

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Lucia Csachová
Esher ako učiteľ'

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 55 (2010), No. 3, 184--190

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/141960>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2010

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

Escher ako učiteľ

Lucia Csachová, Praha

Holandský grafik Maurits Cornelis Escher (1898–1972) podal príbeh odohrávajúci sa na jednej jeho grafike *Reptiles* [Jašterice, obr. 1] nasledovne [5]: „Na stole leží otvorený skicár, v ktorom je mozaika zložená z obrazcov v tvare jašterice v troch farebných odtieňoch. Jedno zviera prestalo baviť ležať medzi svojimi druhmi naplocho,



Obr. 1. M. C. Escher: *Reptiles* (1943).¹⁾

a tak sa odpúta od roviny skicára a vydáva sa do priestoru. Vylezie na knihu a po trojuholníkovej doske sa dostáva k vrcholu svojho bytia. Tam si krátko odpočívne a spokojné pokračuje opäť dole, cez popolník, kde sa poslušne znovu zarádi medzi svojich dvojrozmerných druhov.“

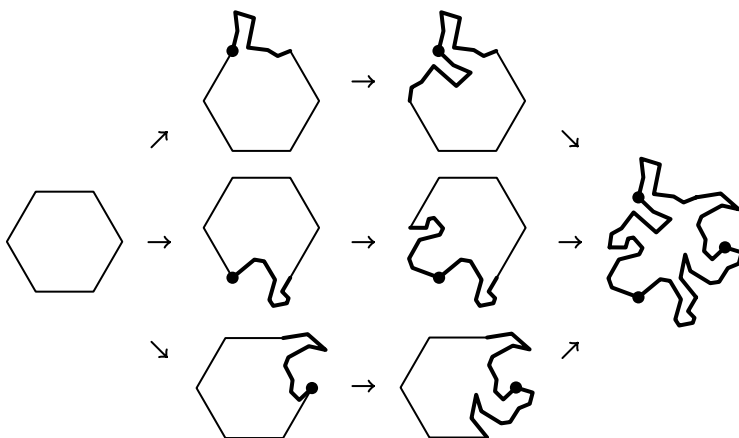
Mozaiky alebo tiež *rovinné teselácie*,²⁾ kam je možné časť tejto grafiky s opakujúcou sa jaštericou zaradiť, patria k jednej z „matematických“ tém, ktorým sa Escher vo

¹⁾ Obrázok je prevzatý zo stránky www.mcescher.com [stránka aktuálna k 23. 4. 2010].

²⁾ Rovinnou teseláciou sa nazýva pokrytie roviny dvojrozmernými ohraničenými útvarmi bez prekrytia.

svojej tvorbe venoval.³⁾ Väčšina ľudí si pri pohľade na danú teseláciu položí niekoľko otázok: ako Escher vytvoril tak zložitý útvar, ktorý je možné v rovine zopakovať bez medzier a prekrytí? Bola to náhoda, genialita alebo pri kreslení postupoval podľa nejakého algoritmu? Je možné, aby sa podobne zložité obrázky naučil kresliť aj „obyčajný“ človek? V príspevku sa pokúsim na tieto otázky aspoň čiastočne odpovedať.⁴⁾

Na obr. 2 je predvedený postup, akým je možné v troch krokoch vytvoriť útvar v tvare jašterice z pravidelného šesťuholníka. Každý z nich je založený na zložitej deformácii strany šesťuholníka, ktorá je následne zobrazená na „susednú“ stranu otočením o 120° okolo vrcholu útvaru. Vytvorenie ďalších útvarov na základe zobrazenia jednoduchších deformácií strán štvorca a šesťuholníka pomocou posunutia na „protiľahlú“ stranu a otočenia je predvedené na obr. 4; základným opakujúcim sa útvarom je štvorec alebo pravidelný šesťuholník⁵⁾. Takto vytvorenú teseláciu je možné nazvať *escherovská*⁶⁾.



Obr. 2. Postup využívajúci otočenie zložito deformovaných strán pravidelného šesťuholníka okolo vyznačených vrcholov, ktorým je možné vytvoriť základný útvar v tvare jašterice opakujúci sa v Escherovej grafike.

Napriek názvu takto vytvorených teselácií, escherovské teselácie začali vznikať už v období secesie [2]. Veľa vzorov z tohto obdobia obsahuje opakujúce sa útvary bez medzier a prekrytí, tak ako napríklad vzor od Nellie Syrettovej (obr. 3a) pre jedenáste číslo *The Yellow Book*⁷⁾ z roku 1896; stredná časť pripomína prvú „escherovskú“

³⁾ Učiteľ matematiky a fyziky Bruno Ernst (v posledných rokoch Escherovho života bol Ernst jedným z jeho najbližších priateľov) stanovil sedem tém vyskytujúcich sa v Escherových matematických grafikách: *Prenikanie svetov, Ilúzia priestoru, Pravidelné delenie roviny* (Teselácie), *Perspektívy, Pravidelné telesá a špirály, Nemožné a Nekonečno* (viac informácií v [1] a [6]).

⁴⁾ Príspevok voľne nadväzuje na článok [4] publikovaný v PMFA 54 (2009), ktorý sa venoval rozporuplnej reakcii na Escherovu tvorbu zo strany matematikov.

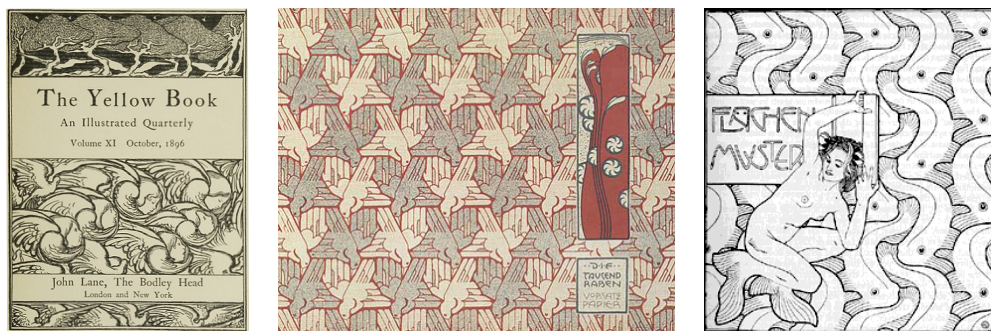
⁵⁾ Ďalším útvarom môže byť napríklad rovnostranný trojuholník alebo obdĺžnik.

⁶⁾ V angličtine sa vyskytuje pojem *Escher-like tessellation*.

⁷⁾ *The Yellow Book* bol anglický literárny štvrťročník vychádzajúci knižnou formou v rokoch 1894–97 v Londýne. Obsahoval krátke príbehy, články, básne a kresby, pričom

Escherovu teseláciu *Eight heads* (1922). Ďalším príkladom bola časť tvorby jedného z najmnohostrannejších umelcov viedenskej umeleckej scény na prelome 19. a 20. storočia – K. Mosera⁸). V období 1899–1900 vytvoril niekoľko teselácií, ktoré viditeľne nesú znaky escherovského štýlu (napríklad obr. 3b, c).

Dlhší čas existovali dohady, či je nejaké prepojenie medzi Escherovou tvorbou a secesiou, ale stále išlo len o teoretizovanie, pretože dôkazy neexistovali. Neskôr sa ale našla pohľadnica z roku 1964, na ktorej Escherov priateľ (takisto grafik), vtipkujúc Escherovi napísal, že ani nevie, že tvoril už pred svojím narodením, a poslal mu jeden z Moserových „escherovských“ obrázkov. Z Escherovej odpovede nie je jasné, či poznal tvorbu Mosera už predtým, ale poznamenal, že si jeho kresbu pridá do svojej malej zbierky iných umelcov, ktorí podobným spôsobom tvorili pred ním [8].



Obr. 3. a) N. Syrettová: kresba v *The Yellow Book* (1896), b) K. Moser: návrh vzoru na papier, c) K. Moser: *Trout dance* (okolo roku 1900).⁹⁾

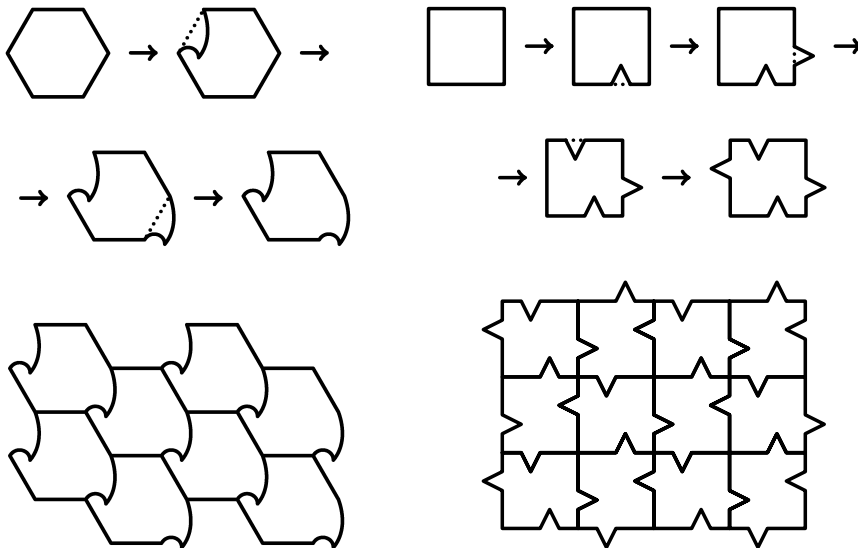
Postupy pre vytvorenie escherovských teselácií som naučila žiakov primy osemročného gymnázia¹⁰⁾ počas dvoch vyučovacích hodín matematiky. Najprv som predviedla postupy s použitím posunutia a otočenia – napríklad obr. 4, a potom som im zadala úlohu – nakresliť obrázok, v ktorom sa bude opakovať bez medzier a prekrytí jeden útvar vytvorený na základe predvedených postupov (podkladom bola štvorcová a šesťuholníková sieť).

sa dôraz kládol na estetiku a dekadenciu. Všetkých 13 čísel je možné nájsť na adrese en.wikipedia.org/wiki/The_Yellow_Book [stránka aktuálna k 23. 4. 2010].

⁸⁾ Koloman (Kolo) Moser (1868–1918), rakúsky maliar, architekt a dizajnér, predstaviteľ viedenskej secesie. V roku 1897 bol spoluzakladateľom *Vienna Secession* (Spoločnosť revolučných umelcov a architektov), ktorej prvým prezidentom sa stal Gustav Klimt, no v roku 1905 ju spolu opustili. Moserova tvorba bola veľmi rôznorodá – od módnych návrhov a ilustrácií v knihách a časopisoch, cez keramiku, nábytok alebo šperky, a výrazne ovplyvnila dizajn úžitkových predmetov dennej potreby.

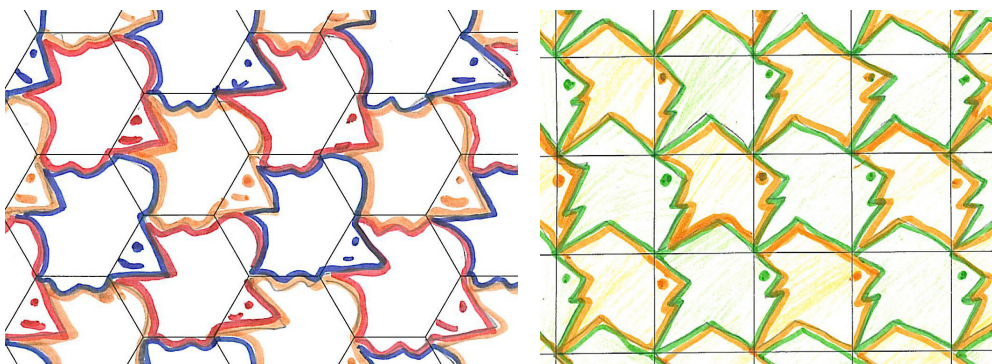
⁹⁾ Obrázok je prevzatý zo stránky www.cromp.com/tess/people/T23.shtml [stránka aktuálna k 23. 4. 2010].

¹⁰⁾ Gymnázium J. Gutha-Jarkovského, Truhlárska 22, Praha 1. Ukážka postupov a vytváranie escherovských teselácií prebehlo v rámci experimentu z mojej dizertačnej práce [3] zameranej na analýzu rôznych typov teselácií nakreslených žiakmi základnej a strednej školy.



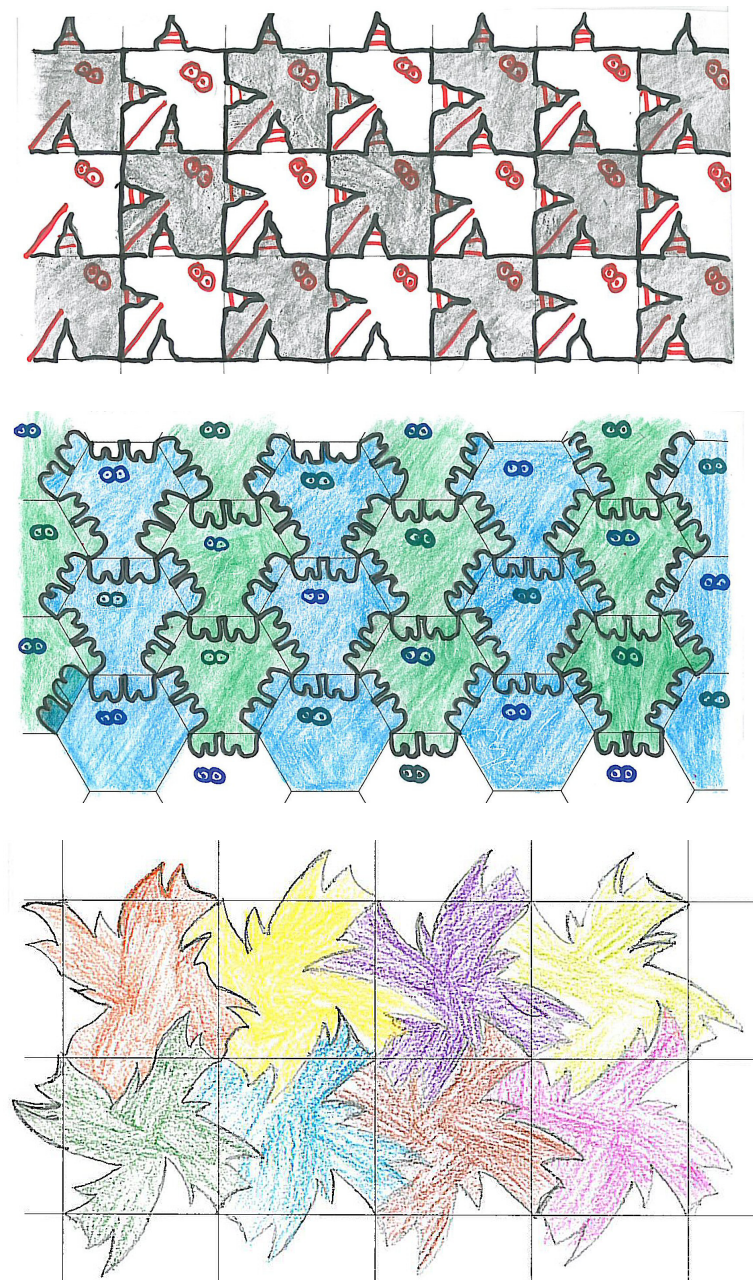
Obr. 4. Predvedené postupy pre vytváranie escherovských teselácií s použitím posunutia a otočenia.

Napriek tomu, že žiaci sa na hodinách matematiky ešte téme zobrazenia nevenovali, pojmom posunutie a otočenie rozumeli. Je síce pravda, že nie všetci žiaci nakreslili teselácie (niekedy sa na ich obrázkoch opakoval geometrický motív vytvárajúci vzor¹¹), ale nebola to teselácia), resp. často základný opakujúci útvar v teselácii mal jednoduchý tvar, ale vyskytli sa aj teselácie ukazujúce veľkú tvorivosť a predstavivosť žiakov. Na obr. 5 sú ukážky teselácií, pri kreslení ktorých žiaci použili posunutie, na obr. 6 otočenie.



Obr. 5. Escherovské teselácie, pri kreslení ktorých žiaci použili posunutie deformovanej strany o vzdialenosť protiláhlych strán.

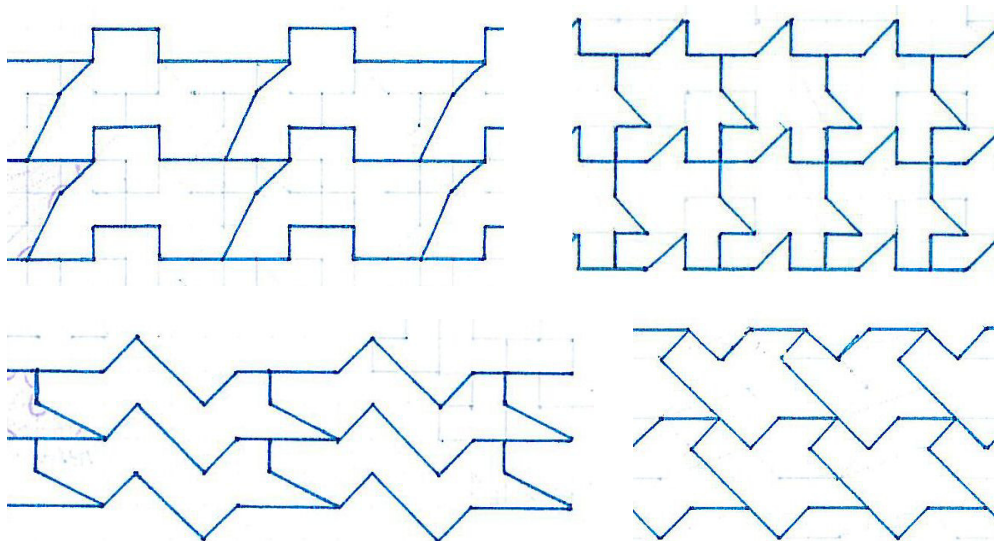
¹¹) Vzorom sa nazýva pravidelné opakovanie ľubovoľného geometrického motívu, takže escherovská teselácia je špeciálnym prípadom vzoru.



Obr. 6. Teselácie, pri kreslení ktorých žiaci využili otočenie deformovanej strany okolo vrcholu útvaru o 90° (pri štvorci) a 120° (pri pravidelnom šesťuholníku).¹²⁾

¹²⁾ Otočenie bolo použité najmä pri vytvorení jedného základného útvaru alebo niekoľkých; vytvorenie celej teselácie bolo vo väčšine prípadov založené na použití posunutia alebo na základe symetrie.

Podobnú aktivitu som vyskúšala aj so študentmi štvorročného gymnázia¹³⁾ pri téme *Zobrazenia v rovine*. Tých síce Escherove grafiky veľmi zaujali, k vlastnej tvorbe boli ale apatickí, a výsledkom ich kreslenia boli jednoduché escherovské teselácie. Neskôr sme sa ale venovali problematike teselácií, ktoré vzniknú opakovaním jedného mnohouholníka.¹⁴⁾ Pri vytváraní takýchto teselácií, resp. ich základného opakujúceho sa útvaru, študenti použili na moje počudovanie (okrem iného) práve escherovské postupy, ktorými vytvorili zložité mnohouholníkové útvary. Nápady jednej zo študentiek sú na obr. 7.



Obr. 7. Mnohouholníkové teselácie nakreslené na štvorcovej sieti na základe postupov pre vytvorenie escherovských teselácií (študentka 3. ročníka štvorročného gymnázia).

Na konci by som sa chcela pozastaviť pri otázke, akým žiakom bol Escher v matematike. Je pravdou, že v školskom veku nepatrila k jeho obľúbeným predmetom, v dospelosti sa ale snažil v geometrii vzdelávať. V roku 1936 ho nevlastný brat Beer¹⁵⁾ upozornil na súvislosť medzi teseláciami a kryštalografiou a odporúčal mu pozrieť časopis *Zeitschrift für Kristallographie*. O pár dní neskôr mu brat k danej problematike poslal zoznam desiatich článkov, všetky boli napísané v nemčine a publikované v spomínanom časopise. Väčšina z nich bola pre laikov príliš odborná, ale jeden z nich Eschera zaujal. Bol to článok Georgea Pólyu o 17 rovinných grupách symetrií,¹⁶⁾ v ktorom Pólyu

¹³⁾ Gymnázium B. Bolzana, V Holešovičkách 2, Praha 8 (od školského roku 2009/10 zrušené).

¹⁴⁾ Vo všeobecnosti platí, že opakovaním ľubovoľného trojuholníka alebo štvoruholníka v rovine je možné vytvoriť teseláciu. Pre ďalšie mnohouholníky je tvrdenie zložitejšie; viď napríklad [10].

¹⁵⁾ Berend (Beer) G. Escher bol profesorom geológie, paleontológie a kryštalografie na univerzite v Leidene.

¹⁶⁾ PÓLYA, G.: *Über die Analogie der Kristallsymmetrie in der Ebene*. *Zeitschrift für Kristallographie* 60 (1924), 278–282.

predložil reprezentantov jednotlivých grúp symetrií vo forme teselácií.¹⁷⁾ Escher, aby pochopil ich geometrickú štruktúru, t. j. vzájomné usporiadanie jednotlivých ciel, tieto teselácie študoval. Napriek vážnemu záujmu Eschera o kryštalografickú literatúru mu ale použité systémy a označenia nevyhovovali. Preto si vypracoval vlastný systém, ktorý opísal v 40-stránkovej knihe s farebnými ilustráciami vydané v roku 1958 pod názvom *Regelmätige Vlakverdeling* [Pravidelné delenie roviny].¹⁸⁾

Escherovu tvorbu obdivujú nielen laici, ale i odborníci z radov umelcov či matematikov. A dovoľm si napísať, že jeho teselácie boli aj vďaka matematike, resp. geometrii, také tvorivé a zaujímavé. Sám Escher o sebe povedal [1]: „Hoci nemám žiadne vzdelanie v exaktných vedách, často sa mi zdá, že mám viac spoločného s matematikmi ako s mojimi kolegami – umelcami.“

Naučiť deti na základnej škole kresliť escherovské teselácie odkrývajúce široké možnosti využitia zhodných zobrazení a tvorivosti je tak príležitosťou niektorým z nich stať sa umelcami a preukázať schopnosti, ktoré by inak zostali skryté.

L i t e r a t ú r a

- [1] BOOL, F. H., ERNST, B., KIST, J. R., LOCHER, J. L., WIERDA, F.: *Escher. The Complete Graphic Work*. Thames & Hudson, New York 2000.
- [2] CROMPTON, A.: *Lifelike Tessellations*. In McKennan, G. (ed.): *Manchester Architectural Papers*. The Manchester School of Architecture, 2000, 17–24.
- [3] ČSACHOVÁ, L.: *Pravidelné a náhodné teselácie vo vyučovaní matematiky*. Dizertačná práca. PedF UK, Praha 2010.
- [4] DAEMS, J.: *Escher ako matematik*. PMFA 54 (2009), 33–40.
- [5] ESCHER, M. C.: *M. C. Escher, Grafika a kresby*. Taschen, Köln 2003, 11.
- [6] ERNST, B.: *The Magic Mirror of M. C. Escher*. Random House, New York 1976.
- [7] GRÜNBAUM, B., SHEPHARD, G. C.: *Tilings and Patterns*. W. H. Freeman and Company, New York 1987.
- [8] HARGITAI, I., HARGITAI, M.: *In Our Own Image: Personal Symmetry in Discovery*. Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York 2000.
- [9] ILUCOVÁ, L.: *Rovinné grupy symetrií vo výtvarnom umení*. In Bečvář, J., Bečvářová, M. (eds.): *Sborník sylabů 29. mezinárodní konference historie matematiky, Velké Meziříčí 22.–26. 8. 2008*. Matfyzpress, Praha 2008, 123–130.
- [10] ILUCOVÁ, L.: *História pentagonálnych teselácií*. In J. Bečvář, M. Bečvářová (eds.): *Sborník sylabů 30. mezinárodní konference historie matematiky, Jevíčko 21.–25. 8. 2009*. Matfyzpress, Praha 2009, 128–133.
- [11] SCHATTSCHNEIDER, D.: *The Pólya–Escher Connection*. *Math. Magazine* 5, Vol. 60 (1987), 293–298.

¹⁷⁾ O rovinných grupách symetrií bližšie informácie napríklad v [7], o vplyve Pólyovho článku na Eschera v [11] a stručnej histórii odvodenia 17 rovinných grúp symetrií sa venuje napríklad príspevok [9].

¹⁸⁾ Táto esej bola napísaná na požiadanie súkromného vydavateľstva De Roos Foundation (text je možné nájsť v anglickom preklade v [1]).