Luboš Pick

Hrášek a sluníčko. O matematickém paradoxu Stefana Banacha a Alfreda Tarského

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 55 (2010), No. 3, 191--214

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/141961`

Hrášek a sluníčko

O matematickém paradoxu Stefana Banacha a Alfreda Tarského

Luboš Pick, Praha

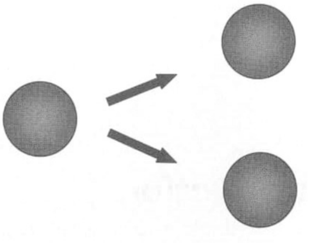
Milý Bože, kdyby mi zbývala už jen jediná hodina života, dej, ať ji mohu strávit na přednášce z teorie míry a integrálu. Pak mi bude tato hodina připadat jako věčnost.

neznámý student

Nuda (nejen v Brně)

Čas se zastavil a já jsem pomalu usínal.

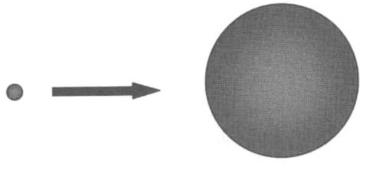
V roce 1971 jsem seděl na přednášce z teorie míry a integrálu na UCLA. Byla to pekelná nuda. Studoval jsem sice matematiku, ale zrovna tahle přednáška mi nijak zvlášť k srdci nepřirostla. Byla však v mém studijním plánu povinná. Zoufale jsem zíral na hodiny a vůbec jsem netušil, že mě za chvilku čeká šokující objev.



Profesor pomalu končil hodinu a na tabuli načrtl trojrozměrnou kouli. Z právě dokázaného výsledku plyne, pravil, že tuto kouli lze rozložit na pět částí, které se pak poskládají jinak, čímž vzniknou koule dvě, a každá z nich bude mít stejný objem jako ta původní.

To bude nějaký kouzelnický trik, napadlo mě hned, jako když se do krabice zavře jedna holubička a vyletí dvě. Nebylo mi jasné, kam profesor míří, protože jsem předtím nedával pozor.

Profesor pokračoval. „Dostali jsme Banachovu–Tarského větu, zvanou někdy též Banachův–Tarského paradox. Její ekvivalentní formulace praví, že těleso libovolného objemu i tvaru, řekněme hrášek, lze v eukleidovském prostoru rozdělit na konečně mnoho kousků a z nich pak poskládat jiné těleso, opět libovolného objemu i tvaru, řekněme například Slunce. Proto se tomuto výsledku Stefana Banacha a Alfreda Tarského někdy říká *paradox Slunce a hrášku.*“



Vrtalo mi to hlavou a nedávalo to smysl. Copak se dá opravdu z komára udělat velbloud? Napadlo mě, jestli třeba není prvního dubna, ale nebylo. Měl to snad být žert? A pokud ano, kde je pointa? Nechtělo se mi ztrapnit se hloupou otázkou, tak jsem se raději rozhlédl po třídě, jak jsou na tom ostatní.

Prof. RNDr. Luboš Pick, CSc., DSc., katedra matematické analýzy MFF UK Praha, Sokolovská 83, 186 75 Praha 8, pick@karlin.mff.cuni.cz

Student po mé pravici se přihlásil. „To celé je nějaký nesmysl ne? Nechcete, doufám, tvrdit, že je možné rozřezat jablko na pět kusů a z nich pak složit dvě identická jablka? Nemůžeme přece vytvořit hmotu z ničeho, nebo snad ano?“

Přestal jsem sledovat hodiny a visel jsem očima na profesorovi. Čekal jsem nějakou legrační pointu na závěr hodiny a nebo vysvětlení, že někde v důkazu je chyba a věta neplatí. Mýlil jsem se.

„Jde o příklad výsledků, ke kterým se lze dostat při práci s neměřitelnými množinami a s axiomem výběru. Důkaz je v pořádku a věta platí.“

Výše uvedenými slovy popsal své první setkání s pozoruhodnou větou Banacha a Tarského Leonard Wapner (viz [12]).

1. Banachův–Tarského paradox

Když znáš míru, můžeš smát se, a když ne, tak uvidíš!
Jan Vančura

1.1. Rozličné formulace Banachovy–Tarského věty

Výsledek, jemuž je věnován tento článek, lze lidově zformulovat následujícím způsobem: kouli libovolného poloměru je možno rozložit na sjednocení konečně mnoha částí a tyto části potom znovu složit tak, aby vznikly koule dvě, obě identické s koulí původní.

Jestliže bychom se chtěli pokusit o větší matematickou přesnost, pak bychom mohli větu vyslovit například takto: jednotkovou kouli

$$B = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1\}$$

lze rozložit na dvě množiny B_1 a B_2 takové, že $B_1 \sim B$ a $B_2 \sim B$, kde symbolem $\sim$ označujeme kongruenci po částech (tento pojem vysvětlíme později).

Obecným důsledkem je, že každé dvě množiny v $\mathbb{R}^3$ s neprázdnými vnitřky jsou po částech kongruentní.

1.2. Historie paradoxu

V předmluvě ke knize [11] píše Jan Mycielski: „Jsem přesvědčen, že jde o nejpřekvapivější výsledek teoretické matematiky.“

Věta byla publikována v roce 1924 v článku [1] a z pochopitelných důvodů okamžitě vyvolala smršť velmi nevybíravé polemiky. Jak si mohou matematikové dovolit tvrdit věci, které tak očividně odporují selskému rozumu? Postupně se výsledek rozšiřoval mezi laickou veřejnost a kontroverzní polemika nabírala na síle. Ve státě Illinois byl popsán případ, kdy jakýsi počestný občan vehementně požadoval okamžité přijetí razantního zákona, který by výuku takových nesmyslů pod přísným trestem jednou provždy zakázal. Nakonec se vytvořily dva tábory – jedni obdivovali krásu výsledku, který byl v tak příkrém rozporu s obecnou intuicí, a druzí jej zavrhovali jako totální hloupost.

Zvláštní je, že ačkoli byla vedena velmi hluboká učená debata na stránkách akademických časopisů, jen velmi málo bylo napsáno pro laickou obec. Když se proberete nějakou knihovnou nebo internetem, zjistíte, že téměř ke všem dostupným informacím je potřeba mít vystudován alespoň nějaký matematický obor na vysoké škole, nejlépe abstraktní teorii míry a obecnou teorii množin. Tím se procento populace, které může tyto informace pochopit, snižuje na zanedbatelný zlomek, díky čemuž stále ještě panuje značné obecné neporozumění podstaty zmíněné věty. Dokonce i studenti matematicky orientovaných vysokých škol se občas ptají: „Je pravda, že prý matematici dokázali nějakou větu, podle které bychom mohli sestrojit zařízení, jež by dovedlo zdvojnásobit hmotu?"

Věta zaujala řadu autorů i u nás (viz například [6]), články na toto téma se objevily dříve i v PMFA (viz [8]). Zde se pokusíme podstatu Banachovy–Tarského věty vysvětlit na co nejelementárnější úrovni a zpřístupnit ji tak širší veřejnosti se zájmem o matematiku a fyziku. Postupujeme volně podle knihy [12].

2. Čtyři klíčové etapy

Každý dobrý křesťan by se měl mít na pozoru před matematiky,
kteří již po staletí pomáhají ďáblu zatemnit lidem ducha.

Svatý Augustin

Správnému chápání významných matematických poznatků často napomáhá, jsou-li vnímány ve správném historickém kontextu. Matematika málokdy vzniká ve vakuu. Stejně tak i v případě nádherné věty Banacha a Tarského je třeba připomenout nejméně tři další velká jména, a to Georga Cantora, Kurta Gödela a Paula Cohena. Čtyři klíčové stupínky vedoucí ke správnému pochopení výsledku jsou:

1. teorie množin a transfinitní aritmetika předložené Georgem Cantorem v poslední čtvrtině devatenáctého století,
2. publikování Banachovy–Tarského věty (1924),
3. důkaz Kurta Gödela konzistence axiomu výběru s ostatními axiomy teorie množin (1940),
4. důkaz Paula Cohena nezávislosti axiomu výběru na ostatních axiomech teorie množin (1963).

Položme si nejprve klasickou otázku: je matematika tvořena nebo pouze objevována? Co vlastně Stefan Banach a Alfred Tarski udělali, objevili svůj paradox, který na ně čekal kdesi v hlubinách matematiky, nebo jej sami vytvořili? Obdobně se můžeme ptát například na práci fotografa. Karel Plicka proslul svými černobílými fotografiemi Prahy. Zaznamenával nebo tvořil? Město přeci ve skutečnosti není černobílé, využití efektu světla a stínů můžeme tedy chápat jako tvůrčí práci, k níž je třeba odpovídajícího vybavení. Dá se tedy říci, že Karel Plicka tuto krásu vytvořil, nebo jen zachytil ve správný okamžik a správnou technikou? A co třeba taková druhá věta sedmé Beethovenovy symfonie? Stupnice má jen dvanáct tónů, žádný tón ve větě není kratší, než, řekněme, jedna dvaatřicetinka, a věta nemá více než šest minut. Rozsah skladby určitě není větší než pět oktáv. Počet všech možných kombinací tónů, které se vejdou do takového hudebního útvaru, je tedy konečný. Stačilo by je všechny prolistovat a najít mezi nimi tu správnou. Beethoven svou skladbu tedy vůbec nemusel vytvořit, mohl ji prostě jen objevit na seznamu. V podobném duchu hovoří notoricky známý bonmot, že socha v kameni už je, sochaři stačí jen osekat nepotřebný materiál.

Pokud jde o matematiku, existují nejméně dvě názorové školy. Takzvaní platonisté (neboli matematičtí realisté) zastávají názor, že všechna matematická tvrzení existují *tam někde* nezávisle na lidské mysli. Věty, důkazy, konstrukce, metody a řešení dosud otevřených problémů čekají, až budou objeveny, podobně jako drahokam čeká na svého mineraloga. Podle platonistů všechny matematické objekty existují odjakživa, minimálně v teoretickém smyslu. Jejich nalezení nevyžaduje o nic více kreativity než vydolování diamantu. Podle tohoto dělení byli nejspíše Georg Cantor a Kurt Gödel platonisty. Převládá názor, že většina současných matematiků jsou platonisté, ale málokterý z nich by to otevřeně přiznal.

Druhý názorový proud představují takzvaní *formalisté*. Ti tvrdí, že matematika je pouhým jazykem sestávajícím ze symbolů a pravidel manipulace s nimi. Jsou-li dodržována pravidla, mohou být vytvářeny věty, důkazy, konstrukce a podobně, a všechno jsou to produkty lidské mysli. Nelze však aplikovat tyto věty na reálný fyzický svět.

Existuje ještě nejméně jedna zajímavá názorová skupina, kterou tvoří takzvaní *konstruktivisté*. Ti uznávají jen ty matematické objekty, které lze zkonstruovat konečným způsobem. Konstruktivisté nemají v lásce existenční věty, které pouze dokazují existenci nějakého objektu, ale nedávají jeho konstruktivní popis.

A co vy, vážení čtenáři, jste platonisté? Schválně si přečtěte následující dva odstavce, a uvidíme.

Číslo π je definováno jako poměr obvodu kružnice ku jejímu průměru. Je známo, že je to iracionální číslo, a je dokonce i známo, že je to transcendentní číslo. Nelze je tedy vypočítat přesně. Je ho však možno vyjádřit ve tvaru nekonečné sumy, například

$$\pi = \frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \cdots,$$

takže je teoreticky můžeme spočítat až na libovolně velký počet desetinných míst. Přesto zůstávají některé otázky, týkající se tohoto čísla, nezodpovězeny. Vyskytují se v desetinném rozvoji čísla π všechny číslice nekonečněkrát? A se stejnou frekvencí? Obsahuje desetinný rozvoj nějaká číselná schémata, která se stále opakují? Takových otázek si lze vymyslet libovolné množství (další informace může čtenář nalézt například v článku [9]).

Brněnský rodák Kurt Gödel dokázal v roce 1931 existenci takzvaných *nerozhodnutelných tvrzení*. To jsou otázky, které nikdy nemohou být zodpovězeny. Představme si na okamžik, že následující otázka je nerozhodnutelná: „Obsahuje či neobsahuje v našem axiomatickém systému desetinný rozvoj čísla π nekonečně mnoho nul?“

Věříte, vážení čtenáři, že ano? Nebo se domníváte, že nikoli? Jestliže jste přesvědčeni, že odpověď existuje a zní buď ano, nebo ne, pak jste platonisté. Platonisté věří, že desetinný rozvoj čísla π někde existuje nezávisle na nás, je jednoznačně dán, a buď obsahuje nebo neobsahuje nekonečně mnoho nul, a to bez ohledu na to, zda my máme či nemáme prostředky se k této odpovědi dostat. Formalisté a konstruktivisté odmítnou otázku jako nesmyslnou a smíří se s tím, že náš axiomatický systém nám odpověď prostě nedopřeje. Filosofickou obdobou této disputace je otázka: dělá padající strom v lese hluk, jestliže okolo není nikdo, kdo by jej slyšel spadnout?

Tak co, čtenáři, jste platonisté?

3. Georg Cantor a nekonečno

Dálka nekonečná, to se jen krásně říká,
dokud nezkusíš jak já po ní plout…

Pavel Bobek

Georg Cantor, který se narodil v Petrohradě v roce 1845, vnesl do matematiky naprostou revoluci tím, že postavil na nohy teorii množin. Nebýt Cantora, většina matematiky dvacátého století by vůbec nemohla vzniknout, a zcela nepochybně by Stefan Banach a Alfred Tarski nedospěli ke své půvabné větě.

Pravděpodobně to nejdůležitější, co můžeme spojit s Cantorovým jménem, je moderní koncept nekonečna. Pojem nekonečna má sám o sobě skoro nekonečnou historii a pochopitelně odjakživa vzrušoval a provokoval myslitele všech dob a oborů, zdaleka nejen matematiky, filosofy a teology (zásadní vklad do této problematiky vnesl i Bernard Bolzano v knize [2]). Nekonečnost času a prostoru musela přijít na mysl každému, kdo se podíval na nebesa, anebo se zamyslel nad periodickým střídáním dne a noci. Nekonečno se definuje velmi obtížně, což svádí k tomu, aby bylo apriori odmítnuto jako nesmysl.

Cantor samozřejmě nebyl první, kdo se nekonečnem seriózně zabýval. Ve čtvrtém století před naším letopočtem položil několik základních otázek týkajících se nekonečných procesů Zenon, známý svými paradoxy o naprosté nemožnosti jakéhokoli pohybu či o závodu Achilla a želvy. Oba jsou založeny na (mylné) myšlence, že v konečném čase nelze vykonat nekonečně mnoho úkonů. Dnes, když víme, jak sčítat nekonečné řady, umíme Zenonovy paradoxy vysvětlit snadno. Zenon samozřejmě musel vědět, že tvrdí očividnou nepravdu, kupodivu se však nepokusil o jakékoli vysvětlení. Ve třetím století před naším letopočtem dokázal Eukleides existenci nekonečně mnoha prvočísel. V roce 207 před naším letopočtem napsal Aristoteles: *nekonečno je něco jako čas, není to žádná permanentní entita, spíše něco, k čemu se stále blížíme …* Tomáš Akvinský, myslitel třináctého století, zastával následující názor: *Nekonečně velký soubor nemůže existovat. Soubory věcí můžeme specifikovat podle počtu věcí v nich, a žádné číslo není nekonečné. Tedy žádný soubor nemůže obsahovat neomezené množství věcí.* Carl Friedrich Gauss, podle mnohých největší matematik všech dob, napsal v dopise příteli:

Vehementně musím protestovat proti vašemu zacházení s nekonečnem, jako by to bylo nějaké zboží. Nic takového matematika nedovoluje. Nekonečno je prostě jen façon de parler...

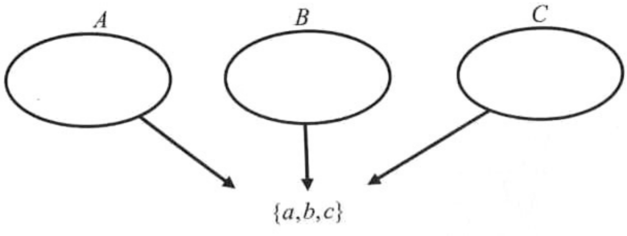
Dodnes v matematice není nekonečno považováno za reálné číslo, nýbrž za označení jakési neomezené veličiny. Skoro nikdy nepíšeme $x = \infty$, spíše $x \to \infty$. Mimochodem, symbol ∞ zavedl v sedmnáctém století anglický matematik John Wallis. Zdá se, že jej převzal ze starořeckého označení stamiliónu, který ilustroval nekončící proces na hadovi, požírajícím sama sebe.

Cantor ve své převratné práci ale jako první člověk na světě vzal nekonečno do rukou a začal s ním pracovat. Koncept množiny, který definoval ze všeho nejdříve, byl záhy nevyhnutelně konfrontován s nekonečnem, a to jakmile došlo na mohutnost, nebo přesněji kardinalitu množin. Kardinalita množiny $\{2, 4, 6\}$ je rovna třem, protože tato množina má tři prvky. Ovšem jaká je kardinalita například množiny přirozených čísel nebo množiny reálných čísel? Jsou nekonečné? A jsou stejně mohutné? Pro studium podobných otázek vyvinul Cantor koncept vzájemně jednoznačného zobrazení. S jeho pomocí dokázal první z dlouhé řady zdánlivě paradoxních tvrzení, které jeho samotného překvapily, a sice že množina sudých kladných čísel má stejnou kardinalitu jako množina čísel přirozených, ačkoli je to její vlastní podmnožina. Další množiny s touto kardinalitou jsou například množina všech lichých čísel, množina všech druhých mocnin nebo množina všech prvočísel. A co množina reálných čísel? Cantor jako první krok dokázal, že kladných racionálních čísel je stejně jako čísel přirozených. Tímto výsledkem byl sám naprosto šokován, neboť racionální čísla tvoří hustou množinu v číslech reálných a je jich tedy zdánlivě o mnoho více než čísel přirozených. Na základě tohoto výsledku pracoval na hypotéze, že všechny nekonečné množiny jsou stejně mohutné. Místo toho ovšem odhalil další šokující zvěst, totiž že platí pravý opak. Z diagonální metody, kterou Cantor vyvinul, vcelku snadno vyplývá, že reálných čísel mezi nulou a jedničkou je podstatně více než přirozených čísel.

V tomto okamžiku se Cantor musel smířit s existencí minimálně dvou různých typů nekonečna. Odtud byl ale už jen krok k hypotéze, že nekonečen je celá hierarchie, pochopitelně rovněž nekonečná. Cantor pro ně zavedl dodnes užívané značení pomocí hebrejského písmene aleph ($\aleph$). Kardinalitu množiny přirozených čísel označil symbolem $\aleph_0$ (takové množiny nazýváme *spočetné*), kardinalitu množiny všech podmnožin přirozených čísel symbolem $\aleph_1$ a tak dále. Diagonální metodou lze snadno dokázat, že $\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \dots$ Cantor předpokládal, že kardinalita množiny reálných čísel bude rovna $\aleph_1$, ale nebyl schopen tento fakt dokázat. Jak později dokázali postupně Kurt Gödel a Paul Cohen, jde o nedokazatelné tvrzení. Část matematiků proto přijímá toto tuto identitu jen jako axiom, známý pod názvem *hypotéza kontinua*.

Cantorovy převratné objevy byly plně pochopeny a přijaty jen částí matematické obce. Ze strany mnoha vlivných matematiků (jimž vévodil jeho osobní nepřítel Leopold Kronecker) se mu dostalo nepochopení, výsměchu a všemožných ústrků, které u něj vyvolaly hluboké deprese a nakonec vedly i k jeho předčasné smrti.

Nicméně jeho práce více než kdy předtím odhalila nutnost postavit matematiku na solidní základy. Ve snaze očistit Cantorovy výsledky od všelijakých paradoxů a nevysvětlitelných kontraintuitivních důsledků byla na přelomu 19. a 20. století patrná značná snaha o vybudování bezesporné axiomatické teorie, která by se stala východiskem pro veškerou matematiku. Tuto snahu korunoval v roce 1908 německý matematik Ernst Zermelo, jenž formuloval sadu osmi axiomů teorie množin, analogických Eukleidovým axiomům geometrie. Mimo jiné axiomy zaručovaly existenci prázdné množiny a nekonečných množin. V roce 1922 ji doplnil logik Abraham Fränkel na sestavu osmi až deseti (podle různých možností jejich formulace) axiomů. Jak se později ukázalo, ve zdánlivě nevinném seznamu dřímá časovaná bomba, a sice takzvaný *axiom výběru*, který postuluje toto: pro libovolný soubor množin existuje výběrová množina, která obsahuje právě po jednom prvku z každé množiny v daném souboru.



Zatímco pro konečné soubory množin je konstrukce takové množiny snadná, při práci s nekonečnými soubory nastanou potíže. Pokusme se ilustrovat tuto situaci na (ne zcela korektním) příkladu z reálného světa. Představme si třeba nekonečně mnoho párů bot. Pro tuto množinu snadno nalezneme obecnou metodu konstrukce výběrové množiny: z každého páru vybereme (například) levou botu. A teď si představme nekonečně mnoho párů ponožek. Je evidentní, že jsme náhle s rozumem v koncích, výše uvedená metoda selhává, neboť obě ponožky jsou zcela stejné. Existenci výběrové množiny je nutno postulovat axiomem.

Jenže na počátku dvacátého století nebylo známo, zda jsou axiom výběru a hypotéza kontinua vůbec konzistentní s ostatními axiomy a také zda náhodou nejsou na nich závislé. Když v roce 1900 formuloval David Hilbert na kongresu v Paříži svůj slavný seznam 23 nejdůležitějších problémů v matematice, zařadil konzistenci a nezávislost hypotézy kontinua na první místo. Konzistenci axiomu výběru i hypotézy kontinua s ostatními axiomy dokázal v roce 1940 Kurt Gödel, o němž zde již byla řeč. Na důkaz nezávislosti obou výroků na ostatních axiomech ovšem musela matematická obec čekat ještě o dalších pětadvacet let déle. Dokázal ji Paul Cohen až v roce 1965.

Cohenův důkaz rozdělil matematiky na dva tábory. Jedni odmítají axiom výběru jakožto nekonstruktivní a zbytečný postulát, který má velmi neblahé důsledky, mezi kterými září Banachův–Tarského paradox jako obzvláště křiklavý a varovný příklad. Zastánci axiomu výběru naopak argumentují nádhernou matematikou, která je bez něj nemyslitelná (například moderní funkcionální analýza by se musela obejít bez Hahnovy–Banachovy věty a všeho, co z ní plyne, což by pro tuto disciplínu znamenalo fatální úder), a také tím, že negace axiomu je sama také dost kontraintuitivní. Bez axiomu výběru bychom například nedokázali uspořádat množiny podle velikosti.

4. Tři typy paradoxů

To jsou paradoxy, co?
Václav Havel

V této kapitole se krátce zmíníme o matematických paradoxech, které můžeme rozdělit do tří skupin:

1) paradoxy typu 1: tvrzení vypadá absurdně, ale platí;
2) paradoxy typu 2: tvrzení vypadá rozumně, ale neplatí;
3) paradoxy typu 3: logické antinomy, vedoucí ke sporným důsledkům.

4.1. Paradoxy typu 3

Antinomy jsou obvykle logické paradoxy, nemající žádný vztah k realitě. Vyskytují se často ve všelijakých filosofických či teologických disputacích, jejich podstata však náleží do výrokové logiky, a tedy vlastně do matematiky. Jde o jakousi extrémní třídu paradoxů, o nichž lze do jisté míry říci, že nemají žádné obecně přijatelné řešení. Většinou jde o otázku, na kterou nelze odpovědět kladně ani záporně, abychom se nedostali do sporu, nebo o výrok, o němž nelze říci, ani že je pravdivý, ani že je nepravdivý. Rozličné formy takových výroků jsou známy od starověku, seriózní pozornost matematické povahy jim byla pravděpodobně poprvé věnována až po roce 1901, kdy britský logik Bertrand Russell zformuloval paradox, dnes nesoucí jeho jméno. „Oficiální“ matematická verze *Russellova paradoxu* zní takto: definujeme množinu všech množin, které nejsou prvkem sama sebe. Otázka zní, zda je pak tato množina prvkem sama sebe nebo není.

Existuje mnoho variací na toto téma a všelijakých modifikací, bližších obecnému publiku. Mezi nejznámější patří slavný *paradox holiče*, který zformuloval Bertrand Russell v roce 1918: jestliže holič holí všechny muže ve městě, kteří se neholí sami, kdo holí holiče? V jiné verzi jsou studována všechna přídavná jména, která popisují sama sebe – otázka je, kam patří slovo „*nepopsatelný*“? V nejpřímočařejší verzi máme rozhodnout, zda je výrok „Já jsem lhář“ pravdivý či nikoli.

Pro tento typ paradoxů neexistuje žádné snadné řešení či vysvětlení, představují úkol pro teoretickou logiku, která musí problematické výroky nějakým způsobem zakázat. Alfred Tarski navrhl zavést hierarchii logických *metajazyků*, z nichž každý by posuzoval pravdivost výroků v nižších metajazycích. Russell nabídl víceméně ekvivalentní metodu, takzvanou *teorii typů*, která by výroky jako „množina je prvkem sama sebe“ nebo „množina není prvkem sama sebe“ odmítla jako nesmyslné (nemající pravdivostní hodnotu) a existenci sporných množin by vyloučila.

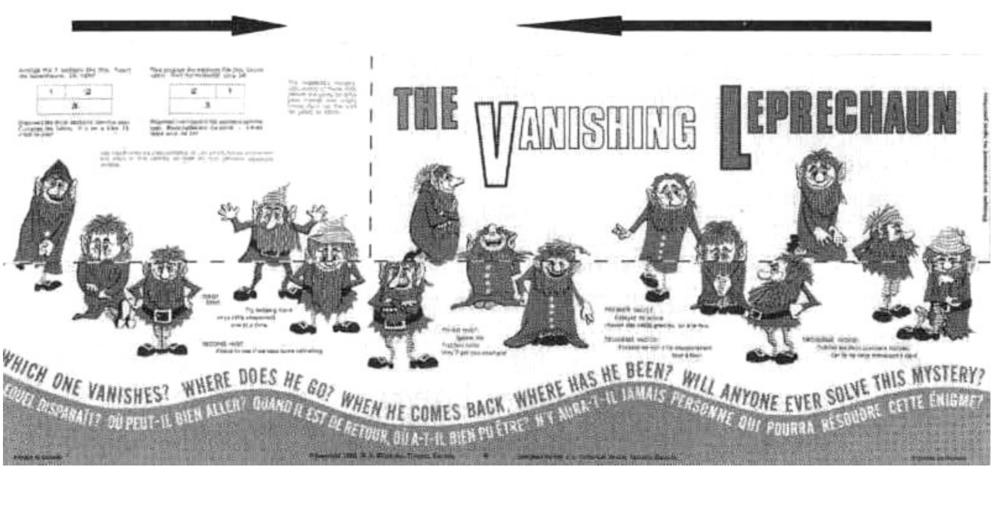
4.2. Paradoxy typu 2

Tyto paradoxy obvykle žádnými opravdovými paradoxy nejsou, většinou obsahují nějaký švindl, ať už optický nebo jiný. Existují tisíce geometrických chytáků, které často nacházíme ve sloupcích či literatuře věnované rekreační matematice. Záměrně odvádějí naši pozornost klamným směrem a vedou nás ke zjevně nesmyslným závěrům, nad nimiž si potom lámeme hlavu.

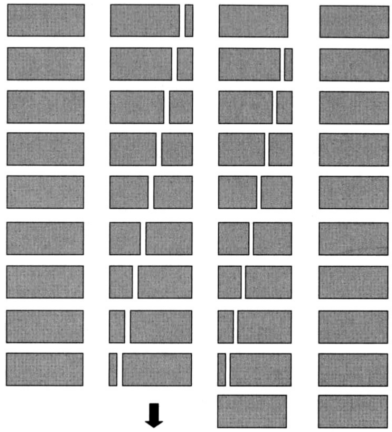
Historie zná několik skutečných mistrů tohoto oboru. Jmenujme za všechny alespoň Samuela Lloyda (1841–1911), Lewise Carrolla (1832–1898) či Martina Gardnera (nar. 1914). Sam Lloyd, jehož asi nejznámější šaráda 14-15 (u nás možná známější pod názvem „patnáctka“) zamotala kdysi hlavu miliónům lidí, publikoval v roce 1896 úlohu nazvanou *Get off the Earth*, jakýsi rotační disk, připevněný k obdélníkové tabuli, na kterém po obvodu kružnice vidíme několik čínských bojovníků (viz obrázek). Na

kruhu je šipka a na tabuli jsou vyznačeny pozice NE a NW. Směřuje-li šipka k bodu NE, bojovníků je třináct. Otočíme-li diskem tak, aby šipka směřovala do bodu NW, pak jeden Číňan zmizí a napočítáme jich pouze dvanáct. Kam zmizel třináctý bojovník?

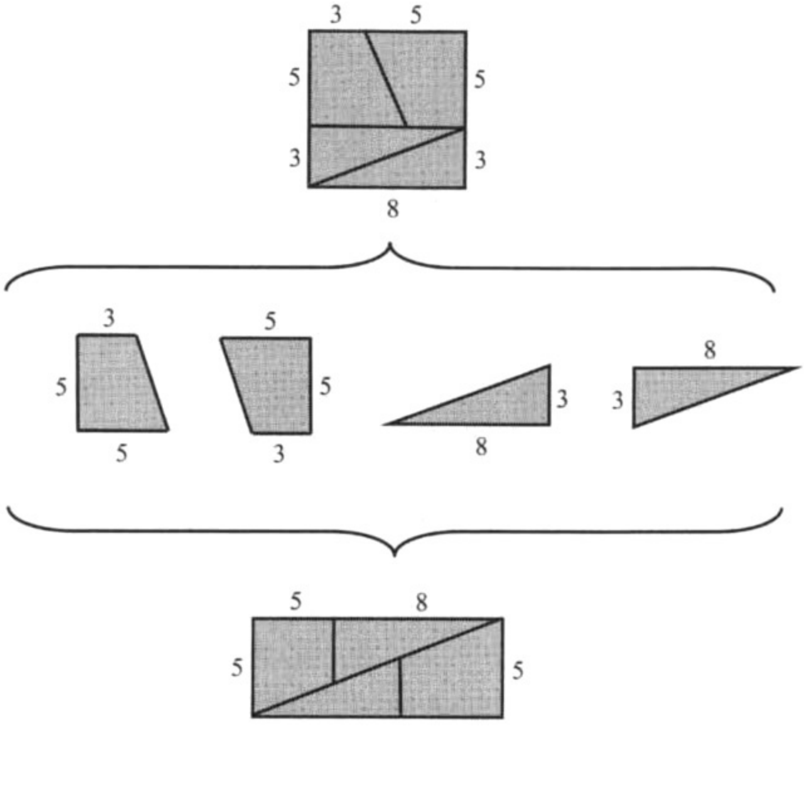
Tato hříčka vzbudila pochopitelně obrovskou pozornost a byla následována mnoha variacemi na stejné téma. Asi nejkrásnější z nich je kanadský chyták *The Vanishing Leprechaun (Mizející pidižvík)*, který pro děti vyráběla firma W. A. Elliott v Torontu. Rozstříhněte si obrázek podle přerušovaných čar na tři části a pak horní dva dílky vyměňte. Na původním obrázku napočítáte patnáct pidižvíků, ale po výměně jen



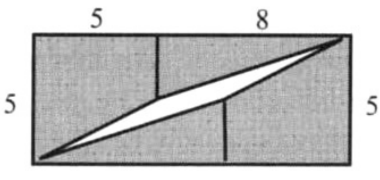
čtrnáct. Jde pochopitelně o podvod,ale velice mazaně provedený. Vysvětlení jevu je možno ilustrovat na známém triku, který kdysi používali falšovatelé peněz (viz obrázek vpravo).



Geometrické verze paradoxů typu 2 obsahují všelijaké důkazy nesmyslných tvrzení (například že každý trojúhelník je rovnoramenný) nebo (opět) zdánlivě nevysvětlitelné úbytky plochy. Následující diagram ukazuje návod, jak rozstříhat čtverec o straně 8 jednotek na čtyři dílky a z nich sestavit obdélník o rozměrech 5 krát 13 jednotek (je vám na tom něco divného?).

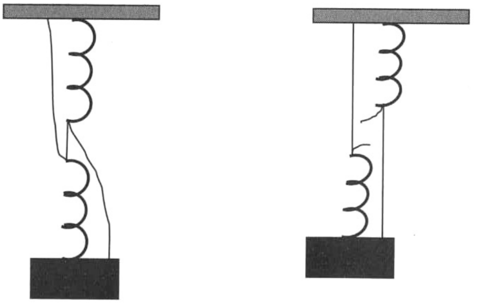


Vysvětlení, které ovšem není na první pohled patrné, vidíme na obrázku vpravo.



4.3. Paradoxy typu 1

Fascinující fyzikální paradox, který si navíc může kdokoli pomocí běžně dostupných materiálů vyzkoušet doma, objevil Joel Cohen. Pod názvem *Braessův paradox* byl uveřejněn v Discovery Magazine v roce 1992: Zavěsíme závaží na soustavu dvou pružin a tenké struny. Přestřihneme-li strunu, spadne nám závaží na nohu. Z tohoto důvodu přidáme dvě další volně visící stejně dlouhé tenké strunky, delší než pružiny. Přestřihneme-li krátkou strunku teď, zdá se nad slunce jasnější, že závaží poklesne. Kupodivu, pravý opak je pravdou (viz obrázek). Přesné vysvětlení zde neuvedeme, pouze napovíme, že zde hraje roli rozdíl mezi sériovým a paralelním zavěšením.



Za zmínku rozhodně stojí ještě alespoň takzvaný Simpsonův paradox, který se projevuje v praxi často a který již zamotal hlavu mnoha lidem včetně statistiků. Zajímavé na něm je, že obsahuje pouze velice triviální matematiku, takže si každý školák může snadno ověřit, že opravdu funguje. Představme si, že jakýsi výzkumník zápolí s nějakou zákeřnou chorobou a potřebuje si otestovat, který ze dvou dostupných léků, nazývejme je žlutými a červenými pilulkami, je účinnější. Protože lidé různého pohlaví mohou reagovat různě, jsou zaznamenávána data pro muže a pro ženy odděleně. Testem projde celkem 245 pacientů, z toho 200 mužů a 45 žen, a každý pacient dostane právě jeden ze dvou léků. Dejme tomu, že byla získána tato data: červená pilulka byla podána 100 mužům, z nich 80 přežilo a 20 zemřelo. Žlutá pilulka byla nabídnuta také 100 mužům, z nich pak 78 přežilo a 22 zemřelo. Červená pilulka byla dále podána 40 ženám, z nichž 20 přežilo a 20 zemřelo, a žlutá pilulka byla aplikována u zbývajících pěti žen, z nichž dvě přežily a tři zemřely. Vyjádřeno v procentech, při léčbě červenými pilulkami přežilo 80 procent mužů a 50 procent žen, zatímco při léčbě žlutými pilulkami pouze 78 procent mužů a 40 procent žen. Jsou tedy červené pilulky jasně lepší?

Výzkumník v tomto okamžiku předá data kolegovi, který zanedbá jejich rozdělení podle pohlaví a sdruží je do jediného souboru. Je jasné, že z toho opět musí vyjít červené pilulky lépe? Bohužel nikoli. Červené pilulky byly podány celkem 140 osobám, z nich přežilo 100, což je 71,4 procenta, zatímco žluté pilulky byly aplikovány u 105 pacientů, z nichž přežilo 80, což je 76,2 procenta. Kombinovaná tabulka vychází výrazně ve prospěch žlutých pilulek!

Než se pokusíte tento paradox vysvětlit, odpovězte si na dvě otázky:

1. Jste-li pacient, který lék si vyberete?
2. Jste-li lékař a nemáte tušení, jakého pohlaví je váš pacient, který lék mu nabídnete?

Paradox je způsoben tím, že muži mají bez ohledu na terapii obecně výrazně vyšší procento přežití než ženy (samozřejmě pouze v našem hypotetickém příkladě). Žluté pilulky byly ovšem nabídnuty téměř výhradně mužům, kterým se obecně daří lépe. Tím se výsledky žlutých pilulek značně zlepšily. Větší účinnost ovšem mají pilulky červené a měli bychom si je zvolit, ať už jsme pacientem nebo lékařem. Tento fakt byl zamaskován jakmile jsme zanedbali dělení dat na obě pohlaví, a vznikla velice nebezpečná situace.

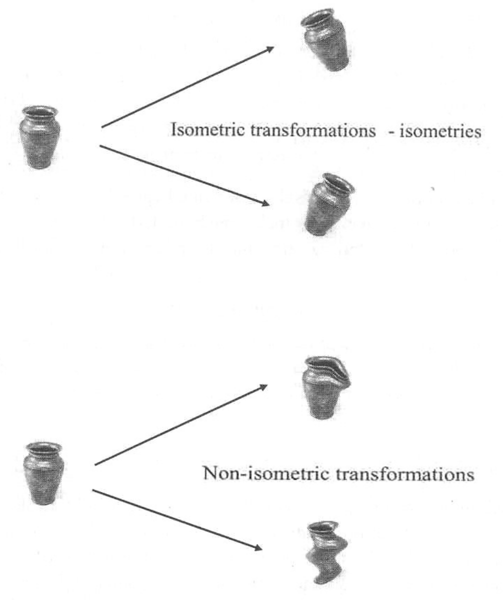
Tento paradox se v historii projevil několikrát velmi výrazně a občas vedl k fatálním závěrům. Je třeba dát si na něj pozor, kdykoli třídíme nějaká data. Vskutku hrůzná představa je, jak strašnou zbraní by se Simpsonův paradox mohl stát v rukou politiků a demagogů. Máme velké štěstí, že jim to jejich vzdělání a intelekt většinou nedovolují.

5. Kongruence a kongruence po částech

Ve stínu hran jsem souměrná, ouuu, …

Bára Basiková

Řekneme, že dva objekty jsou *kongruentní*, jestliže lze jeden převést na druhý pomocí *izometrie*, tedy zobrazení, které zachovává vzdálenosti mezi jednotlivými body a neprovádí s originálem žádné natahování, smršťování či jakékoli jiné distorze tvaru. Na obrázku vidíme izometrické a neizometrické zobrazení vázy.



Mezi základní typy izometrií patří posun a rotace, v některých případech se připouští též zrcadlení. Pro naše účely je velmi důležité si uvědomit, že v důkazu Banachovy–Tarského věty budeme používat skutečně jen izometrie. Kdyby bylo povoleno natahování, pak bychom kýženého nárůstu hmoty dosáhli snadno.

Geometrické úlohy obsahující dekompozici obrazců a těles provázejí lidstvo odjakživa. V klasických dvojrozměrných geometrických úlohách máme často za úkol rozstříhat daný mnohoúhelník a sestavit z něj jiný daný tvar. Tedy jeden objekt je rozstříhán na konečně mnoho částí, a ty jsou pak pomocí izometrií (posunování po stole) převedeny na objekt druhý. Budeme-li ignorovat hranice jednotlivých částí, můžeme definovat, že takové dva objekty jsou pak *nůžkově kongruentní.*

Známá Wallaceova–Bólyaiova–Borweinova věta praví, že dva mnohoúhelníky jsou nůžkově kongruentní právě tehdy, když mají stejný obsah. Tento fakt na přelomu století zřejmě zaujímal velmi důležité místo v matematice, neboť otázku, zda platí trojrozměrná verze této věty, nacházíme hned na třetím místě Hilbertova seznamu.

Přesněji řečeno, Hilbert předpovídal zápornou odpověď a problém formuloval jako výzvu k nalezení protipříkladu. Problém padl hned ještě v roce 1900, a to jako první ze seznamu (dodejme, že dnes jsou již vyřešeny nebo alespoň částečně vyřešeny všechny Hilbertovy problémy kromě jediného – Riemannovy hypotézy). Kýžený protipříklad nalezl (a Hilbertovu domněnku tak potvrdil) dvaadvacetiletý německý matematik Max Dehn, a to dokonce kuriózně ještě předtím, než stihl Hilbert svůj slavný seznam prezentovat v Paříži. K důkazu mu stačily čtyřstěny.

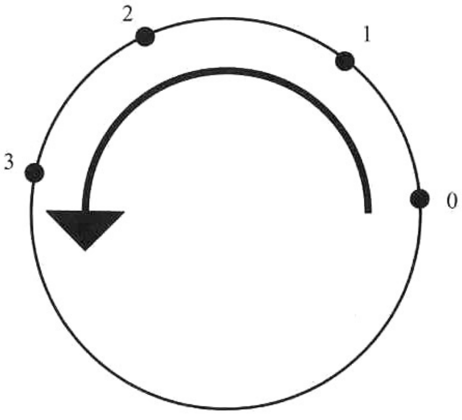
Nůžková kongruence ovšem skrývá jistá úskalí, na která je třeba dát si pozor, jestliže chceme pracovat na solidních matematických základech. Potíže nastávají pro body na hranici střihu. Podívejme se například na čtverec a rovnoramenný trojúhelník. Jsou nůžkově kongruentní? Při povrchním ohledání se zdá, že ano, neboť prostě rozstřihneme čtverec po diagonále a ze dvou získaných tojúhelníků snadno sestavíme jiný. Kam se však zobrazí diagonála ve čtverci? Je jasné, že nemůžeme dostat obě odvěsny, ale jen jednu. A naopak, co se děje v místě „slepu"? Tam naopak dochází k jakémusi „překryvu"?! Tyto otázky bohužel nelze uspokojivě zodpovědět. Je třeba se smířit s tím, že čtverec a trojúhelník nůžkově kongruentní nejsou. Jsou však *kongruentní po částech.*

Řekneme, že dva objekty jsou *kongruentní po částech*, jestliže jeden lze rozložit na konečně mnoho podmnožin a z množin jim kongruentních pak složit druhý objekt. Pro ilustraci se podívejme na několik jednoduchých příkladů. Množina přirozených čísel $\{1, 2, 3, \ldots\}$ je zřejmě kongruentní množině přirozených čísel bez prvků 1, 2 a 3, tedy množině $\{4, 5, 6, \ldots\}$, neboť jednu dostaneme z druhé pouhým posunem. Na druhé straně množina přirozených čísel není kongruentní množině sudých čísel (ačkoli mají stejnou mohutnost), protože vzdálenosti mezi body nelze zachovat při žádném zobrazení.

A teď se podívejme na množiny $\{1, 2, 3, \ldots\}$ a $\{1, 2, 3, 5, 6 \ldots\}$, tedy na přirozená čísla a přirozená čísla bez čtyřky. Množiny opět nemohou být kongruentní, protože neexistuje způsob, jak zaplnit díru po čtyřce. Jsou ale kongruentní po částech, neboť množinu $\{1, 2, 3, 5, 6 \ldots\}$ rozdělíme na sjednocení množin $\{1, 2, 3\}$ a $\{5, 6 \ldots\}$, druhou posuneme o jedničku vlevo (to je kongruence) a získané dvě množiny sjednotíme. Toto je velmi důležitý princip, který nazýváme *posunem z nekonečna.*

Na myšlence posunu z nekonečna je založena koncepce půvabného takzvaného Hilbertova hotelu, který má nekonečně mnoho pokojů, je zcela zaplněn a přijíždí nový host. Hilbert přesune každého již ubytovaného hosta do pokoje s číslem o jedničku vyšším, čímž získává volný pokoj pro nově příchozího. Vzápětí ovšem přijíždí autobus s nekonečně (spočetně) mnoha dalšími zájemci. Hoteliér Hilbert (veden představou netriviálního zisku) si ale hravě poradí i s tím, prostě přesune každého hosta do pokoje s dvojnásobným číslem, a liché pokoje nabídne novým pocestným. Později přijede nekonečně (spočetně) mnoho takových autobusů. I tento nový dav je ještě možno ve zcela zaplněném Hilbertově hotelu ubytovat a dokonce to ani není tak těžké. Stačí autobusy srovnat vedle sebe na parkoviště a označit všechny v nich sedící cestující přirozenými čísly podobně jako Cantor očísloval racionální čísla. Tím se problém převede na úlohu obsahující jen jeden autobus, kterou již ale recepční umí vyřešit.

Myšlenku posunu z nekonečna můžeme využít k „vytváření a zaplňování děr“. Vezměme si kupříkladu kružnici o poloměru 1. Chceme dokázat, že je kongruentní po částech své věrné kopii, z níž ale odstraníme jeden bod. Začneme s neporušenou kružnicí. Bod, který má zmizet, označíme symbolem 0. Posuneme se po kružnici proti směru hodinových ručiček tak, abychom po oblouku urazili délku 1. Bod, ve kterém skončíme, označíme 1. Urazíme znovu stejnou jednotku stejným směrem a výsledný bod označíme 2. A tak dále. Iracionalita poměru délky kružnice ku poloměru nám zaručí, že ani při opakovaném průchodu kružnicí se žádné dva body nikdy nepotkají. Označíme symbolem A množinu všech takto získaných bodů, tedy $A = \{0, 1, 2, \ldots\}$ a symbolem B zbylé body na kružnici. Tedy celá kružnice je sjednocením A a B. Provedeme-li rotaci bodů množiny A o jednu jednotku proti směru hodinových ručiček, dojde k „posunu do nekonečna“: bod 0 se zobrazí na bod 1, bod 1 na bod 2 a tak dále, ale žádný bod se nezobrazí do bodu 0. Takto posuneme A do nekonečna a B zachováme v původním tvaru. Tím je důkaz hotov. Pochopitelně obráceným procesem (posunem z nekonečna) můžeme naopak díru na kružnici zaplnit.



Obdobně lze dokázat kongruenci po částech úplného kruhu a kruhu, z nějž vyndáme jednu úsečku. Důkaz kongruence po částech čtverce a trojúhelníka stejného obsahu je technicky o něco složitější (protože bodů v místě slepu je nekonečně mnoho), myšlenkově je ale úplně stejný.

6. Předchůdci Banachova–Tarského paradoxu

Otázka zní, co to vůbec je paradox. Cantor definoval nekonečnou množinu jako takovou, pro kterou existuje vzájemně jednoznačné zobrazení na nějakou její *vlastní* podmnožinu. Už sama tato definice může leckomu připadat jako paradox, neboť je ve zdánlivém sporu s Eukleidovým axiomem, tvrdícím, že „celek je víc než část“. Pak není divu, že při práci s nekonečnem budou nevyhnutelně následovat další (a hlubší) paradoxy.

Kromě Cantorovy definice nekonečné množiny existuje ještě definice alternativní, kterou zformuloval Cantorův přítel a kolega Richard Dedekind: množina je nekonečná, jestliže existuje prosté zobrazení z množiny přirozených čísel do ní. Přijmeme-li axiom výběru, pak není těžké dokázat, že Cantorova definice je ekvivalentní Dedekindově.

6.1. Natahování a Bolzanův paradox rovného a nerovného

Všechna zvířata jsou si rovna, ale některá jsou si rovnější.

George Orwell

Zeptejte se libovolné osoby na ulici, zda interval $[0,1]$ obsahuje méně bodů než interval $[0,2]$. Odpovědi se budou různit. Jde o typický příklad paradoxu rovného a nerovného, který poprvé popsal Bolzano. Obě množiny mají sice stejný počet bodů (stejnou kardinalitu), je však zřejmé, že druhý interval má oproti prvnímu pár bodů navíc. Je třeba se smířit s tím, že u množin obsahujících nekonečně mnoho bodů existuje proces jakéhosi „natahování“, kterým lze vzájemně jednoznačně zobrazovat na sebe množiny různých rozměrů. Překvapivě obtížná je úloha nalézt vzájemně jednoznačné zobrazení mezi otevřeným intervalem $(0,1)$ a jeho uzavřeným kolegou $[0,1]$.

Cantor studoval otázku, zda je možné najít bijekci mezi množinami sice stejné kardinality, ale různých rozměrů, například mezi úsečkou a čtvercem. Úsečka přece nemá žádnou šířku! V roce 1874 napsal Dedekindovi o tomto problému a v dopise předpověděl, že odpověď bude záporná. Ke svému zděšení dokázal, že to možné je. V roce 1897 píše Dedekindovi opět: „Dokázal jsem to, ale nemohu tomu uvěřit!“ Dedekind odepsal a varoval Cantora, že jeho výsledky nebudou vlivnou matematickou obcí dobře přijaty (s Kroneckerem měli své zkušenosti oba). Editoři časopisů jako například Crelle's Journal se zdráhali Cantorovy články přijímat. Domnívali se, že někde musí být chyba, ale nikdo ji nedokázal nalézt.

6.2. Vitaliova konstrukce neměřitelných množin

A šel bych cestou prašnou, co nikdo nezměří…

Karel Zich

V roce 1905 vyřešil italský matematik Giuseppe Vitali otázku, zda jsou všechny podmnožiny reálné osy lebesgueovsky měřitelné, a to negativně. Jeho konstrukce, založená na axiomu výběru, je pozoruhodně jednoduchá. Řekneme, že dvě čísla a a b z $[0,1]$ jsou ekvivalentní (a píšeme $a \sim b$), jestliže jejich rozdíl je racionální, tedy $a - b \in \mathbb{Q}$. Tedy například všechna racionální čísla jsou ekvivalentní. Také čísla $\frac{1}{\pi}$ a $\frac{2+\pi}{2\pi}$ jsou ekvivalentní. Čísla $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ekvivalentní nejsou. Rozložíme interval $[0,1]$ na třídy ekvivalence. Těch je samozřejmě nespočetně mnoho. Pomocí axiomu výběru nyní zkonstruujeme výběrovou množinu, která obsahuje právě jeden prvek z každé třídy. Označíme ji M a nazveme ji Vitaliovou množinou. Pro každé racionální číslo q definujeme množinu $M_q := \{x + q;\ x \in M\}$. Pak tedy celá reálná osa je (spočetným) sjednocením množin M_q přes všechna racionální čísla q. Všimněme si, že M_q jsou disjunktní a kongruentní.

Nyní sporem dokážeme, že M nemůže být měřitelná. Kdyby byla, pak by všechny množiny M_q musely mít tutéž míru. Kdyby míra množiny M byla rovna nule, pak by tedy míra celé reálné osy byla rovna nule, což je samozřejmě nemožné. Ale kdyby $\mu(M) > 0$, pak by platilo

$$\mu([0,2]) \geqq \mu\Big(\bigcup\{M_q;\ q \text{ racionální},\ 0 \leqq q \leqq 1\}\Big) = \sum_{0 \leqq q \leqq 1} \mu(M_q) = \infty,$$

což je také nemožné. Takže ani M ani M_q nejsou měřitelné.

Jedním z paradoxních důsledků Vitaliovy konstrukce je následující tvrzení: *Podmnožinu intervalu* $[0,2]$ *lze rozložit na několik podmnožin, ze kterých pak lze sestrojit celou reálnou osu.* Na této konstrukci je úžasné, že neobsahuje žádné natahování. Dalším důsledkem je pak již zřejmý přímý předchůdce Banachova–Tarského paradoxu: *Pomocí Vitaliovy konstrukce je možné rozložit kružnici na sjednocení dvou množin, z nichž každou lze rozložit na podmnožiny, z kterých lze sestavit původní kružnici.* Dostáváme tedy dvě kružnice z jedné!

6.3. Hyperwebster

Popsat vám ji lze jen stěží, slovník můj má málo slov…
Milan Dufek

Nádherným příkladem paradoxní konstrukce, na kterou dokonce nepotřebujeme téměř vůbec žádnou matematiku, je superslovník Hyperwebster, jehož autorem je Ian Stewart. Hyperwebster obsahuje všechna slova, která lze sestavit z 26 písmen anglické abecedy. Slova mají vždy konečný počet písmen a jsou seřazena abecedně. Slovník uvádí všechny výrazy bez ohledu na to, zda dávají smysl. První položky na seznamu jsou A, AA, AAA, AAAA, a tak dále. Po nekonečně mnoha takových slovech přijdou na řadu AB, ABA, ABAA, ABAAA a tak dále. Slovník sice není výkladový, definice různých pojmů v něm však přesto jsou. Musíme ovšem rozpoznat správné definice od nesmyslů. Například zde máme definici slova lichoběžník skrytou v hesle LICHOBEZNIKJECTYRUHELNIKKTERYMAPRAVEDVESTRANYROVNOBEZNE, najdeme ovšem také heslo LICHOBEZNIKJEPLECHOVYHLODAVEC. I to udává definici lichoběžníku, ale poněkud zavádějící. Hyperwebster je ovšem mnohem víc než jen pouhý slovník. Budou v něm zmíněny všechny články, knížky a texty písní, které kdy byly napsány, i ty, které teprve napsány budou. Najdeme v něm léčebné postupy na choroby, které zatím neumíme vyléčit. Mezi nimi budou ale i nesprávné léčebné návody, a bude třeba celých týmů expertů z oboru medicíny, aby od nich odlišily ty pravé.

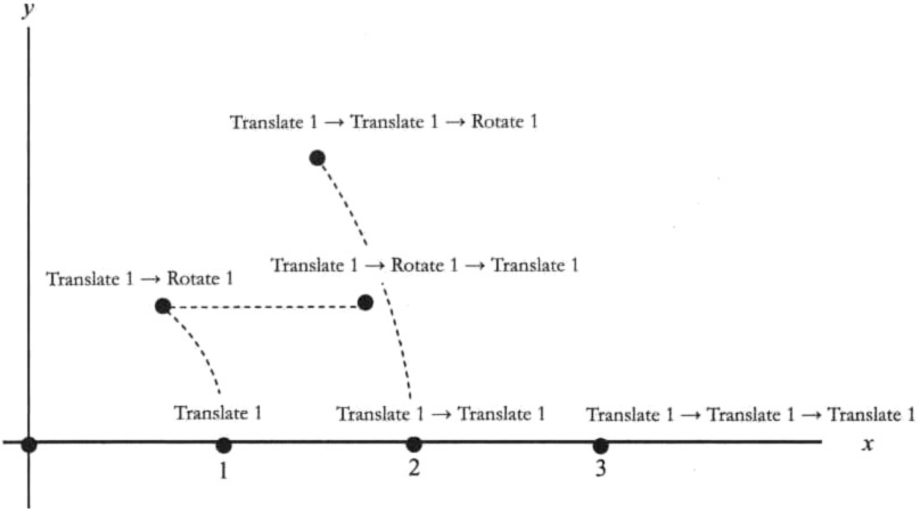
A teď si představme, že se hypotetický nakladatel Ferda Mravenec & Brouk Pytlík, s.r.o., rozhodne vydat Hyperwebstera ve 26 dílech vždy podle písmene, kterým výrazy začínají. Budeme tedy mít například díl A: A, AA, …, AB, ABA, …, obdobně budou vypadat díly B, C, …, Z. Těsně před vydáním si nakladatel uvědomí, že bude potřebovat spoustu drahého papíru. Aby ušetřil, rozhodne se ze všech slov obsažených v prvním dílu odstranit počáteční písmeno A, neboť to si tam pak každý snadno doplní. Obdobně naloží s ostatními díly. V logaritmických tabulkách se přece také často vynechává nula a začíná se až desetinnou čárkou. Nakladatel ušetří spoustu peněz a čtenáře to nic nestojí. Pár hodin před vydáním slovníku se objeví další způsob, jak ušetřit peníze: pečlivou kontrolou všech dílů se ukáže, že jsou zcela identické. Proč by se tedy měly vydávat všechny? Stačí přece vydat pouze díl A! Bude ale moudré přejmenovat první díl na Hyperwebster. Nakladatel pak rozdělí díl A do kapitol podle druhého písmene (kapitola A až kapitola Z). Opět se v každé kapitole vynechá první písmeno a zase, jako z udělání, se zjistí, že jsou všechny kapitoly stejné. Vydá se tedy pouze kapitola A! Jen ji přejmenujeme na Hyperwebster. Snadno uhodnete, co se bude dít dál. Přijdou na řadu paragrafy, odstavce, a tak dále.

Superslovník Hyperwebster má kromě všech svých úžasných kvalit ještě také následující pozoruhodnou vlastnost: lze jej rozložit na nekonečně mnoho svých vlastních kopií, z nichž každou lze rozložit na nekonečně mnoho svých vlastních kopií a tak dále.

6.4. Sierpińského–Mazurkiewiczův paradox

Polský matematik Wacław Sierpiński (1882–1969) formuloval problém, zda je možné rozložit nějakou množinu E na disjunktní sjednocení dvou množin E_1 a E_2 tak, aby každá z nich byla kongruentní původní množině. Kladnou odpověď na tuto otázku přinesl jeho student Stefan Mazurkiewicz (1888–1945).

Mazurkiewiczova množina E obsahuje následující body: počátek dvourozměrného Eukleidova prostoru a pak všechny body, které lze z počátku dostat jednou z následujících operací: posunem doprava o jednu jednotku, nebo otočením proti směru hodinových ručiček o jeden radián (což je $\frac{180}{\pi}$ stupňů). E je spočetná množina bodů z $\mathbb{R}^2$. Nyní posuneme všechny body z E o jednotku doprava a výslednou množinu nazveme E_1. Dále pootočíme všechny body množiny E proti směru hodinových ručiček o jeden radián a výslednou množinu označíme E_2. Ctěný čtenář se jistě sám snadno přesvědčí, že tato dekompozice má kýžené vlastnosti.



Na této konstrukci je pozoruhodná nejen její zarážející jednoduchost, ale hlavně to, že nepoužívá axiom výběru. Na závěr si ještě všimněme možná trochu překvapivé souvislosti s Hyperwebsterem: přiřaďme jednotlivým bodům řetězce písmen podle posloupnosti úkonů, která nás k bodu dovedla, tedy T pro posunutí a R pro rotaci. Pak E_1 obsahuje právě všechny body začínající písmenem T a E_2 naopak všechny body začínající písmenem R.

7. Důkaz Banachovy–Tarského věty

Nekonečno je místo, kde se dějí věci, které nejsou.

neznámý školák

V této kapitole uvedeme důkaz Banachovy–Tarského věty. Připomeneme si její znění.

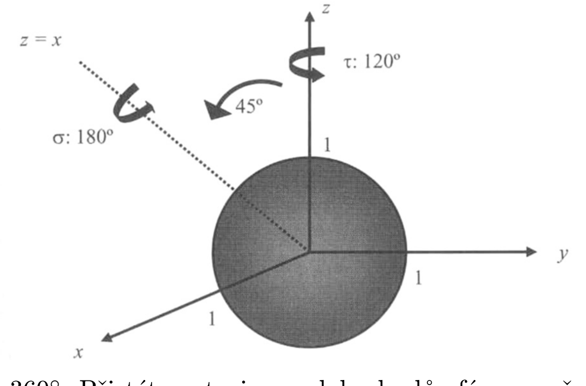
Věta. Jednotkovou trojrozměrnou kouli $B = \{[x, y, z];\ x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1\}$ lze rozložit na dvě části B_1 a B_2, z nichž každá je po částech kongruentní kouli B.

Důkaz můžeme rozdělit do tří hlavních kroků:

7.1. První krok: grupa rotací na sféře

Rotací nazveme jakýkoli rigidní pohyb množiny bodů v trojrozměrném prostoru, při kterém se každý bod pohybuje po stejné kruhové dráze. Nesmí dojít k žádným distorzím, vzdálenosti mezi body jsou stále stejné.

Nejprve definujeme dvě základní rotace: symbolem τ označíme rotaci ve směru hodinových ručiček o $120°$ kolem osy z a symbolem σ rotaci kolem osy $z = x$ v rovině xz o $180°$. Tato osa prochází počátkem a svírá úhel 45 stupňů s osou z (viz obrázek).



Budeme uvažovat všechny možné kombinace rotací τ a σ. Například rotace $\tau^2 = \tau\tau$ představuje pootočení podél osy z ve směru hodinových ručiček o $240°$. Složíme-li rotaci τ třikrát, dostaneme $\tau^3 = \tau\tau\tau$, tedy otočení podél osy z ve směru hodinových ručiček o $360°$. Při této rotaci se poloha bodů sféry nemění. Tuto rotaci budeme nazývat identickou a označovat symbolem I. Máme tedy $\tau^3 = I$, obdobně platí $\sigma^2 = I$. Rotaci σ, po které následuje rotace τ, označíme $\tau\sigma$ a podobně.

Všechny rotace, které složíme ze základních rotací, budeme uvádět v redukovaném (nejjednodušším možném) tvaru. Tedy například píšeme

$$
\begin{aligned}
&I\sigma = \sigma I = \sigma, \quad I\tau = \tau I = \tau,\\
&\sigma^2 = \tau^3 = I,\\
&\tau^7 = \tau^3\tau^3\tau = II\tau = \tau,\\
&\tau^4\sigma^3\tau = \tau^3\tau\sigma^2\sigma\tau = I\tau I\sigma\tau = \tau\sigma\tau.
\end{aligned}
$$

Každou rotaci kromě I je tedy možno vyjádřit ve tvaru konečného řetězce rotací τ, τ^2 a σ. Počet těchto symbolů v řetězci budeme nazývat *délkou* rotace, přičemž I má délku 0. Tedy například rotace $\sigma\tau^2\sigma\tau$ má délku 4.

Množinu všech rotací označíme G. Potom G je grupa a navíc lze dokázat takzvanou větu o jednoznačnosti: každou rotaci v G lze vyjádřit v redukovaném tvaru právě jedním způsobem.

	If $\alpha \in G_1$	If $\alpha \in G_2$	If $\alpha \in G_3$
If the leftmost character of α is τ or τ^2	assign $\sigma\alpha$ to G_2	assign $\sigma\alpha$ to G_1	assign $\sigma\alpha$ to G_1
If the leftmost character of α is σ	assign $\tau\alpha$ to G_2	assign $\tau\alpha$ to G_3	assign $\tau\alpha$ to G_1
	assign $\tau^2\alpha$ to G_3	assign $\tau^2\alpha$ to G_1	assign $\tau^2\alpha$ to G_2

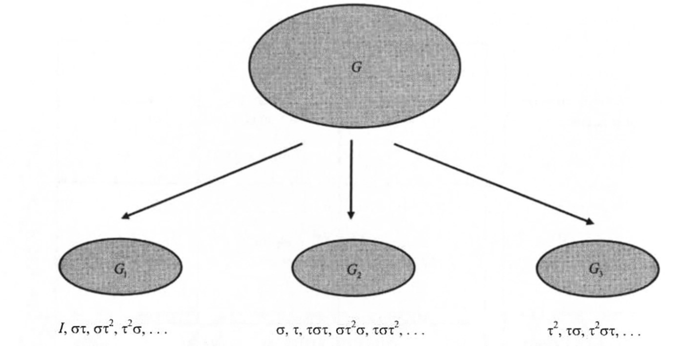
Nyní rozdělíme rotace z grupy G do tří disjunktních podskupin G_1, G_2, G_3. Stanovíme přesný algoritmus, který každou rotaci umístí právě do jedné z nich. Seřadíme všechny rotace podle jejich délky, tj. začneme s identickou rotací I, pak přijdou na řadu rotace délky jedna, dvě, tři, a tak dále. Každou rotaci posoudíme zvlášť a zařadíme ji právě do jedné z podskupin G_1, G_2 nebo G_3. Jde o postupný nekonečný proces, který se podobá například definici matematické posloupnosti rekurzívním vzorcem; i náš výběr příslušné podskupiny totiž bude záviset na umístění předcházejících rotací.

Nejprve uvedeme matematický popis našeho algoritmu. Nechť α je nějaká rotace z G. Je-li symbol stojící v jejím zápisu nejvíce vlevo buď τ nebo τ^2, pak vložíme $\sigma\alpha$ postupně do G_2, G_1 nebo G_1 podle toho, je-li $\alpha \in G_1$, $\alpha \in G_2$ nebo $\alpha \in G_3$. Je-li naopak nejlevější symbol v zápisu rotace α roven σ, pak obdobným způsobem vložíme rotaci $\tau\alpha$ postupně do G_2, G_3 a G_1, a rotaci $\tau^2\alpha$ postupně do G_3, G_1 a G_2.

Návod je vcelku efektivně znázorněn na tabulce, kterou vidíme na obrázku.

Proces spustíme tak, že umístíme identickou rotaci I do koše G_1, rotace τ a σ do koše G_2 a rotaci τ^2 do koše G_3. Tím jsme rozmístili všechny rotace délky nula a jedna. Z tabulky vyplývá, kam zařadit všechny rotace délky dvě. Pak přijdou postupně na řadu rotace délek tři, čtyři a tak dále. Například rotaci $\tau\sigma$ musíme umístit do G_3, protože rotace σ byla předtím umístěna do G_2 a v jejím zápisu stojí nejvíce vlevo symbol σ. Tuto rotaci jsme zleva obohatili symbolem τ, podle uvedené tabulky tedy je třeba zařadit nově vzniklou rotaci $\tau\sigma$ do G_3.

Chceme-li někam umístit rotaci $\sigma\tau^2$, uvědomíme si, že zápis rotace τ^2 začíná vlevo symbolem τ^2 a že byla předtím sama zařazena do G_3. Přidáním σ na začátek řetězce jsme vytvořili novou rotaci, která podle tabulky spadne do G_1. Až se dostaneme na úroveň tři a budeme chtít zařadit rotaci $\tau\sigma\tau^2$, vzpomeneme si, že rotace $\sigma\tau^2$ padla do G_1, a tedy nová rotace poputuje do G_2. V tomto duchu pak postupujeme stále dál.



Na obrázku vidíme rozmístění několika prvních rotací do jednotlivých košů.

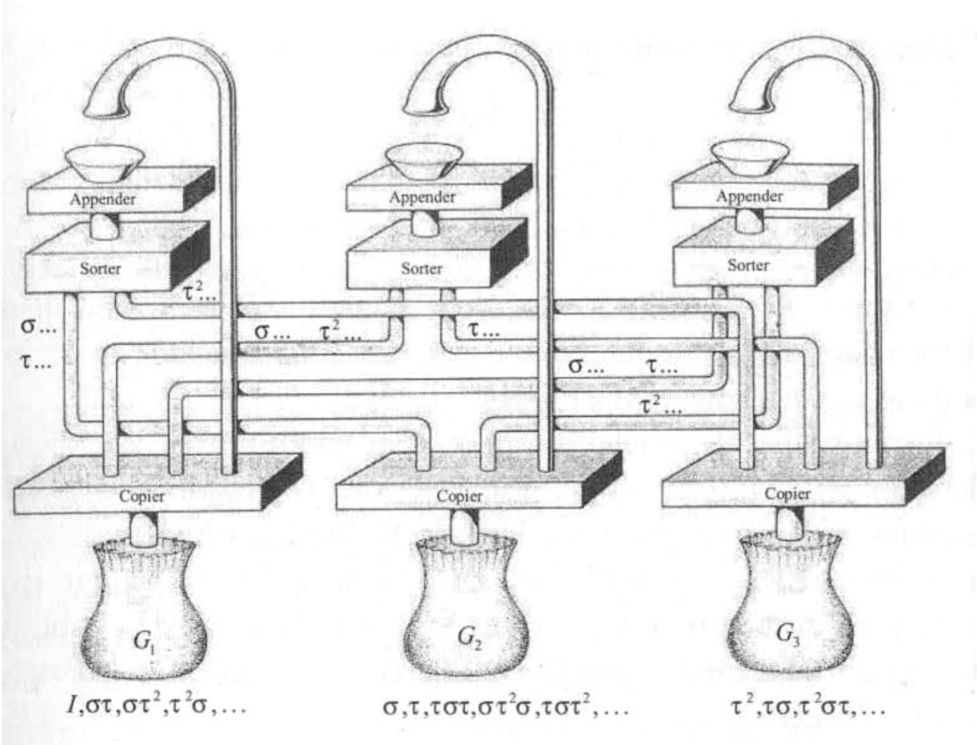
Pěknou ilustrací tohoto algoritmu je takzvaný rotační stroj Roberta Frenche (viz obrázek). Na počátku vložíme identickou rotaci I do koše G_1 a pak už stroj pracuje automaticky sám. Identická rotace se ještě předtím, než spadne do koše, zkopíruje a posune do nálevky nad košem G_1. Tam je postupně složena s rotacemi σ, τ a τ^2, vzniklé rotace jsou v sortovači od sebe odděleny a posléze odvedeny odpovídajícím potrubím do příslušných košů. Než do nich spadnou, jsou opět kopírovány, odvedeny nahoru do nálevek, a celý proces pokračuje stejným způsobem dál.

Tři takto získané podskupiny jsou provázány velmi zajímavými vztahy. Jestliže například na jakoukoli rotaci z G_1 provedeme rotaci τ, dostaneme rotaci z G_2 a naopak, jakákoli rotace z G_2 vznikne popsaným způsobem. Tento fakt zapisujeme ve tvaru $\tau G_1 = G_2$. Například rotace $\sigma\tau$ patří do G_1, a tedy rotace $\tau\sigma\tau$ náleží do G_2. Obdobně lze dokázat $\tau^2 G_1 = G_3$ a $\sigma G_1 = G_2 \cup G_3$.

7.2. Druhý krok: rozklad jednotkové sféry na dvě vlastní kopie

Nejprve si všimneme, že každá rotace má právě dva *póly*, což jsou body, které při rotaci nemění polohu. Například póly rotace τ mají souřadnice $[0,0,1]$ a $[0,0,-1]$ (skoro jako severní a jižní pól). Protože rotací je spočetně mnoho, je také množina P všech pólů všech rotací spočetná. Označme symbolem S celou sféru.

Každý bod z množiny $S \setminus P$ (která je samozřejmě nespočetná) je spojitelný nějakou rotací se spočetně mnoha jinými body na sféře. Pokud nějaké dva body spojuje



nějaká rotace, říkáme, že tyto dva body patří do stejné *orbity*. Sféra bez pólů je tedy sjednocením nespočetného množství orbit, každý bod patří právě do jedné.

Nyní přišel čas na použití axiomu výběru. Sestrojíme výběrovou množinu C, ve které bude právě jeden bod z každé orbity. Potom je zřejmě C nespočetná, disjunktní s množinou P, žádné dva body z C nelze spojit žádnou rotací z G a konečně do každého bodu z $S \setminus P$ vede nějaká rotace z nějakého bodu z C.

Nyní označíme $K_1 = G_1C$, $K_2 = G_2C$ a $K_3 = G_3C$. Potom

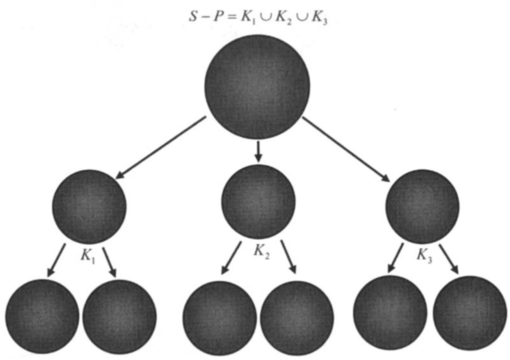
$$S = P \cup K_1 \cup K_2 \cup K_3.$$

Dále je zřejmé, že rotací τ převedeme K_1 na K_2. To ale znamená, že K_1 je kongruentní K_2. Obdobně pomocí rotace τ^2 dokážeme, že K_1 je kongruentní K_3 a konečně pomocí rotace σ, že K_1 je kongruentní $K_2 \cup K_3$. Tedy

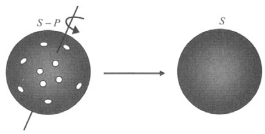
$$K_1 \approx K_2 \approx K_3 \approx K_2 \cup K_3.$$

Tento nádherný vztah se nazývá *Hausdorffův paradox*, nebo též *paradox třetiny a poloviny* (viz též [4]). Protože celá K je téměř rovna sjednocení $K_1 \cup K_2 \cup K_3$ (až na póly, kterých je ale málo), můžeme každou K_i považovat za něco jako *třetinu* celé K. Zároveň je ale každá K_i kongruentní $K_2 \cup K_3$, takže ji můžeme zároveň považovat za přibližně *polovinu* sféry K.

Nyní provedeme klíčový krok. Množinu $K_2 \cup K_3$ použijeme jako „rozkladový vzor“. S její pomocí rozložíme každou z množin K_1, K_2 a K_3 na dvě části, z nichž jedna je kongruentní K_2 a druhá K_3. Tím jsme rozložili množinu $S \setminus P$ na šest částí, z nichž každá je kongruentní buď K_2 nebo K_3. Nyní stačí vzít vždy tři a tři z nich a deklarovat jejich kongruenci množinám K_1, K_2 a K_3 (viz obrázek). Tím získáme dvě identické kopie $S \setminus P$, jejichž sjednocením je ale opět $S \setminus P$.



Co zbývá, je vypořádat se s póly. Ovšem těch je tak málo (přesněji spočetně mnoho), že na zaplnění děr po nich stačí technika, kterou jsme výše popsali jako posun z nekonečna (viz obrázek). Touto metodou dokážeme, že $S \setminus P$ je kongruentní S, a jsme hotovi.



7.3. Třetí a poslední krok: přechod od sféry ke kouli

Těžké klíčové části důkazu máme za sebou. Třetí krok je snadný. Každému bodu sféry přiřadíme úsečku vedoucí z tohoto bodu až k počátku. Takto rozšíříme sféru na kouli bez středu a kopírujeme operace z druhého kroku. Nakonec zaplníme díru v počátku posunem z nekonečna (jako obvykle).

Tím jsme dokázali duplikační verzi Banachovy–Tarského věty.

Po publikaci věty se matematická obec začala zajímat o to, na kolik částí je třeba kouli rozložit. V roce 1947 dokázal Abraham Robinson, že nejmenší možný počet dílků je pět, přičemž ovšem jeden z nich je tvořen jednobodovou množinou.

O Banachově–Tarského paradoxu a dalších výsledcích podobné povahy existuje velice rozsáhlá literatura časopisecká i knižní. Čtenáře se zájmem o další podrobnosti můžeme odkázat například na práce [3], [5], [7], [10] a na další odkazy v nich uvedené.

8. Vztah Banachova–Tarského paradoxu k realitě

Jedna z nejodpornějších věcí, které matematici dělají, je neustálé zpochybňování záležitostí, o kterých jsme přesvědčeni, že jim dokonale rozumíme.

Ian Stewart

Když matematik dokáže něco, co odporuje zdravému rozumu, musí k tomu zaujmout nějaké stanovisko. V souvislosti s naším paradoxem se nabízí několik možností.

8.1. První možnost: odmítnout výsledek jako nesmyslný

Nabízí se celkem snadný závěr, že v důkazu je prostě někde chyba. Jenomže výpočty jsou korektní a logické postupy nenapadnutelné. Jsme-li odhodláni za každou cenu nalézt chybu, máme tedy jedinou možnost. Musíme napadnout nezranitelnější krok celého postupu, totiž aplikaci axiomu výběru. Máme právo používat kontroverzní axiom, když vidíme, k jak bizarním závěrům nás dovedl? Jeho kritici používají Banachův–Tarského paradox jako pádný argument pro jeho odmítnutí. Jenomže axiom sám je vysoce intuitivní a s jeho použitím byla vybudována spousta skvělé matematiky. Spolu s ním by padla velká část důležitých matematických oborů jako jsou topologie, algebra, funkcionální analýza a reálná analýza. Stojí to za to? Není lepší vydržet jeden vcelku neškodný paradox a pokusit se ho obhájit před kritikou?

8.2. Druhá možnost: přijmout výsledek jako fakt

Přijmeme-li výsledek zcela bez výhrad a nepokusíme-li se o nějakou jeho další interpretaci, pak nezbývá, než se jej pokusit využít v praxi a začít zdvojovat hmotu. Nebylo by to poprvé, kdy byl neuvěřitelný fakt obecně přijat za pravdivý. Stačí připomenout zoufalý zápas Koperníka, Galilea a dalších s dobovými předsudky a tupou mocí, než konečně Kepler a Newton přesvědčili veřejnost. Máme k dispozici ale i příklady z velmi nedávné doby, co třeba taková Einsteinova teorie relativity: pohybuje-li se padesátimetrový objekt vážící padesát kilogramů devadesátiprocentní rychlostí světla, pak se smrskne na 22 metrů a jeho váha vyšplhá na 115 kilogramů. Dvacet sekund trvající událost na objektu pozorována zvenčí bude trvat 46 sekund. Nezdá se nám to sice možné, ale tato fakta byla ověřena už i laboratorně. Máme tedy přijmout Banachův–Tarského paradox bez výhrad? Ne tak zhurta. Je tu ještě jedna možnost.

8.3. Třetí možnost: reinterpretovat výsledek

Většina matematiků bere Banachův–Tarského paradox prostě jako půvabný matematický výsledek, který je platný, povolíme-li axiom výběru. Nikdo si ovšem samozřejmě nenamlouvá, že by nám měl umožnit vyrobit dvě zlaté cihly z jedné ani vagón chleba z jednoho malého dalamánku. Axiom výběru vede k existenci neměřitelných množin (viděli jsme Vitaliovu konstrukci), což jsou množiny, které *nemají objem.* Takové množiny existují jen v abstraktním světě matematiky, nemůžete si je strčit doma do šuplíku, stejně jako si tam neuložíte třetí odmocninu z π, o jejíž existenci také nikdo nepochybuje. Axiom výběru je matematický axiom, nikoli fyzikální. Banachova–Tarského věta působí dojmem, že povoluje nárůst objemu, ale je to jen proto, že pracuje s množinami, které žádný objem nemají.

8.4. Existují nějaké projevy Banachova–Tarského paradoxu v reálném světě?

Ale jistě, že ano. Měl jsem dědečka, pro kterého nebyl problém rozebrat hodiny a složit z nich dvoje takové, oboje fungující. V rádiu si nedávno stěžoval majitel labradora, že když vynáší pytel z vysavače plný psích chlupů, je jich tolik, že by se z nich bez problémů dal sestrojit druhý takový pes. Oba se nepochybně obešli bez axiomu výběru. Banachova–Tarského věta není ještě stará ani jedno století. Klidně se můžeme uchýlit k taktice *počkejme a uvidíme.* Můžeme se prozatím smířit s tím, že dublovat hmotu pomocí této věty asi nebudeme, ale bylo by pošetilé zavírat dveře před všemi myslitelnými aplikacemi v reálném světě. Ostatně, jak praví starý známý bonmot, k čemu se hodí kojenec?

Závěr

Ten okamžik trval snad celý světelný rok...
Lenka Filipová

Tuto stěží uvěřitelnou slovní konstrukci jsem slyšel nedávno v rozhlase. Kdybych někde veřejně prohlásil, že jsem dnes ráno uběhl dvacet kilogramů a nebo třeba že pravý úhel vře při devadesáti stupních Celsia, asi bych nevypadal striktně vzato jako vzdělanec. Kupodivu, u písňového textu, jemuž ovšem naslouchají celé zástupy, se to, jak se zdá, snese. Co je proti tomu jeden malý neškodný paradox z teorie míry?

Odtud vyplývá zcela zřetelná výzva. Kamkoli přijdete, snažte se o udržování správného fyzikálního povědomí a vnímání našeho světa. A prosím tolerujte matematiky i s jejich pošetilými tvrzeními.

L i t e r a t u r a

[1] Banach, S., Tarski, A.: *Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes.* Fund. Math. *6* (1924), 244–277.
[2] Bolzano, B.: *Paradoxy nekonečna.* Československá akademie věd, Praha, 1963.
[3] French, R.: *The Banach–Tarski theorem.* Math. Intelligencer *10* (1988), 21–28.
[4] Hausdorff, F.: *Bemerkung über den Inhalt von Punktmengen.* Math. Ann. *75* (1914), 428–433.
[5] Kirsch, A.: *Das Paradoxon von Hausdorff, Banach und Tarski: Kann man es „verstehen"?,* Math. Semesterber. *37* (1990), 216–239.
[6] Kowalski, O.: *Dá se poskládat Měsíc do kufru?,* Vesmír *68* (1989), 467–468.
[7] Laczkovich, M.: *Paradoxes in measure theory, Vol. I, II.* Handbook of measure theory, North-Holland, Amsterdam, 2002, 83–123.
[8] Netuka, I., Veselý, J.: *Stan Wagon: The Banach–Tarski Paradox.* PMFA *32* (1987), 227–230.
[9] Netuka, I., Veselý, J.: *Nedávné výsledky o čísle* π. PMFA *45* (2000), 98–124.
[10] Stromberg, K.: *The Banach-Tarski paradox.* Amer. Math. Monthly *86* (1979), 151–161.
[11] Wagon, S.: *The Banach–Tarski Paradox.* Cambridge University Press, New York, 1985.
[12] Wapner, L.M.: *The Pea and The Sun – A Mathematical Paradox.* A.K. Peters, Ltd., Wellesley, Massachusetts, 2005, ISBN 1-56881-213-2, xiv+218 pp.