Ivan Hlaváček; Eliška Vejchodská
Matematické modely oceňování amerických kupních opcí

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 55 (2010), No. 2, 133–138

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/141948

Matematické modely oceňování amerických kupních opcí

Ivan Hlaváček, Eliška Vejchodská, Praha

Zajímavým příkladem pronikání moderního matematického aparátu do nejrůznějších oborů lidské činnosti je oceňování některých finančních derivátů. Tak časový průběh ceny (hodnoty) americké kupní opce byl simulován jako „problém s volnou hranicí" pro jistou degenerovanou parabolickou diferenciální rovnici. Za tento objev dostali Merton a Scholes [11], [4] Nobelovu cenu v ekonomii roku 1997. Zmíněný problém vede pak na variační nerovnici, což umožňuje konstrukci přibližných řešení pomocí kombinace metody konečných prvků a konečných diferencí v časové souřadnici [3], [1], [12].

Cílem tohoto článku není úvod do teorie finančních derivátů a amerických opcí zvláště, nýbrž pouze krátký náhled do matematické simulace této problematiky v současnosti. Výklad je zaměřen na odborníky, kteří se vyznají v matematické analýze a numerických metodách. Čtenář si však zaslouží alespoň základní informace o kupních opcích.

Americké kupní opce patří mezi finanční deriváty. Finanční deriváty jsou smlouvy obsahující jistý závazek ohledně určitého podkladového (bazického) instrumentu, kterým jsou např. cenné papíry, měnové kurzy apod. Deriváty mají termínový charakter, tj. doba vypořádání smluveného obchodu (např. koupě akcií) je odložena do budoucnosti. Tím, jak se v průběhu platnosti derivátu mění hodnota podkladového instrumentu, mění se i hodnota derivátu. Zároveň platí, že deriváty vyžadují žádnou nebo nízkou počáteční investici oproti jiným kontraktům reagujícím podobně na změnu tržních podmínek [6], [8]. Deriváty jsou nástroje s nulovým součtem zisků a ztrát pro smluvní partnery, tj. pokud jeden subjekt má z derivátu zisk, druhý nese ekvivalentní ztrátu [8].

Deriváty se rozšířily především v 80. a 90. letech minulého století. Jejich původní zamýšlenou funkcí byla především ochrana před určitými tržními riziky. Jak ovšem uvádí Jílek [8], skutečná situace je zcela jiná. Hlavními hnacími silami rozvoje derivátů jsou podle něj maximalizace zisku bank na úkor klientů, (myslí se tím např. záměrné vnucování nevýhodných derivátů podnikům), daňové podvody, tunelování jedněch subjektů jinými prostřednictvím nevýhodných derivátů, spekulace a až v poslední řadě zajišťování se vůči riziku.

Mnohé subjekty se podle Jílka s deriváty pouštějí na tenký led. Buď u nich neexistují odborníci, kteří by je uměli ocenit, nebo investují do příliš rizikových druhů derivátů.

Ing. Ivan Hlaváček, DrSc., Matematický ústav AV ČR, v.v.i., Žitná 25, 115 67 Praha 1, e-mail: `hlavacek@math.cas.cz`

Ing. Eliška Vejchodská, Ph. D., Národohospodářská fakulta VŠE v Praze, Náměstí W. Churchilla 4, 130 67 Praha 3, e-mail: `vejchode@vse.cz`

Z toho vyplývají značné ztráty, které nakonec mohou zaplatit daňoví poplatníci, jako tomu bylo v 90. letech při krytí ztrát českých bank z úvěrových derivátů (tj. derivátů, pomocí nichž se převádí úvěrové riziko). Také americká energetická firma Enron doplatila v r. 2001 krachem mj. na angažmá v derivátech. Jílek nabádá spíše k obezřetnosti při využívání derivátů a nabádá jednotlivce tíhnoucí k hazardu raději k využívání loterií, které nejsou pro ekonomiku státu nebezpečné tak, jako je hazard právnických osob. I přes výše zmíněné nebo možná právě proto je důležité oceňování finančních derivátů porozumět a dále pro ně rozvíjet použitelné matematické modely. Finanční deriváty totiž tvoří významnou složku transakcí mnoha velkých institucí.

Americká kupní opce je jako ostatní deriváty smlouvou mezi dvěma partnery. Kupující této opce má právo (ale nikoli povinnost) koupit určitý podkladový instrument (např. akcie) za předem dohodnutou (realizační) cenu v průběhu dohodnutého časového intervalu. Kupující platí prodávajícímu tzv. opční prémii (tj. cenu, za kterou si opci koupí) jako odměnu za znevýhodněnou pozici prodávajícího [6], [8]. Během své životnosti mění opce svou hodnotu (cenu) na základě změny ceny podkladového instrumentu a dalších parametrů. Do této ceny se již nijak nezobrazuje opční prémie. Tu je možné považovat za utopený (neboli již ztracený) náklad. Pomocí různých oceňovacích modelů můžeme cenu opce v určitém okamžiku během její životnosti vypočítat.

Dále uvedeme některé matematické modely americké kupní opce, kde je podkladovým instrumentem akcie, tzn. do modelu je zahrnuta i výplata dividend. Vyjdeme z „úlohy s volnou hranicí“ [4], [11]. Jde o parabolickou rovnici

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - (r-d)\,x\frac{\partial w}{\partial x} + r\,w \,=\, 0, \qquad (x,t) \in D, \tag{1}$$

s počáteční podmínkou

$$w\,(x,0) = (x-Z)^+ \tag{2}$$

a okrajovými podmínkami

$$w\,(0,t) = 0, \tag{3}$$

$$w\,(s\,(t)\,,t) = (s\,(t) - Z)^+\,, \tag{4}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}\,(s\,(t)\,,t) = 1, \tag{5}$$

kde

$$D = \{(x,t) : 0 < x < s\,(t)\,,\, t \in (0,T]\}\,. \tag{6}$$

Význam jednotlivých označení:

$s(t)$ je neznámá funkce (součást řešení úlohy), popisující „volnou hranici“ (optimální realizační křivku),
$w =$ cena americké kupní opce,
$x =$ cena podkladového (bazického) instrumentu,
$T =$ celková doba platnosti smlouvy,
$t = T - t_r$, kde t_r je reálný čas od začátku platnosti smlouvy, tzn. zbývající

životnost opčního kontraktu, nebo také splatnost opce,
$\sigma =$ volatilita ceny podkladového instrumentu, tj. poměr standardní odchylky ceny podkladového instrumentu a střední hodnoty ceny podkladového instrumentu,
$r =$ bezriziková úroková míra,
$d =$ míra výnosu z akcie výplatou dividend (obdoba úrokové míry),
$Z =$ předem stanovená cena podkladového instrumentu (realizační cena),
$(x - Z)^+ = \max\{0, x - Z\} =$ funkce výnosu z opce.

Poznamenejme, že T, σ, r, d, Z jsou předem dané kladné konstanty.

Zavedeme-li novou funkci, tzv. časovou hodnotu kupní opce

$$u(x,t) = w(x,t) - (x - Z)^+,$$

můžeme definovat tzv. *slabé řešení* $u(x,t)$ problému (1)–(6), (viz [2]):
Protože existuje konstanta S_0 taková, že

$$s(t) \leqq S_0$$

pro všechna $t \in I \equiv [0,T]$, můžeme zvolit libovolné $S \geqq S_0$, definovat $\Omega \equiv (0,S)$ a slabé řešení na obdélníku $\Omega \times I$ jako funkci

$$u \in \left\{v \in L^2\left(I; H_0^1(\Omega)\right) : x^{-1}\partial_t v \in L^2\left(I; L^2(\Omega)\right)\right\} \tag{7}$$

takovou, že kromě počáteční podmínky

$$u(x,0) = 0, \tag{8}$$

platí

$$\left(x^{-2}\partial_t u, v\right) + a(u,v) + (qH(u), v) = \sigma^2 v(Z)/2 \tag{9}$$

pro všechna $v \in H_0^1(\Omega)$ a skoro všechna $t \in I$, kde

$$a(u,v) = 2^{-1}\sigma^2(\partial_x u, \partial_x v) - (r-d)(\partial_x u, x^{-1}v) + r(x^{-1}u, x^{-1}v),$$
$$(f,g) = \int_\Omega fg\,\mathrm{d}x,\ q(x) = (x^{-1}d - x^{-2}rZ)H(x - Z),$$
$$\partial_t \equiv \partial/\partial t,\ \partial_x \equiv \partial/\partial x$$

a $H(\cdot)$ je Heavisideova funkce.

V definici se využívá toho, že podle (4) je $u(s(t),t) = 0$, takže funkci u lze rozšířit nulou na oblast $(\Omega \times I)\backslash D$ a definovat slabé řešení na celém obdélníku $\Omega \times I$. Snadno se ověří, že každé řešení původní úlohy (1)–(6), rozšířené nulou, je slabým řešením.

Badea a Wang [2] dokázali, že:
existuje právě jedno slabé řešení $u(x,t)$,
$x^{-1}u \in L^\infty(I; L^2(\Omega))$, $\partial_x u \in L^\infty(I; L^2(\Omega))$,
$u \geqq 0$ a $\partial_t u \geqq 0$ v $\Omega \times I$,

$u > 0$ v D a $u = 0$ v $(\Omega \times I)\backslash D$,
$Z \max(r/d, 1) \leqq s(t) \leqq S_0$ pro všechna $t \in I$,
$S_0 = Z\lambda/(\lambda - 1)$, kde
$\lambda = \sigma^{-2}(\sigma^2/2 - r + d + [(\sigma^2/2 - r + d)^2 + 2r\sigma^2]^{1/2})$,
hodnoty $u(x,t)$ v D nezávisí na volbě konstanty S.

Celkem snadno se dá odvodit (viz [3]), že slabé řešení $u \in K$ pro všechna $t \in I$ vyhovuje pro skoro všechna $t \in I$ a všechna $v \in K$ parabolické variační nerovnici

$$(x^{-2}\partial_t u, v - u) + a(u, v - u) + \int_Z^S q(v - u)\,\mathrm{d}x \ \geqq\ \sigma^2(v(Z) - u(Z))/2 \tag{10}$$

a počáteční podmínce

$$u(x, 0) = 0, \tag{11}$$

kde

$$K = \{v \in H_0^1(\Omega) : v(x) \ \geqq\ 0 \ \text{ pro } \ x \in \Omega\}. \tag{12}$$

Na základě variační formulace (10)–(11) se dá dokázat (viz [7]), že řešení závisí spojitě na parametru volatility σ. Tento parametr je totiž jediný, který není přímo pozorovatelný na finančním trhu. Spojitost je dokázána jednak v prostoru $L^2(I; H_0^1(\Omega))$ a jednak pro $x^{-1}u(t)$ a skoro všechna $t \in I$ v prostoru $L^2(\Omega)$.

Problém (10)–(11) lze využít také ke konstrukci *numerické metody řešení* (viz [3]), jestliže napřed symetrizujeme bilineární formu $a(u, v)$.

Efektivnější způsob řešení spočívá ve vhodné transformaci proměnných (viz [1]), která redukuje parabolický operátor v rovnici (1), resp. v (10), na operátor rovnice vedení tepla (s konstantními koeficienty).

Definujeme-li tedy nové proměnné

$$\xi = \ln(x/Z),\ \ \tau = \sigma^2 t/2, \tag{13}$$

$$\tilde{T} = \sigma^2 T/2,\ \ \alpha = (r - d)\sigma^{-2} - 1/2,\ \ \beta = \alpha^2 + 2r\sigma^{-2}, \tag{14}$$

odvodíme novou úlohu s volnou hranicí

$$\partial_t u - \partial_{\xi\xi} u = f,\ u > 0 \,\text{pro}\, 0 < \xi < \xi^*(\tau),\ \tau \in (0, \tilde{T}), \tag{15}$$

$$u = 0 \ \text{pro} \ \xi^*(\tau) \leqq \xi \leqq X,\ \ u(\xi, 0) = 0 \ \text{pro} \ \xi \in [0, X] \tag{16}$$

s okrajovými podmínkami

$$\partial_\xi u(0, \tau) = A\, u(0, \tau) - b(\tau), \tag{17}$$

$$u(\xi^*(\tau), \tau) = 0, \tag{18}$$

$$\partial_\xi u(\xi^*(\tau), \tau) = 0, \tag{19}$$

pro všechna $\tau \in [0, \tilde{T}]$.

V podmínce (17) však vystupuje nelokální integrální operátor

$$A\, u(0, \tau) = \pi^{-1/2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \int_0^\tau (\tau - z)^{-1/2} u(0, z)\,\mathrm{d}z$$

a dále

$$b(\tau) = \exp(\beta\tau);$$

v rovnici (15) je

$$\begin{aligned} f(\xi,\tau) &= 2\sigma^{-2}(r - d\exp\xi)\exp(\alpha\xi + \beta\tau), \\ X &= \ln(S_0/Z). \end{aligned}$$

Operátor $A : H^{1/4}(J) \to H^{-1/4}(J)$ je pozitivně definitní isomorfismus, kde jsme označili $J \equiv (0,\tilde{T})$. Pro funkce $v \in H^{1/4}(J)$ takové, že $v(0) = 0$, platí

$$Av(\tau) = B\partial_\tau v(\tau), \tag{20}$$

$$B\varphi(\tau) = \pi^{-1/2}\int_0^\tau (\tau - z)^{-1/2}\varphi(z)\,\mathrm{d}z, \tag{21}$$

což lze odvodit z fundamentálního řešení standardní rovnice pro vedení tepla. Vztah (20) se pak využívá při aplikaci metody konečných prvků.

Problém (15)–(19) vede k následující definici prostřednictvím variační nerovnice na obdélníku $(0,X)\times(0,\tilde{T})$ (viz [1]):

Označíme-li $\tilde{\Omega} = (0,X)$, zavedeme prostory

$$H_E^1(\tilde{\Omega}) = \{v \in H^1(\tilde{\Omega}) : v(X) = 0\}, \tag{22}$$

$$Y = \{v \in L^2(J; H_E^1(\tilde{\Omega})) : v(0,\tau) \in H^{1/4}(J),\ v \geqq 0 \text{ na } \tilde{\Omega}\times J\} \tag{23}$$

a bilineární formu

$$\tilde{a}(u,v) = \int_{\tilde{\Omega}} \partial_\xi u\,\partial_\xi v\,\mathrm{d}\xi,$$

máme najít $u \in Y$ takové, že $\partial_\tau u \in L^2(J; L^2(\Omega))$, $u(\xi,0) = 0$ a pro všechna $v \in Y$ platí

$$\int_J [(\partial_\tau u,\, v-u) + \tilde{a}(u,\, v-u)]\,\mathrm{d}\tau + \langle Au,\, v-u\rangle \geqq \int_J (f,\, v-u)\,\mathrm{d}\tau + \langle b,\, v-u\rangle\,. \tag{24}$$

(Zde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ značí duální párování prostorů $H^{-1/4}$ a $H^{1/4}$.)

Výhodou této formulace je, že X je v praxi podstatně menší než S_0, takže řešení se hledá na velmi úzkém obdélníku.

Allegretto a kol. [1] navrhli numerické řešení úlohy (24) na základě metody konečných prvků v intervalu $\tilde{\Omega}$ a zpětných diferencí v intervalu J. Uvažovali standardní prostory $V_h \subset H_E^1(\tilde{\Omega})$ konečných prvků, definovali množiny

$$K_h = \{v \in V_h : v \geqq 0\}, \tag{25}$$

$$Y_{hk} = \Big\{v = \sum_{n=0}^{N} v_n\chi_n(\tau),\ v_n \in K_h\Big\}, \tag{26}$$

kde χ_n značí charakteristickou funkci intervalu $(\tau_{n-1},\tau_n]$, přičemž

$$\tau_n - \tau_{n-1} \equiv k = \tilde{T}/N,$$

jako aproximace množiny K a prostoru Y. Autoři článku [1] vypracovali i teorii odhadů příslušných chyb numerického řešení.

Na tyto výsledky navázali Lin, Liu a Zhang v článku [12]. Za určitých předpokladů o regularitě přesného řešení dokázali pro aproximace navržené v práci [1] superkonvergenci numerického řešení. Studovali také „postprocessing“ pomocí interpolace po částech kvadratickými polynomy. Závěrem poznamenejme, že existuje celá řada dalších numerických aproximací oceňování amerických opcí, jako např. tzv. binomiální metoda, Monte Carlo simulace, metoda konečných diferencí, genetické algoritmy, metody rozkladu oblasti aj. – viz citace asi patnácti článků v práci [12]. V našem příspěvku jsme se omezili jen na některé postupy, které se vyznačují solidním matematickým základem spolu s odhady chyb.

První z autorů děkuje za podporu grantem IAA 100190803 Akademie věd České republiky.

L i t e r a t u r a

[1] Allegretto, W., Lin, Y., Yang, H.: *Finite element error estimates for a nonlocal problem in American option valuation.* SIAM J. Numer. Anal. *39* (2001), 834–857.

[2] Badea, L., Wang, J.: *A new formulation for the valuation of American options, I. Solution uniqueness, II. Solution existence.* Analysis and Scientific Computing, Eun-Jae Park and Jongwoo Lee (eds), (2000), 3–33.

[3] Badea, L.: *On the valuation of American options.* Annals of University of Craiova, Math. Comp. Sci. Ser. *31* (2004), 91–97.

[4] Black, F., Scholes, M.: *The pricing of options and corporate liabilities.* J. Polit. Econ. *81* (1973), 637–659.

[5] Duvaut, G., Lions, J. L.: *Les inéquations en mécanique et en physique.* Dunod, Paris, 1972.

[6] Dvořák, P.: *Deriváty.* Skriptum VŠE, Praha 2006.

[7] Hlaváček, I.: *Valuation of American call option considering uncertain volatility.* Adv. Appl. Math. Mech. (to appear).

[8] Jílek, J.: *Finanční a komoditní deriváty.* Grada, Praha, 2002.

[9] Kwok, Y. K.: *Mathematical models of financial derivatives.* Springer, Singapore, (2nd ed.), 2008.

[10] Málek, J.: *Risk management.* Skriptum VŠE, Praha 2008.

[11] Merton, R. C.: *Theory of rational option pricing.* Bell J. of Economics and Management Science *4* (1973), 141–183.

[12] Lin, Q., Liu, T., Zhang, S.: *Superconvergence estimates of finite element methods for American options.* Appl. Math. *54* (2009), 181–202.