Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Barry Cipra

Jeden ze sedmi problémů tisíciletí se přibližuje k úplnému vyřešení

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 55 (2010), No. 4, 265–277

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/141968`

Jeden ze sedmi problémů tisíciletí se přibližuje k úplnému vyřešení

Barry Cipra, Northfield

Poznámka redakce. Přestože tento článek vyšel již v roce 2006, uveřejnění jeho překladu zůstává aktuální dodnes, protože obsahuje formulaci Poincarého hypotézy, historický přehled dílčích řešení, několik ilustračních příkladů a další zajímavosti. Od roku 2006 se odehrála řada událostí.

Grigorij Jakovlevič Perelman (nar. 13. 7. 1966) ještě donedávna pracoval v laboratoři matematické fyziky Stěklovova matematického ústavu v St. Petersburgu. Matematická komunita uznala správnost jeho důkazu Poincarého hypotézy, a proto byla v roce 2006 Perelmanovi udělena Fieldsova medaile. On ji však odmítl převzít, stejně jako milion dolarů, který za důkaz Poincarého hypotézy vypsal Clayův institut. Svým rozhodnutím se Perelman proslavil mnohem více, než kdyby obě ocenění přijal.

Obecnější problém, důkaz tzv. Thurstonovy Geometrizační hypotézy, byl zřejmě také již úspěšně vyřešen na základě Perelmanovy práce – viz poznámka překladatele ke konci článku.

V roce očekávání nového tisíciletí (2000) soustředil Clayův matematický ústav (Clay Mathematics Institute) pozornost celého světa na sedm matematických problémů výjimečného historického i praktického významu, a to nabídkou odměny ve výši miliónu dolarů za vyřešení kteréhokoliv z nich. (Viz článek „Think and Grow Rich“ v časopise *What's Happening in the Mathematical Sciences*, Volume 5.) Sedm zmíněných problémů bylo vyhlášeno jako soutěžní problémy o cenu tisíciletí (Millenium Prize Problems). Během tří let se objevil první vážný kandidát na miliónovou prémii. Nyní se zdá pravděpodobné, že počet problémů tisíciletí se zmenší ze sedmi na šest ještě před koncem první dekády nového tisíciletí.

V listopadu 2002 a v březnu 2003 zveřejnil Grigorij Perelman ze Stěklovova ústavu v Moskvě dvě práce, které naznačily klíčové kroky pro vyřešení sto let starého topologického problému známého pod jménem Poincarého hypotéza. Obě práce v sobě spojovaly myšlenky ze dvou zcela odlišných disciplín a ponechávaly mnoho podrobností jako úkol pro čtenáře, proto je znalci považovali za hodně těžké čtivo. Avšak během tří let přísného posuzování nikdo z nich nenašel žádné mezery, které by vážněji ohrozily Perelmanovo tvrzení, že hypotézu skutečně dokázal. Několik expertů se obezřetně blíží ke konečnému verdiktu, že důkaz je úplný.

Barry Cipra: *First of Seven Millenium Problems Nears Completion.* In: D. Mackenzie, B. Cipra: What's happening in the Mathematical Sciences, Volume *6* (2006), str. 3–13.

 Přeložil a několika poznámkami opatřil Oldřich Kowalski.

Poznámka redakce: Barry A. Cipra je americký matematik a spisovatel žijící v Northfieldu v Minnesotě.

Stejně důležitý je fakt, že Perelman zavedl do diferenciální geometrie řadu nových technik, o nichž experti předpokládají, že způsobí v tomto oboru revoluci. Může se ukázat, že jsou dostatečné k důkazu dokonce obecnějšího výsledku, známého v topologii jako Thurstonova geometrizační hypotéza. Pro třírozměrnou topologii by to byl stejně fundamentální výsledek, jako byl objev periodické soustavy prvků pro chemii.

Historická procházka topologií

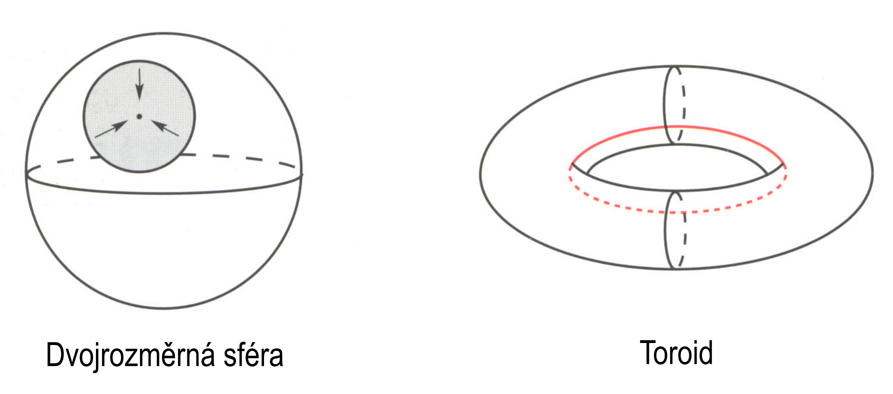
Co jsou tyto hypotézy a proč jsou tak důležité? Odpověď vyžaduje malý úvod.

V devatenáctém století se matematikové snažili vypořádat s globální matematickou teorií ploch. Objevili jednoduché schéma pro klasifikaci ploch s užitím jediného čísla, tak zvaného rodu plochy. Dvě plochy jsou topologicky identické – což znamená, že je možno topologicky deformovat jednu na druhou – když a jen když mají týž rod.

Nejjednodušší příklad plochy je samozřejmě plochá euklidovská rovina.

Avšak topologové dávají přednost plochám, které jsou uzavřené a omezené, tj. kompaktní, takže jejich zájem se přesunul na sféru, která může být také považována za rovinu rozšířenou o „bod v nekonečnu“. Sféra je rodu nula, tedy zhruba řečeno, nevytváří *svým tvarem v prostoru* žádný „otvor“. Poněkud přesněji řečeno to znamená, že každá uzavřená smyčka na povrchu sféry může být spojitě stažena do jediného bodu (viz obrázek 1 vlevo).

Rod je vždy nezáporné celé číslo a pro každou jeho volbu lze sestrojit příslušnou kompaktní plochu. Plocha rodu 1 má jediný otvor a vypadá v podstatě jako anuloid. Tato plocha se v topologii nazývá toroid. Protože je rodu 1, ne každá uzavřená křivka nakreslená na toroidu může být stažena do bodu – například smyčka, která obtáčí otvor toroidu tuto vlastnost nemá (viz obrázek 1 vpravo). Plochy vyššího rodu mají



Obrázek 1. Dvojrozměrná sféra je jednoduše souvislá, protože každá uzavřená smyčka na povrchu sféry může být spojitě stažena do jediného bodu. Na druhé straně toroid není jednoduše souvislý. Vyznačená smyčka na obrázku 1 dole je zachycena na šíji toroidu a nemůže se na něm zmenšit.

úměrně více otvorů, ale teorie je stále jednoduchá: jestliže dvě kompaktní (a orientace schopné, pozn. překl.) plochy mají stejný počet otvorů, jsou topologicky rovnocenné.

Matematická povaha kompaktních třírozměrných prostorů nebo také 3-variet, jak se jim stručně říká, je mnohem komplikovanější. Neexistuje zde jednoduché číslo, jako byl rod, které by odlišovalo jednu 3-varietu od jiné. Vědci místo toho vytvořili pro studium 3-variet celou zbrojnici technik.

Na počátku moderní teorie 3-variet stál kolem roku 1900 francouzský matematik Henri Poincaré. Ten vytvořil algebraickou teorii, ve které jsou uzavřeným křivkám v 3-varietě *přiřazeny* prvky jisté grupy, která se nazývá *fundamentální grupa* variety. To byl klíčový impuls pro vznik topologie jako životaschopného odvětví matematiky. Variety dimenze 3 jsou „měkké a poddajné“, těžko se zobrazují a je těžké si je představit. Na druhé straně algebra je stručná, přesná a je přístupná symbolické manipulaci. Pokud by každá varieta byla jednoznačně určena nějakou grupou, teorie variet by se drasticky zjednodušila.

Bohužel taková pěkná korespondence neexistuje. Je pravda, že pokud mají dvě variety rozdílné fundamentální grupy, pak jsou topologicky různé. Avšak obráceně to neplatí: dvě variety mohou mít stejnou fundamentální grupu, ale stále mohou být topologicky různé.

V článku publikovaném v roce 1904 Poincaré vyslovil hypotézu o tom, že existuje jedna výjimka, kdy lze tvrzení obrátit: jestliže je fundamentální grupa triviální, což nastane, když každou smyčku lze stáhnout do bodu, potom jediná 3-varieta s touto vlastností je třírozměrná sféra, stručně 3-sféra.

Třírozměrná sféra je třírozměrná analogie obyčejné dvojrozměrné sféry (někdy označované krátce jako 2-sféra). Stejně jako 2-sféra může být považována za euklidovskou rovinu rozšířenou o bod v nekonečnu, 3-sféra může být považována za euklidovský prostor rozšířený o bod v nekonečnu. Také může být popsána jako množina všech řešení rovnice $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$ ve čtyřrozměrném prostoru, podobně jako 2-sféra může být popsána ve třírozměrném prostoru jako množina všech řešení rovnice $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. (Obecně, n-sféra je popsána v euklidovském prostoru dimenze $n + 1$ rovnicí $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1$).

Ve skutečnosti Poincaré neformuloval svou hypotézu jako hypotézu, ale jako problém k řešení: je možné, aby 3-varieta měla triviální fundamentální grupu, aniž by byla identická s 3-sférou? (Technický termín „identická“ zde znamená „homeomorfní“, což je odvozeno z řeckého označení pro „stejný tvar“.) Rozdíl mezi hypotézou a otevřeným problémem je důležitý. Abyste mohli nějaký problém formulovat jako hypotézu, musíte podat odolné, ale ne nutně přesvědčivé svědectví o tom, že jde o pravdivé tvrzení. Poincarého opatrnost mohla být způsobena jeho vlastní hořkou zkušeností. O čtyři roky dříve formuloval, a to rovnou jako teorém, silnější tvrzení, které se ukázalo být chybným; ve svém článku z roku 1904 toto tvrzení odvolal a podal protipříklad. Ve své předchozí práci studoval Poincaré jinou a v jistém smyslu „méně silnou“ algebraickou strukturu spojenou s varietami, známou jako grupa homologií. Nesprávně tvrdil, že každá n-varieta, která má stejnou grupu homologií jako n-sféra, je homeomorfní s n-sférou. Jeho protipříklad z roku 1904 byla 3-varieta se stejnými grupami homologií jako 3-sféra, ale mající netriviální fundamentální grupu.

Poincaré byl jen prvním z mnoha lidí, kteří byli oklamáni nepolapitelnou 3-sférou. Ve dvacátém století byly provedeny četné pokusy dokázat Poincarého hypotézu a vydána řada prohlášení o jejím úspěšném vyřešení. Podobně jako velká Fermatova věta (viz „Fermats Theorem – At Last“, *Whats Happening in the Mathematical Sciences*, Volume 3) se tato hypotéza přidala ke krátkému seznamu nechvalně známých problémů – problémů zdánlivě snadných, které se však vysmívaly všem pokusům i zkušených matematiků o jejich řešení.

Když se matematikové začali více zajímat o vícerozměrné variety (které nemohou být zviditelněny v našem třírozměrném vesmíru, ale které jsou nicméně pro topologa stejně „reálné“), byli přirozeně zvědavi, zdali lze Poincarého hypotézu rozšířit také na tyto variety. Když má n-rozměrná kompaktní varieta triviální fundamentální grupu, musí to být nutně n-sféra?

Na první pohled se může zdát, že n-rozměrná verze Poincarého hypotézy musí být mnohem obtížnější než 3-rozměrná verze. Přece nemůžeme vůbec vidět, jak n-rozměrná varieta vypadá. Ale první velký průlom ve věci Poincarého hypotézy přišel v roce 1960, když Stephen Smale (Institute for Advanced Studies) a John Stallings z Oxfordské univerzity nezávisle na sobě dokázali, že hypotéza platí v dimenzi 5 a výše. Dvě desítky let poté, v roce 1982, Michael Friedman, působící nyní ve firmě Microsoft Research ve státě Washington, dokázal hypotézu pro $n = 4$. Díky hlubokým větám Smalea, Stallingse a Friedmana matematikové nyní věděli jak topologicky charakterizovat n-sféru ve všech případech, *s výjimkou* toho, na který se původně tázal Poincaré, tj. v dimensi $n = 3$.

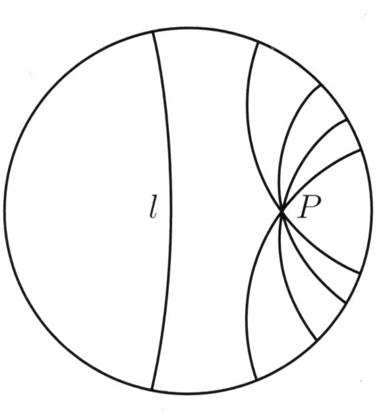
Bohužel vše nasvědčovalo tomu, že není žádná naděje, že by důkazy, které fungovaly ve vyšších dimenzích, mohly být použity i pro dimenzi tři. Zvláštní stupně volnosti, které jsou k dispozici ve vyšších dimenzích, občas dovolují použít postupy, které nefungují v nižších dimenzích. Například v dimenzi 4 a vyšší může být každá křivka zbavena uzlů. Ale jak všichni víme ze zkušenosti, v třírozměrném prostoru existují neodstranitelné uzly. Takže například důkaz Poincarého hypotézy, který využívá možnost rozvázání uzlů na křivkách, nemůže ve třech dimenzích platit. Velmi podobná překážka (ale týkající se dvojrozměrných „uzlů“) je hlavním důvodem, proč Smaleův a Stallingsův důkaz nefunguje v dimenzi menší než 5.

Život ve třech dimenzích

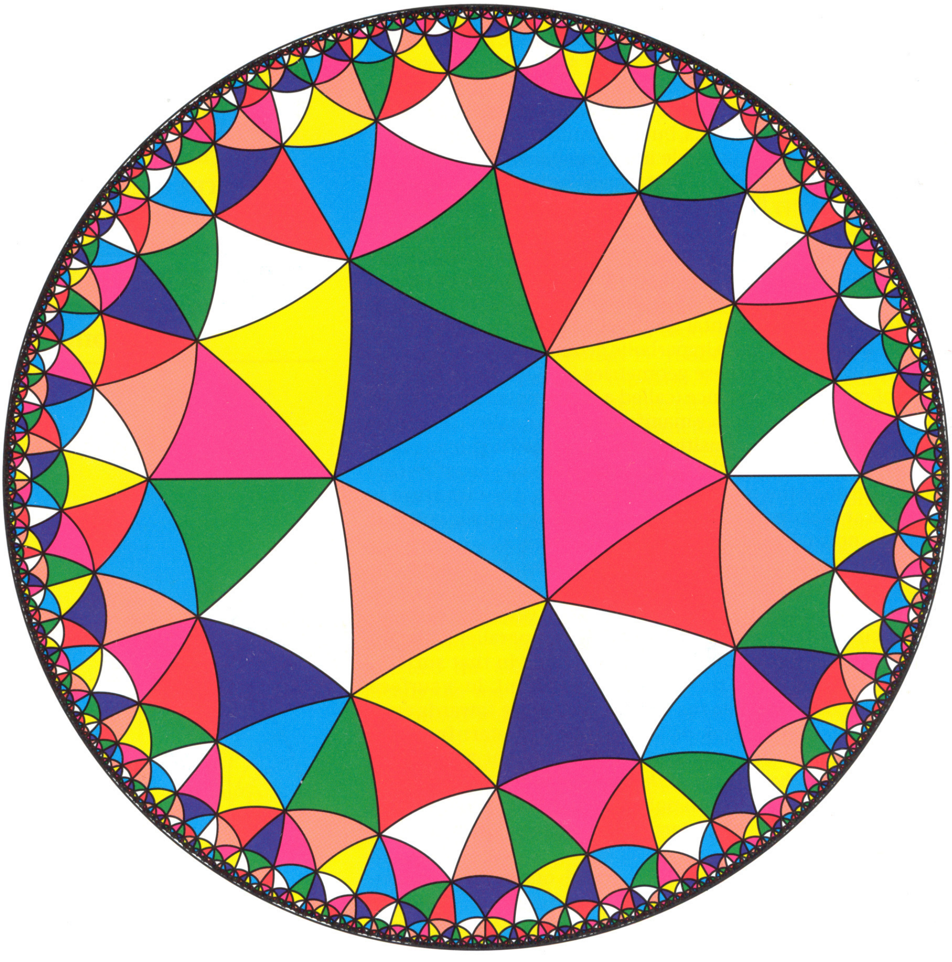
Třírozměrné variety mají „chuť a vůni“ velmi odlišnou od variet vícerozměrných. V 70tých letech si uvědomil William Thurston, v té době působící na Princetonské univerzitě, že rozhodující úlohu v topologii malých dimenzí hraje geometrie, a jeho geometrický přístup nyní ovládá celou disciplínu. Thurston předložil myšlenku, která se nyní nazývá geometrizační hypotéza. Velmi zhruba řečeno, geometrie je topologie opatřená pojmy vzdálenosti a úhlu; jestliže topologie je geometrie studovaná na „gumové fólii“, potom geometrie je „vykrystalizovaná“ topologie. Thurston se domníval, že každá 3-varieta může být rozložena na části takovým způsobem, že každé části bude přidružena geometrická struktura vybraná z osmi speciálních třírozměrných geometrií (viz obrázek 4 dále). Tyto geometrie jsou dobře známy. Například pouze jedna z nich má triviální fundamentální grupu, a to je 3-sféra.

Některé části Thurstonovy hypotézy jsou nesporné. Jednou z nich je potřebnost přesně osmi geometrií. Geometrická struktura v Thurstonově teorii je kompaktní třírozměrný prostor se speciálním způsobem měření úhlů a vzdáleností známým jako homogenní Riemannova metrika (pojmenovaná podle Bernharda Riemanna, matematika devatenáctého století, který inicioval abstraktní zkoumání variet). Slovo „homogenní“ znamená, že metrika je stejná ve všech bodech, podobně jako homogenizované mléko má všude stejnou konzistenci. „Přidružená geometrie“ odkazuje na jiný třírozměrný prostor, obvykle nekompaktní, se stejnou metrikou, ale s triviální fundamentální grupou. (Výraz „se stejnou metrikou“ je třeba chápat lokálně – pozn. překl.) V obecné teorii variet existuje ke každé varietě „univerzální nakrývající varieta“, která má triviální fundamentální grupu. Protože univerzální nakrývající varieta není většinou kompaktní, nemusí to být nutně sféra (ale může to být třeba i třírozměrný euklidovský prostor – pozn. překl.). Geometrická struktura pak vznikne jako faktorový prostor („kvocient“) příslušné přidružené geometrie vytvořený diskrétní grupou transformací, která je algebraicky totéž co fundamentální grupa dané geometrické struktury. Takže v Thurstonově programu poskytuje geometrie spojovací článek mezi topologií a algebrou.

Pojmu geometrizace je snadnější porozumět ve dvou dimenzích, kde se děje něco podobného. Pro plochy existují tři různé geometrie: standardní sféra, známá euklidovská rovina a méně známá neeuklidovská neboli „hyperbolická“ rovina. Sféra je svým vlastním univerzálním nakrytím; její grupa pohybů se skládá z rotací. Euklidovská rovina je geometrie toroidu: jelikož toroid si můžeme představit jako čtverec v rovině, jehož páry protějších stran jsou ztotožněny, můžeme jeho kopiemi „vydláždit“ rovinu. (Toroid s euklidovskou metrikou se dá také realizovat jako „anuloid“ ve čtyřrozměrném euklidovském prostoru, zatímco obyčejný anuloid v třírozměrném prostoru má zakřivenou metriku – pozn. překl.). Grupa pohybů roviny se skládá z translací a rotací.

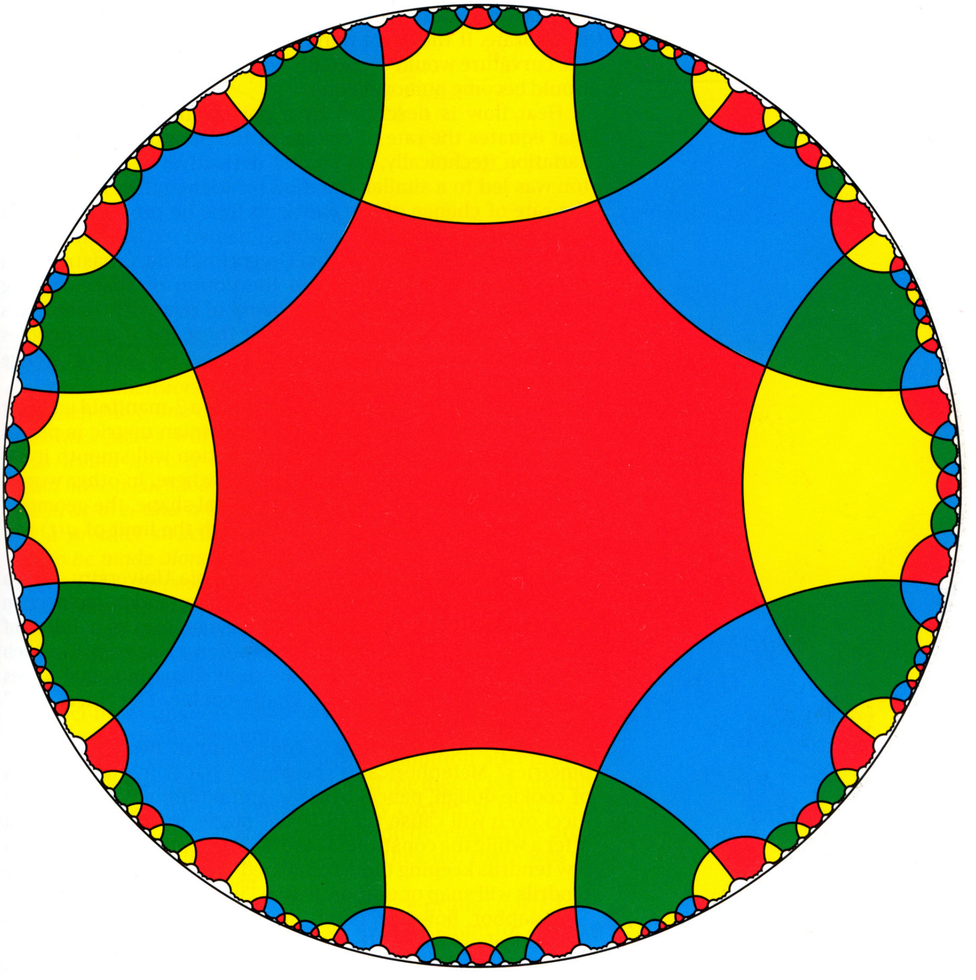


Obrázek 2. Na Poincarého kruhovém modelu hyperbolické geometrie je hyperbolická rovina reprezentována otevřeným kruhem v rovině a přímky jsou reprezentovány jako oblouky kružnic, které leží uvnitř kruhu a dotýkají se hranice kruhu pod pravými úhly. Je-li dána přímka l a bod P neležící na této přímce, pak existuje mnoho rovnoběžek k přímce l bodem P. Na obrázku jsou vyznačeny čtyři z nich. Tato vlastnost odlišuje hyperbolickou geometrii od euklidovské geometrie, kde existuje pouze jedna rovnoběžka k dané přímce jdoucí bodem neležícím na této přímce.



Obrázek 3a. Hyperbolická rovina má mnohem více různých vydláždění pomocí pravidelných mnohoúhelníků než euklidovská rovina. Obrázky 3a, 3b ukazují dvě z nich: vydláždění rovnostrannými trojúhelníky, při kterém má sedm trojúhelníků společný vrchol (3a), a vydláždění pomocí osmiúhelníků, při kterém čtyři osmiúhelníky mají společný vrchol (3b). Takové mozaiky nejsou v euklidovské geometrii možné, protože součet velikostí úhlů při každém vrcholu mozaiky by byl větší než 2π. (Obrázky laskavě poskytl Douglas Dunham.)

Každá jiná plocha – rodu dva a vyššího – je přidružená k hyperbolické rovině. Hyperbolická rovina má jednoduchý model: je jím otevřený kruh v rovině. Ale na rozdíl od euklidovských přímek v rovině jsou hyperbolické „přímky“ definovány jako oblouky kružnic, které leží uvnitř kruhu a dotýkají se hranice kruhu pod pravými úhly. Snadno vidíme, co činí hyperbolickou rovinu neeuklidovskou: je-li dána „přímka“ a bod neležící na této „přímce“, pak existuje nekonečně mnoho „přímek“ jdoucích tímto bodem, které neprotínají danou „přímku“, a lze je tedy pokládat za „rovnoběžné“ s danou „přímkou“ (viz obrázek 2).



Obrázek 3b.

Grupa pohybů hyperbolické roviny se také skládá z translací a rotací, ale dovoluje taková „vydláždění" hyperbolické roviny, která neexistují v euklidovské rovině (viz obrázek 3). To je to, co dovoluje použít hyperbolickou rovinu jako geometrii pro plochy vyššího rodu. Například hyperbolická rovina může být vydlážděna pravoúhlými osmiúhelníky. (V euklidovské geometrii není takové vydláždění možné, protože tam neexistují pravoúhlé osmiúhelníky.) Každý pohyb hyperbolické roviny, který zachovává takové vydláždění, odpovídá některému prvku fundamentální grupy „preclíku" se dvěma otvory. Odtud vidíme, že „preclík" se dvěma otvory je opatřen hyperbolickou geometrií.

Křivost obyčejné sféry a euklidovské roviny je snadné pochopit. Pro hyperbolickou rovinu to není tak jasné. Křivost v podstatě vyjadřuje to, co se děje s vzájemně blízkými oblouky křivek, v jejichž počátečních bodech jsou tečny vzájemně rovnoběžné a křivky pak pokračují tak, aby zachovávaly co „nejpřímější směr“, ale stále zůstávaly na ploše. (Jde tedy o geodetiky – pozn. překl.). V euklidovské geometrii dostaneme rovnoběžné přímky, které si udržují stále stejný odstup. Na ploše s kladnou křivostí, jako je sféra, mají křivky tendenci se sbíhat. (Představme si například dvě křivky, které mají počáteční body na rovníku a míří k jihu, přičemž udržují ten nejpřímější směr, jaký je na sféře možný. Takové dvě křivky se vždy protnou v jižním pólu.). Na druhé straně, v hyperbolické geometrii se dvě křivky, které mají v počátečním okamžiku rovnoběžné tečny, v průběhu času stále více rozbíhají.

Abychom to shrnuli, každá plocha (kompaktní a orientace schopná – pozn. překl.) je přidružena k jedné ze tří geometrií. Sféra (která má rod 0) je přidružena sama sobě. Toroid (rodu 1) má plochou geometrii euklidovského prostoru. A plochy vyššího rodu připouštějí hyperbolickou geometrii. Thurstonova geometrizační hypotéza pak vlastně říká, že hodně podobná situace nastane pro 3-variety, pouze místo tří geometrií je jich zde osm. A občas se stává, že varieta musí být nejprve rozřezána na části, a teprve každé z těchto částí může být přidružena některá s osmi geometrií.

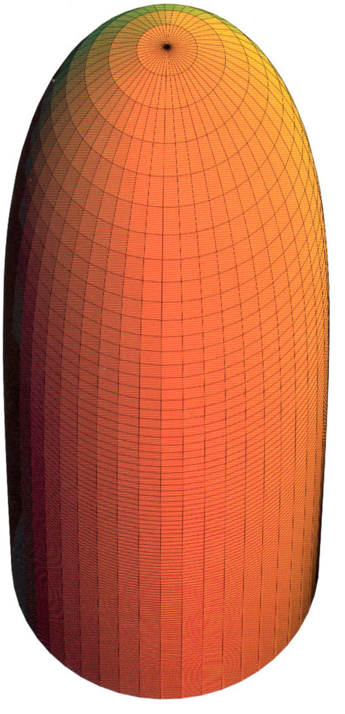
Tři z osmi základních geometrií ve třech dimenzích jsou pouhé analogie základních dvojrozměrných geometrií. Sférická geometrie je prostě geometrie 3-sféry. Euklidovská geometrie je to, co si myslíte. A hyperbolická geometrie je třírozměrná verze hyperbolické roviny, jejíž model je otevřená koule, tak jako modelem hyperbolické roviny byl otevřený kruh. Další dvě geometrie jsou direktní součiny přímky se sférou, resp. hyperbolickou rovinou. Tyto geometrie jsou rovné v jednom směru a zakřivené v ostatních dvou směrech (k němu kolmých – pozn. překl.) Poslední tři geometrie, které se nazývají Solv, Nil a SL(2, R), jsou speciální. Objevují se spíše zřídka, ale v zájmu úplnosti je musíme vzít do úvahy. (Také bychom nevynechali číslo 2 ze seznamu prvočísel pouze proto, že sudá prvočísla se vyskytují tak zřídka.)

Geometrizace je účinný pojem, protože díky struktuře vnucené homogenní Riemannovou metrikou se stane mnoho topologických vlastností daleko přístupnějšími. Například jediná geometrie, která připouští konečnou fundamentální grupu, je sférická geometrie (myslí se tím varieta, která vznikne jako faktorový prostor z 3-sféry a na níž je dána Riemannova metrika s konstantní kladnou křivostí – pozn. překl.) a jediná geometrie, která má triviální fundamentální grupu, je samotná 3-sféra. Jinými slovy, Poincarého hypotéza je „snadným“ důsledkem Thurstonovy geometrizační hypotézy.

Thurston a další matematici dokázali podstatné části geometrizační hypotézy. Například Thurston ukázal, že velká třída 3-variet, známých jako Hakenovy variety (a pojmenovaných po Wolfgangu Hakenovi, který je dobře znám, společně s Kenem Appelem, svým famózním vyřešením problému čtyř barev) má vesměs geometrii hyperbolického prostoru. (V jistém smyslu je „většina“ 3-variet hyperbolického typu.)

Nechme se unášet (Ricciho) prouděním

Počátkem 80tých let navrhl Richard Hamilton, který tehdy působil na Kalifornské univerzitě v San Diegu, způsob, jak dokázat Thurstonovu geometrizační hypotézu s využitím pojmu, který se nyní nazývá Ricciho proudění. Každá varieta (jakékoliv



„Doutník“. Toto je řešení rovnice Ricciho proudění, které je stacionární, a tedy nikde nevytvoří úzký „stonek“, který by se dal ulomit pomocí „topologické chirurgie“. Jeden z prvních klíčových kroků Perelmanova důkazu bylo dokázat, že „doutník“ není limitní polohou žádného Ricciho proudění na třírozměrných varietách. (Obrázek vytvořil Michael Trott pomocí programu Mathematica.)

dimenze) může být opatřena nějakou Riemannovou metrikou. Tato metrika ale nemusí být homogenní. Hamiltonova myšlenka spočívala v tom, že si varieta „najde svou vlastní cestu“ k homogenní metrice, tím, že umožníme, aby se metrika vyvíjela způsobem, který velmi připomíná proudění tepla. Jestliže teplo proudí místností bez překážky, bez zdrojů nebo tepelných jímek, teplota se nakonec ustálí na konstantní úrovni. Jestliže něco podobného uděláme s Riemannovou metrikou na varietě, křivost se také nakonec ustálí na konstantní úrovni – a varieta se stane homogenní.

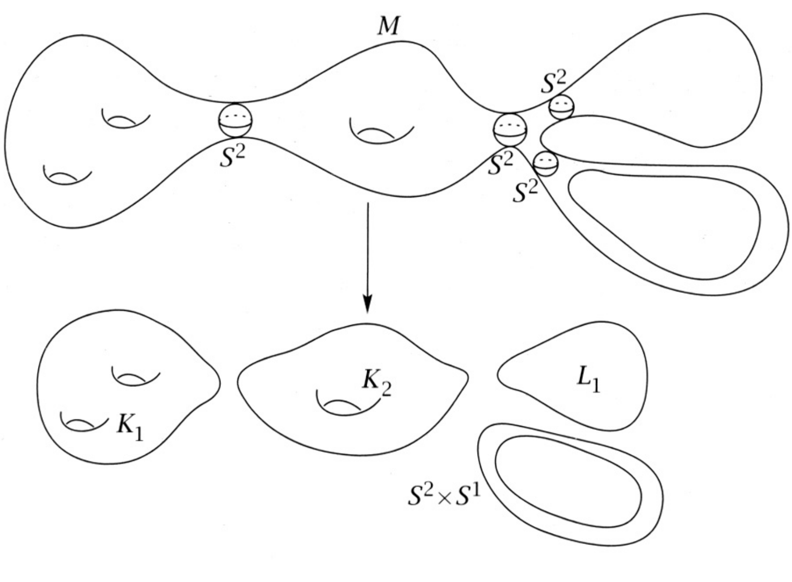
Proudění tepla je popsáno parciální diferenciální rovnicí, která klade rovnítko mezi mírou změny teploty v čase a její variací v prostoru (což je z technického hlediska druhá derivace). Hamilton se dostal k podobné rovnici pro Riemannovy metriky: nechť míra změny metriky v čase je proporcionální veličině, která se nazývá Ricciho křivost (na počest italského matematika devatenáctého století Gregoria Ricciho-Curbastra). Ricciho křivost je těsně svázána s pojmem zakřivení prostoru v Einsteinově obecné teorii relativity. Rovnice pro Hamiltonovo–Ricciho proudění má velmi jednoduchý tvar: jestliže $g = g(t)$ označuje Riemannovu metriku měnící se v čase t, pak příslušná rovnice zní $\partial g/\partial t = -2R(g)$, kde $R(g)$ je Ricciho křivost metriky g.

Hamiltonova myšlenka spočívá krátce řečeno v tom, že pokud nějaká 3-varieta je skutečně geometrická, pak nezáleží na tom, která Riemannova metrika na ní byla zvolena jako počáteční, protože rovnice Ricciho proudění ji vždy tak uhladí, že křivost bude všude stejná. Jinými slovy, počínaje beztvarou topologickou podobou, geometrie 3-variety se sama odhalí jako limita metriky $g(t)$ při t jdoucím k nekonečnu.

John Morgan, topolog z Kolumbijské Univerzity, užívá pro popis Ricciho proudění (a jeho souvislost s rovnicí vedení tepla) metaforu pečení: Představte si naši varietu jako hroudu těsta na koláče a rovnici Ricciho proudění jako pec. Hrouda, která se vloží do pece, nemá žádný zvláštní tvar, ale to, co pak vytáhneme ven z pece, bude krásně zakulacený a křupavý koláč. „Ricciho pec“ za nás udělá všechnu práci.

Co se stane, když je varieta složeninou dvou různých geometrií? Obrazně řečeno, co když je to slepenina těsta na koláče, na palačinky a na vdolky? V ideálním případě přiměje Ricciho pec různé kousky těsta, aby se oddělily, a za chvíli se dají rozdílné druhy pečiva snadno rozeznat, a pohromadě je bude držet pouze několik tenkých stonků – a i ty se nakonec ulomí nebo vypaří (viz obrázek 5).

Metafora ovšem není důkaz. Hamiltonova myšlenka narážela na teoretické překážky. Hlavní potíže se objevily v důsledku vlastností tenkých stonků – matematicky jim říkáme singularity –, které vznikají, když se jednotlivé části variety snaží od sebe oddělit. Zdálo se, že nic nemůže zabránit tomu, aby se hustá spleť singularit nevyvíjela takovým směrem, že metaforická varieta se stane pouze stonkem a nezbude žádné pečivo. Nebylo také jasné, jaký druh singularit se vlastně může objevit. Hamilton



Obrázek 4. Thurstonova geometrizační hypotéza předpokládala, že každá třírozměrná varieta může být rozdělena na části, z nichž každá připouští jednu z osmi geometrických struktur. Tento obrázek ukazuje části se čtyřmi různými strukturami: „toroid“ se dvěma otvory bude mít hyperbolickou strukturu, obyčejný toroid s jedním otvorem euklidovskou strukturu, sféra bude mít sférickou strukturu a Seifertova fibrovaná varieta, jako je $S^2 \times S^1$, má strukturu direktního součinu. Hypotéza umožňuje vést některé řezy podél toroidů (což není na obrázku zachyceno) spíše než podél sfér. Pro ilustraci jsou kousky variet nakresleny jako dvojrozměrné plochy, ale ve skutečnosti mají být třírozměrné. (Přetištěno z článku „Geometrization of 3-Manifolds via the Ricci flow“, Michaela Andersona, AMS Notices, únor 2004, obrázek 1, strana 185.)

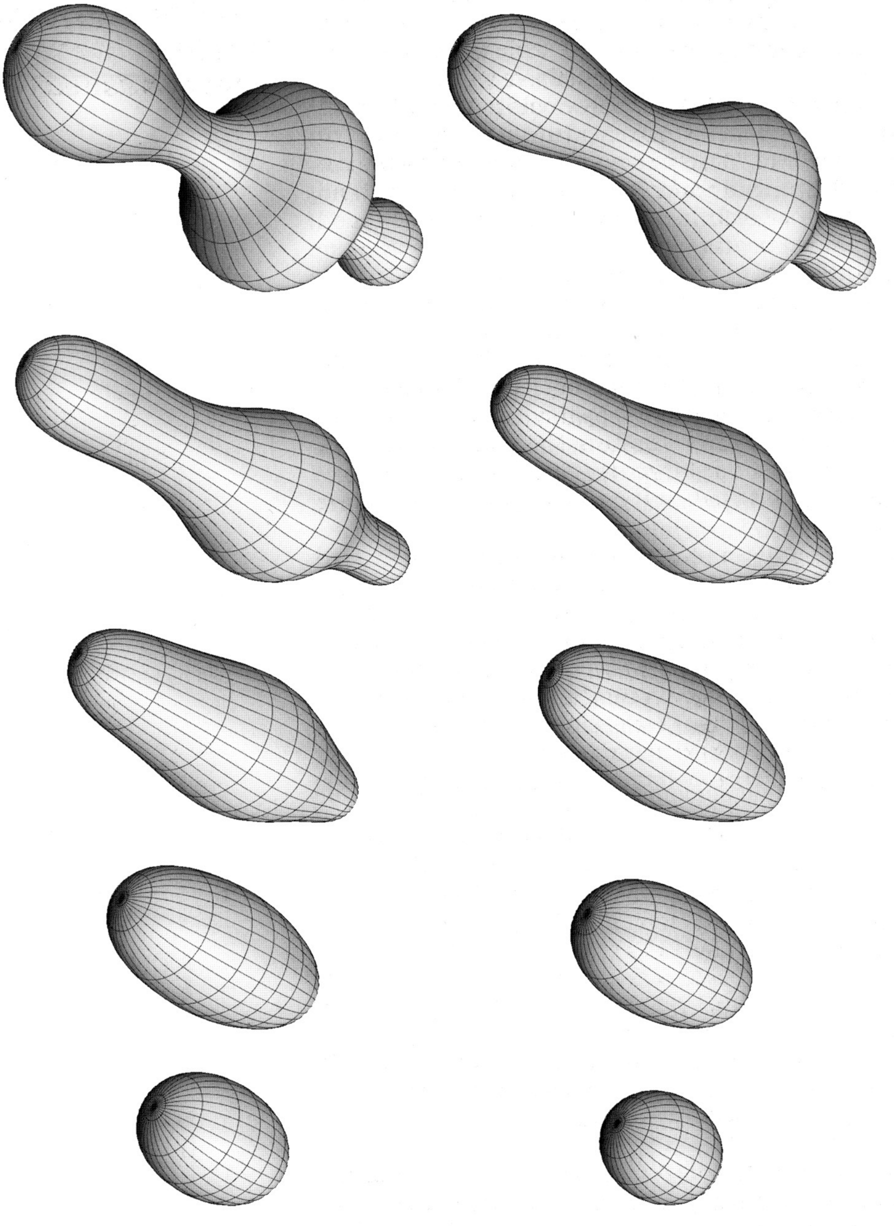
a další matematici pracující s Ricciho prouděním nebyli zejména schopni vyloučit typ singularity, kterou nazývali „doutník“ (viz obrázek „Doutník“). Doutník, rovněž nazývaný Wittenovou černou dírou, je rotačně symetrické řešení rovnice Ricciho proudění pro (nekompaktní) euklidovskou rovinu. V podstatě je to singularita, která zůstává naprosto v pohodě, když se po libovolnou dobu „peče“ v Ricciho peci. To by znemožnilo naději na „odlomení“ nebo „vypaření“ všech singularit.

Singularity se nemusí nutně objevit. Hamilton ukázal, že Ricciho pec funguje dokonale pro variety s kladnou křivostí. Dokonce v případě, že některé jejich části jsou více zakřivené než jiné, rovnice Ricciho proudění vše uhladí tak, že křivost na celé varietě se asymptoticky blíží konstantě. To dokazuje, že všechny takové variety jsou geometrické. Hamilton také dokázal, že k objevení se singularit je třeba určitého času: pokud má varieta na počátku hladkou křivost, potom si udržuje hladkou křivost přinejmenším po určitou dobu. Ale bylo zřejmé, že singularity se nutně vytvoří v přítomnosti negativní křivosti – a jakmile se jednou objeví, nedá se vůbec předvídat, co bude dál.

Perelman toto vše změnil. Ve dvou elektronických preprintech vystavených online předložil ruský matematik program pro vhodné zacházení se singularitami, které se objeví při Ricciho proudění. V prvním článku analyzoval vlastnosti singularit a ukázal, že (například) doutník se vůbec neobjeví. Podle Morgana zjistili experti velmi rychle, že tato část Perelmanova důkazu je správná, a to jim dalo motivaci, aby se pustili do mnohem obtížnějších částí, které následovaly. Jednou z klíčových součástí analýzy je pojem entropie pro metriky. V termodynamice je entropie měřítkem neuspořádanosti a roste spolu s časem. Perelmanova entropie metriky má podobný sklon k růstu, což je právě ta vlastnost, která dokáže udržet singularity pod kontrolou.

Perelmanův druhý článek podrobně ukazuje, jak zacházet se singularitami, když se objeví. Základní myšlenka je, že se odříznou části variety, které jsou okolími vyvíjejících se singularit, na otvory se nalepí hladké kousky, které se zkonstruují „ručně“, a pak se nechá Ricciho proudění dále působit na modifikované varietě. Problém je, že odřezávání (kterému topologové říkají chirurgie, protože ve skutečnosti nestačí jen řezat – musíte také ránu zašít!) může způsobit, že se objeví ještě více singularit, takže by se muselo zpracovávat nekonečně mnoho kousků v konečném časovém úseku. Perelman překonal tuto potíž jiným argumentem, připomínajícím myšlenku entropie. Ukázal, že chirurgie může být vždy provedena takovým způsobem, že objem variety se sníží o nějaké množství, řekněme $\varepsilon(T)$. Současně však Ricciho pec způsobuje zvětšování objemu, podobně jako šiška chleba roste ve skutečné peci. Ale kdyby bylo provedeno nekonečně mnoho „chirurgických operací“ v konečném čase, pak bychom postupně odečetli od variety nekonečný objem – a růst objemu při Ricciho proudění by tuto ztrátu nemohl vyrovnat. Odtud pak vyplývá, že v konečném čase se objevuje nutnost jen konečně mnoha chirurgických operací. Tedy proces Ricciho proudění doprovázený chirurgickými zákroky může pokračovat neomezeně v čase a získá se tím dostatečný čas na to, aby se varieta rozdělila na části s rozdílnými homogenními geometriemi.

Perelmanovo dílo připravilo jeviště pro důkaz Thurstonovy geometrizační hypotézy. Na konci druhého článku autor naznačil, jak probíhá argumentace, a slíbil dodat detaily v třetím článku. Tento článek stále čeká na zveřejnění. V červenci 2003 však Perelman vystavil velmi krátký článek, který podává samostatný důkaz Poincarého hy-



Obrázek 5. Ricciho proudění na dvojrozměrných varietách má tendenci homogenizovat křivost, takže se tyto variety blíží ke sféře, toroidu nebo toroidu s více otvory. Obrázek ukazuje, jak se počáteční hrbolatá plocha vyhlazuje do tvaru sféry. Ricciho proudění ve třech dimenzích má týž sklon k uhlazování křivosti, to je však velmi komplikováno skutečností, že se vytvářejí a pak uštipují singularity, jako jsou tenké „šíje“ nebo „růžky“. (Obrázek laskavě poskytli J. Hyam Rubinstein z univerzity v Melbourne a Robert Sinclair z Ústavu vědy a techniky na Okinawě.)

potézy založený na výsledcích prvních dvou článků. Zhruba v téže době podali Tobias Colding z Courantova ústavu matematických věd a William Minicozzi II z univerzity Johna Hopkinse jiný důkaz, rovněž založený na prvních dvou Perelmanových článcích a vedoucí ke stejnému výsledku.

Jednoduchost obou důkazů dodala vědcům důvěru, že přinejmenším Poincarého hypotéza jim byla celou dobu na dosah – za předpokladu, že v Perelmanových hlavních článcích nejsou žádné mezery. Mohlo by se zdát, že pro recenzenty to byla jednoduchá záležitost, ale Perelmanova práce zaměstnávala experty po více než tři roky. Argumenty jsou extrémně technicky náročné a v důkazu je také množství nových myšlenek. Tři oddělené skupiny matematiků vytvořily tlustopisy, vysvětlující Perelmanův důkaz. Jedna skupinka, Bruce Kleiner a John Lott z Michiganské univerzity, zveřejňovala svou práci na Internetu postupně, tak jak se jim dařilo dosáhnout pokroku. Druhá skupinka, Huai-Dong Cao z Lehigh University a Xi-Ping Zhu z university v Zhongshanu v Číně, publikovala svůj článek v červnu 2006 v časopise Asian Journal of Mathematics. (V tomto téměř 500-stránkovém článku autoři již v názvu oznamují, že podali nejen důkaz Poincarého hypotézy, ale i úplný důkaz Geometrizační hypotézy a to na základě Perelmanovy práce! – pozn. překl.) Třetí skupinka, John Morgan a Gang Tian z MIT, plánuje vydat svůj rukopis jako knihu. Morgan říká, že už je přesvědčen, ale to neznamená, že celý příběh skončil. „Experti jsou velmi optimističtí, ale obezřetní. Kdyby šlo o obyčejný matematický problém, byli bychom spokojeni už před dvěma lety. My jsme však pokračovali (ve zpochybňování) pouze proto, že je to Poincarého hypotéza, a má tak dlouhou historii omylů, kterých se dopustili i velmi dobří matematikové.“

Aby se řešení Poincarého hypotézy kvalifikovalo pro udělení ceny tisíciletí, musí být publikováno v recenzovaném časopise „nebo v jiné podobné formě, jakou Science Advisory Board (Clayova Matematického ústavu) prohlásí za kvalifikovanou“ a po svém publikování musí projít dvěma lety dalšího pečlivého ověřování. Sám Perelman byl od zveřejnění svých preprintů nápadně zticha a nikdy své výsledky nenabídl žádnému časopisu. Nicméně James Carlson, prezident Clayova Matematického ústavu, potvrdil, že tři vysvětlující stati o Perelmanově díle splňují podmínky publikace, a dvouleté hodiny již tedy „tikají“. Zdá se tedy pravděpodobné, že první velký průlom matematiků v třetím tisíciletí bude připraven vejít do historie někdy v letech 2008 nebo 2009.

Poděkování. Překladatel děkuje vážené kolegyni Nadě Stehlíkové za pečlivou kontrolu překladu a četné podnětné připomínky vedoucí ke zlepšení stylu. Práce na tomto překladu byla podpořena výzkumným záměrem MSM 0021620839 Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy ČR.