^n r - q^{2n} s}, \tag{5}$$

kde $r$ a $s$ jsou kladná racionální čísla a $1 + q^n r - q^{2n} s \neq 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, viz [6]. Význam těchto poznatků můžeme vidět také v tom, že součet nekonečných řad (4) a (5) není dosud znám v uzavřeném tvaru, a proto nemůžeme soudit nic o racionalitě jako v případě geometrické řady.

Zajímavá situace nastává u nekonečných řad typu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(n)}{Q(n)}, \tag{6}$$

kde $P(x)$ a $Q(x)$ jsou polynomy s racionálními koeficienty, $Q(x)$ není konstantní polynom, $P(x)$ není nulový polynom a řada (6) je konvergentní.

Má-li polynom $Q(x)$ jednoduché racionální kořeny, jsme schopni racionální lomenou funkci $P(x)/Q(x)$ rozložit na parciální zlomky s lineárními členy ve jmenovatelích. V roce 1975 ukázal americký matematik Derrick Henry Lehmer (1905–1991) v [34] nebo také [12], že je možné nekonečnou řadu skládající se ze součtu těchto parciálních zlomků vyjádřit v následujícím uzavřeném tvaru:

$$S := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i}{b_i n + c_i} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{b_i - 1} \frac{a_i}{b_i} \left(1 - \zeta_i^{-jc_i}\right) \ln(1 - \zeta_i^j),$$

kde $\zeta_i$ je některý z komplexních kořenů rovnice $x^{b_i} = 1$, $i = 1, 2, \dots, m$. Můžeme si všimnout, že na pravé straně se nachází lineární kombinace přirozených logaritmů, v jejichž argumentech jsou algebraická čísla. S takovým vyjádřením jsme se již setkali v kapitole o iracionálních a transcendentních číslech, když jsme zmiňovali důležitou Bakerovu větu (věta 3.5). Užitím této identity můžeme určit součet mnoha na první pohled jednoduchých řad, např.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2 + n} = 2 - 2\ln 2.$$

Obecně je možné dokázat, že součet $S$ je buď racionální, nebo transcendentní číslo. Leží-li navíc všechny kořeny polynomu $Q(x)$ v intervalu $[-1, 0)$, je pak buď $S = 0$, nebo $S$ je transcendentní. Jako příklad můžeme uvést nekonečnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(nk+1)(nk+2)\cdots(nk+k)} = \frac{1}{1\cdot 2\cdots k} + \frac{1}{(k+1)(k+2)\cdots(2k)} + \cdots,$$

jejíž součet je transcendentní číslo pro každé přirozené číslo $k$ větší než 1. Příkladem řady, jejíž členy jsou ve tvaru podílu dvou mnohočlenů a jež má racionální součet, je řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)} = \frac{1}{1\cdot 2\cdots k} + \frac{1}{2\cdot 3\cdots(k+1)} + \cdots = \frac{1}{(k-1)\cdot(k-1)!}.$$

Její součet je racionální pro každé přirozené číslo $k$ větší než 1.

Výrazně komplikovanější je situace ve speciálním případě, kdy volíme $P(x) \equiv 1$ a $Q(x) = x^s$, kde $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 2$. Potom příslušná nekonečná řada má tvar

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}. \tag{7}$$

Obecněji, pro libovolné $s \in \mathbb{R}$, $s > 1$, lze pomocí nekonečné řady (7) definovat funkci $\zeta(s)$ vztahem

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \qquad s > 1.$$

Funkce $\zeta(s)$ se nazývá *Riemannova funkce* a má v současné matematice významnou roli. Některé její vlastnosti však dosud nejsou dostatečně prostudovány (třeba Riemannova hypotéza). Z pohledu analytické teorie čísel je studována algebraická povaha hodnot Riemannovy funkce $\zeta(s)$ pro $s \in \mathbb{N}$, $s > 1$. Situace je kompletně vyřešena pro sudé hodnoty proměnné $s$. Platí totiž formule

$$\zeta(2s) = \frac{(2\pi)^{2s}}{2\cdot(2s)!} \cdot |B_{2s}|, \tag{8}$$

kde symbol $B_i$ označuje tzv. $i$-té Bernoulliovo číslo. Užitím této rovnosti můžeme na základě věty 3.2 ukázat, že $\zeta(2k)$ je transcendentní číslo pro $k \in \mathbb{N}$.

Situace je ovšem výrazně složitější pro liché hodnoty argumentu $s$. Zde je konkrétní výsledek znám pouze pro $s = 3$. Tato speciální a důležitá hodnota součtu nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ se nazývá *Apéryho konstanta.* V roce 1979 publikoval francouzský matematik Roger Apéry (1916 – 1994) neočekávaný důkaz iracionality hodnoty $\zeta(3)$ (viz třeba [2] nebo [52]). Jeho důkaz nepoužíval žádné speciální techniky a mohl ho tedy objevit i Euler. Doposud není známo nic bližšího o transcendenci Apéryho konstanty. Navíc zatím není dokonce známo, jestli jsou iracionální i všechny ostatní hodnoty Riemannovy funkce pro liché argumenty $s \geq 5$. Zajímavých výsledků v této oblasti analytické teorie čísel dosáhl ale ruský matematik Wadim Zudillin, který je znám následující větou z roku 2001 (viz [54]).

**Věta 4.1 (Zudillin)** *Alespoň jedno ze čtveřice čísel* $\zeta(5)$*,* $\zeta(7)$*,* $\zeta(9)$*,* $\zeta(11)$ *je iracionální.*

Všimněme si, že k důkazu transcendence hodnot funkce $\zeta(s)$ pro sudé argumenty $s$ používáme uzavřený tvar (8) součtu nekonečné řady. Tuto techniku bohužel nemůžeme aplikovat pro hodnoty funkce $\zeta(s)$ v lichých argumentech $s$, $s \geq 3$. Na druhou stranu pokud by se podařilo najít uzavřený tvar součtu příslušný hodnotě $\zeta(3)$ pomocí konečného počtu již definovaných konstant, znali bychom algebraickou povahu takového výrazu. Význam sumace nekonečných řad do uzavřeného tvaru má tedy své důležité místo v obecné matematice a jejích aplikacích (srovnejte tuto techniku s identitou (3) a větou 3.6).

*Dokončení příště*

L i t e r a t u r a


[1] Adhikari, S. D., Saradha, N., Shorey, T. N., Tijdeman, R.: *Transcendental Infinite Sums.* Indag. Math. (N.S.) *12* (2001), 1–14.

[2] Apéry, R.: *Irrationalité de* $\zeta(2)$ *et* $\zeta(3)$*.* Astérisque *61* (1979), 11–13.

[3] Baker, A.: *Transcendental Number Theory.* Cambridge Univ. Press, New York, 1975.

[4] Bezkovič, A. S.: *Sets of Fractional Dimensions (IV): on Rational Approximation to Real Numbers.* J. London Math. Soc. *9* (1934), 126–131.

[5] Borwein, P.: *On the Irrationality of Certain Series.* Math. Proc. Camb. Philos. Soc. *112 (1)* (1992), 141–146.

[6] Borwein, P., Zhou, P.: *On the Irrationality of a Certain q Series.* Proc. Amer. Math. Soc. *127 (6)* (1999), 1605–1613.

[7] Dirichlet, P. G. L.: *Werke, vol. 1.* Ed. by L. Kronecker. Reimer, Berlin 1889.

[8] Erdős, P.: *Some Problems and Results on the Irrationality of the Sum of Infinite Series.* J. Math. Sci. *10* (1975), 1–7.

[9] Galambos, J.: *Representations of Real Numbers by Infinite Series.* Springer, New York 1976.

[10] Gel'fond, A. O.: *Sur le septième Problème de D. Hilbert.* C. R. Acad. Sci. URSS Moscow *2* (1934), 1–6.

[11] Gel'fond, A. O.: *Sur le septième Problème de Hilbert.* Bull. Acad. Sci. URSS Leningrade *7* (1934), 623–634.

[12] Genčev, M.: *Transcendence of Certain Infinite Sums Involving Rational Functions.* Acta Math. Univ. Ostrava *15 (1)* (2007), 7–14.

[13] Hančl, J.: *Linearly Unrelated Sequences.* Pacific J. Math. *190* (1999), 299–310.

[14] Hančl, J.: *Liouville Sequences.* Nagoya Math. J. *172* (2003), 173–187.

[15] Hančl, J.: *Transcendental Sequences.* Math. Slovaca *6* (1996), 177–179.

[16] Hančl, J., Nair, R., Šustek, J.: *On the Lebesgue Measure of the Expressible Sets of Certain Sequences.* Indag. Math. (N.S.) *17* (2006), 567–581.

[17] Hančl, J., Rucki, P.: *Certain Liouville series.* Ann. Univ. Ferrara Sci. Mat. *52* (2006), 45–51.

[18] Hančl, J., Rucki, P.: *The Irrationality of Certain Infinite Series.* Saitama Math. J. *21* (2003), 1–8.

[19] Hančl, J., Rucki, P.: *A Note to the Transcendence of Special Infinite Series.* Math. Slovaca *56* (2006), 409–414.

[20] Hančl, J., Rucki, P.: *The Transcendence of Certain Infinite Series.* Rocky Mountain J. Math. *35* (2005), 531–537.

[21] Hančl, J., Schinzel, A., Šustek, J.: *On Expressible Sets of Geometric Sequences.* Funct. Approx. Comment. Math. *38* (2008), 121–145.

[22] Hančl, J., Sobková, S.: *A General Criterion for Linearly Unrelated Sequences.* Tsukuba J. Math. *27* (2003), 341–357.

[23] Hančl, J., Sobková, S.: *Special Linearly Unrelated Sequences.* J. Math. Kyoto Univ. *46* (2006), 31–45.

[24] Hančl, J., Štěpnička, J., Šustek, J.: *Linearly Unrelated Sequences and Problem of Erdos.* Ramanujan J. *17* (2008), 358–372.

[25] Hančl, J., Šustek, J., Jaššová, A.: *Lebesgue Measure and Hausdorff Dimension of Special Sets of Continued Fractions*, zásláno.

[26] Hančl, J., Tijdeman, R.: *On the Irrationality of Cantor Series.* J. Reine Angew. Math. *571* (2004), 145–158.

[27] Hančl, J., Tijdeman, R.: *On the Irrationality of Factorial Series.* Acta Arith. *118* (2005), 383–401.

[28] Hermite, C.: *Sur la fonction exponentielle.* C. R. Acad. Sci. Paris *77* (1873), 18–24, 74–79, 226–233, 285–293.

[29] Chinčin, A. J.: *Řetězové zlomky.* Přírodovědné nakladatelství, Praha, 1952.

[30] Jarník, V.: *Diophantischen Approximationen und Hausdorffsches Mass.* Mat. Sbornik *36* (1929), 371–382.

[31] Jarník, V.: *Contribution a la théorie métrique des fractions continues.*, Czech. Math. J. *4(79)* (1954), 318–329.

[32] Křížek, M., Somer, L., Šolcová, A.: *Kouzlo čísel: Od velkých objevů k aplikacím.* Edice Galileo, sv. 39, Academia, Praha, 2009.

[33] Lambert, H.: *Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes circulaires et logarithmiques.* Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin *17* (1761), 1768, 265–322; lu en 1767; Math. Werke, t. II.

[34] Lehmer, D. H.: *Euler Constants for Arithmetical Progression.* Acta Artih. *27* (1975), 125–142.

[35] Liouville, J.: *Nouvelle démonstration d'un théor'eme sur les irrationalles algébriques, inséré dans le Compte rendu de la derniere séance.* C. R. Acad. Sci. Paris *18* (1844), 910–911.

[36] Nesterenko, Yu. V.: *On Algebraic Independence of the Components of Solutions of a System of Linear Differential Equations.* Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. *38* (1974), 495–512.

[37] Netuka, I., Veselý, J.: *Nedávné poznatky o čísle $\pi$.* PMFA *43* (1998), 271–236.

[38] Novák, B.: *A Remark to a Paper of J. F.Koksma „On Niven's Proof that $\pi$ Is Irrational".* Nieuw Arch. Wisk. *23(3)* (1975), 195–197.

[39] Novák, B.: *O sedmém Hilbertově problému.* PMFA *17* (1972), 245–256.

[40] Parshin, A. N., Shafarevich, I. R. (Eds.): *Encyclopaedia of Mathematical Sciences 44*, Number Theory IV, Springer Verlag, Berlin Heidelberg 1998.

[41] Ribenboim, P.: *My Numbers, my Friends.* Springer, New York 2000.

[42] Roth, K. F.: *Rational Approximations to Algebraic Numbers.* Mathematika *168* (1955), 1–20.

[43] Sándor, J.: *Some Classes of Irrational Numbers.* Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math. *29* (1984), 3–12.

[44] Schneider, T.: *Transzendenzuntersuchungen periodischer Funktionen. I.* J. Reine Angew. Math. *172* (1934), 65–69.

[45] Schneider, T.: *Transzendenzuntersuchungen periodischer Funktionen. II.* J. Reine Angew. Math. *172* (1934), 70–74.

[46] Siegel, C. L.: *Approximation algebraischer Zahlen.* Math. Z. *10(3)* (1921), 173–213.

[47] Sylvester, J. J.: *On a Point in the Theory of Vulgar Fractions.* Amer. J. Math. *3(4)* (1880), 332–335.

[48] Šalát, T.: *Nekonečné rady.* Academia, Praha 1974.

[49] Šalát, T. *Über die Cantorschen Reihen.* Czechoslovak Math. J. *18(1)* (1968), 25–56.

[50] Šalát, T., Drahovský, Š.: *On Functions that Preserve Convergence of Continued Fractions.* Tatra Mt. Math. Publ. *8* (1996), 61–65

[51] Thue, A.: *Über Annäherungswerte algebraischer Zahlen.* J. Reine Angew. Math. *135* (1909), 284–305.

[52] van der Poorten, A.: *A Proof that Euler Missed ...* The Math. Intelligencer *1(4)* (1979), 195–203.

[53] von Lindemann, F.: *Über die Zahl* $\pi$. Math. Ann. *20* (1882), 213–225.

[54] Zudilin, W.: *Irrationality of Values of Riemann's Zeta Function.* Russian Acad. Sci. Izv. Math. *66(3)* (2002), 49–102.

---

# Mosaika XII

*Čeněk Strouhal, Praha*

Sešli jste se, mladí přátelé, po prázdninách osvěženi delší vítanou přestávkou ve svých třídách, druh druha uvítal, a když snad některý scházel, víte, že odešel na jiný ústav, ale že jest jinak živ a zdráv. Mluviti u vás mladých a jarých o nemoci anebo dokonce smrti bylo by tak, jako boháči vykládati o hladu, když sedí při plné tabuli. Něco jiného je u nás starších, když již ta šedesátka se přiblížila nebo překročila. Když my po prázdninách se sejdeme, ohlížíme se kolem, jako bychom se tázali: jsme zde ještě všichni? A obyčejně to bývá, že předseda té neb oné z našich vědeckých korporací zahájí sedění smuteční upomínkou na některého z druhů zemřelých. Letos o prázdninách zemřel nestor lékařské fakulty naší university dvorní rada *Bohumil Eiselt.* Narodil se dne 28. srpna 1831, skonal dne 22. srpna, dosáhl tedy bezmála 77 let věku požehnaného. Jeho rodina jest lékařskou v eminentním slova smyslu; jeho otec byl lékař, jeho oba

---

Pokračujeme v přetiskování Strouhalovy statě *Mosaika* započatém v č. 1, roč. *53* (2008). Tato část pochází z Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky, ročníky XXXVIII (1909).