Lucia Csachová

Pentagonálne teselácie

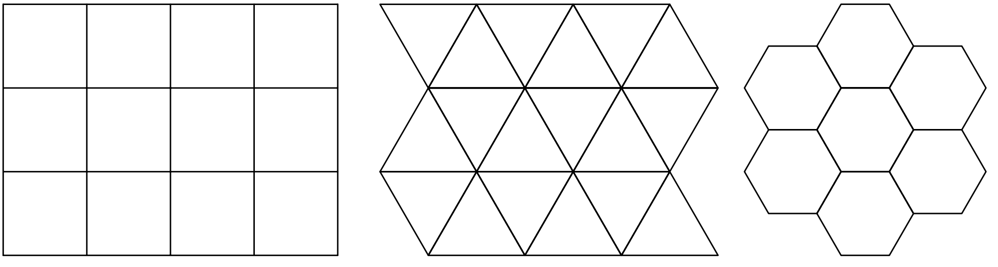
Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 55 (2010), No. 2, 125–132

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/141947

Pentagonálne teselácie

Lucia Csachová, Praha

Odpoveď na otázku, ktorý pravidelný mnohouholník vytvára monoedrálnu rovinnú teseláciu[1]), je z hľadiska školskej matematiky jednoduchá: je to štvorec, rovnostranný trojuholník a pravidelný šesťuholník (obr. 1).[2]) Takisto známe a jednoducho dokázateľné je, že ľubovoľný štvoruholník (aj nekonvexný) vytvára rovinnú teseláciu, a ľubovoľný trojuholník takisto (obr. 2, 3). Problematika vytvárania monoedrálnych teselácií opakovaním jedného konvexného n-uholníka s $n \geqq 5$ už ale nie je taká jednoduchá. Ako z predchádzajúcich riadkov vyplýva, pravidelný päťuholník nepatrí k útvarom, ktoré je možné využiť pre vytvorenie teselácie, ale niektoré ďalšie konvexné päťuholníky áno.



Obr. 1. Monoedrálne rovinné teselácie vytvorené opakovaním zhodných pravidelných mnohouholníkov.

Na druhej strane pravidelný šesťuholník teseláciu vytvára, ale neplatí to pre každý šesťuholník. Žiaden konvexný n-uholník s $n \geqq 7$ už ale monoedrálnu rovinnú teseláciu nevytvára. Dôkaz tohoto tvrdenia pochádza od I. M. Nivena z roku 1978 [5]. Práve histórii riešenia problematiky pokrývania roviny konvexnými päťuholníkmi je tento príspevok venovaný.

---

[1]) Pod pojmom *monoedrálna teselácia* sa rozumie pokrytie roviny bez prekrytia opakovaním jedného uzavretého rovinného útvaru.

[2]) Dôvodom je, že len tieto pravidelné n-uholníky majú veľkosti vnútorných uhlov také, že ich celočíselný násobok je rovný 360° (rovnostranný trojuholník: $6 \times 60^\circ$, štvorec: $4 \times 90^\circ$, pravidelný šesťuholník: $3 \times 120^\circ$).

RNDr. Lucia Csachová, Ph. D., Matematický ústav AV ČR, Žitná 25, 115 67 Praha 1, e-mail: `lucia.csachova@gmail.com`.

Článok je upravenou verziou autorkinho príspevku prednesenom na *30. mezinárodní konferenci historie matematiky*, Jevíčko 2009, a publikovaný v príslušnom zborníku [3].

Objav, ktoré konvexné šesťuholníky vytvárajú monoedrálnu rovinnú teseláciu, je pripisovaný Karlu Augustovi Reinhardtovi (1895–1941), ktorého dizertačná práca *Über die Zerlegung der Ebene in Polygone*[3]) z roku 1918 obsahuje úplné riešenie tohoto problému.[4]) Odvodil, že rovinné teselácie vytvárajú tri typy konvexných šesťuholníkov (obr. 4), pričom pod „typom" sa všeobecne rozumie množina mnohouholníkov, ktoré vyhovujú určitým podmienkam pre veľkosť strán a vnútorných uhlov.

Objavovanie konvexných teselujúcich päťuholníkov je ale ságou, ktorá trvala niekoľko desaťročí. Po prvýkrát sa klasifikácia päťuholníkov vytvárajúcich monoedrálne teselácie v rovine objavila takisto v Reinhardtovej dizertačnej práci, v ktorej stanovil päť[5]) rôznych skupín požiadavok pre uhly a strany daného päťuholníka, a každá z nich tak definuje jeden teselujúci typ päťuholníka. (Pre päťuholníky tohoto typu existuje veľa rozličných teselácií.) Podľa [6] Reinhardt nepochyboval, že vytvoril kompletné riešenie tohoto problému, ale nevedel dokázať, že každý teselujúci päťuholník je možné určite zaradiť k jednému z daných piatich typov. Napriek tomu bol Reinhardt vo svojom odvodzovaní tak dôkladný, že sa jeho klasifikácia prijala ako finálny výsledok. Reinhardtovo tvrdenie potvrdili H. Heesch[6]) a O. Kienzle v roku 1963.[7]) O päť rokov neskôr ale R. B. Kershner z Johns Hopkins University oznámil, že našiel ďalšie tri typy päťuholníkov teselujúcich rovinu (použil metódu odlišnú od Reinhardtovej), a že spolu týchto osem typov nakoniec tvorí konečný zoznam [4].[8]) Aj toto rozšírenie sa neskôr ukázalo ako nie konečné.

V roku 1975 v júlovom čísle časopisu *Scientific American* M. Gardner[9]) vo svojej rubrike publikoval Kershnerov zoznam ôsmych typov teselujúcich päťuholníkov. Vďaka

---

[3]) Reinhardt, K.: *Über die Zerlegung der Ebene in Polygone.* Dissertation der Naturwissenschaftlichen Fakultät, Königlichen Universität Frankfurt am M., Borna – Leipzig, 1918. Dizertačnú prácu písal K. A. Reinhardt pod vedením L. Bieberbacha (1886–1982), ktorý je známy svojou prácou v oblasti dynamiky komplexných premenných.

[4]) Teselácie sú obsahom aj 18. Hilbertovho problému, v ktorom sa rieši otázka vyplnenia priestoru bez medzier zhodnými polyédrami. Časť tohoto problému vyriešil práve L. Bieberbach, časť K. A. Reinhardt v roku 1928 (Reinhardt, K.: *Zur Zerlegung der euklidischen Räume in kongruente Polytope.* Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften Berlin, Physikalisch-Mathematische Klasse, 1928, 150–155), podstatná časť je doteraz nevyriešená.

[5]) V skutočnosti Reinhardt odvodil osem typov teselujúcich päťuholníkov, ale prvé tri typy sú považované za špeciálne prípady troch typov teselujúcich konvexných šesťuholníkov a je možné z nich dané šesťuholníky vytvoriť vložením ďalšieho vrcholu na jednu stranu [4]. Pre ostatných päť typov päťuholníkov to neplatí.

[6]) Heinrich Heesch (1906–1995), nemecký matematik, zaoberal sa teóriou grafov a teseláciami (po ňom sú pomenované pojmy ako napríklad Heeschova cela alebo Heeschovo číslo).

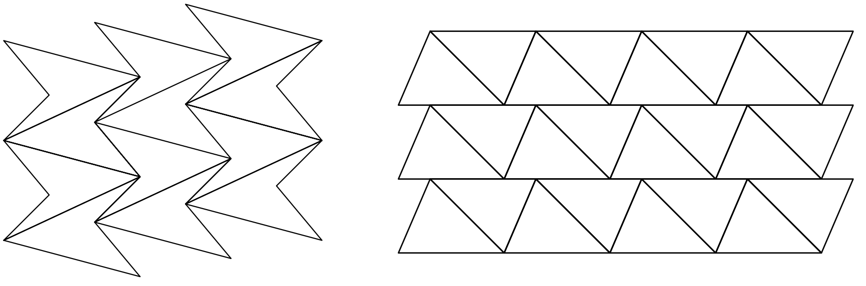
[7]) Heesch, H., Kienzle, O.: *Flächenschluss. System der Formen lückenlos aneinanderschliessender Flachteile.* Berlin – Göttingen – Heidelberg: Springer-Verlag, 1963.

[8]) Kershner napísal, že jeho dôkaz je príliš namáhavý a že ho bude publikovať čo najskôr niekde inde. (Pozn.: Či Kershner tento dôkaz publikoval neskôr, sa mi nepodarilo zistiť.)

[9]) Martin Gardner (1914), americký popularizátor matematiky. Počas 25 rokov (1956–1981) viedol rubriku *Matematické hry* v časopise *Scientific American*, vďaka ktorej priblížil krásu matematiky verejnosti a mnohých inšpiroval k práci nad matematickými problémami. Téme teselácií sa venoval niekoľkokrát vo svojej rubrike i v mnohých svojich knihách (je autorom viac než 60 kníh).

tomu tento problém znovuotvoril a oboznámil s ním širokú čitateľskú verejnosť, vrátane mnohých amatérov – matematikov. Prvým aktívnym čitateľom, ktorý Gardnerovi poslal svoje výsledky, bol Richard James, počítačový odborník z Kalifornie. Ten sa rozhodol už po prečítaní prvej časti článku otestovať svoje schopnosti a bez pomoci Kershnerovho zoznamu nájsť nejaké z päťuholníkových teselácií. Našiel päťuholník, ktorý v Kershnerovom zozname chýbal, a M. Gardner ho publikoval.

a) **b)**



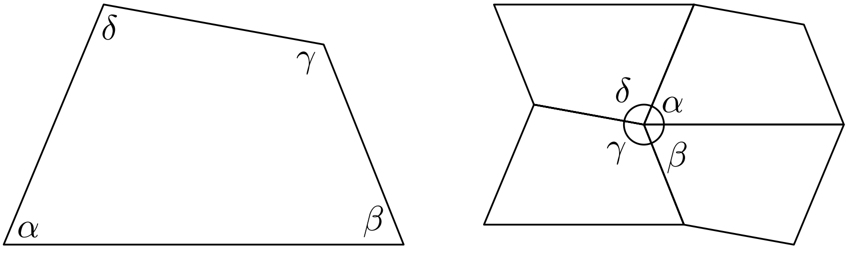
Obr. 2. a) Štvoruholníková teselácia vytvorená opakovaním nekonvexného štvoruholníka,
b) príklad trojuholníkovej teselácie.

Jednou z ďalších aktívnych čitateľov bola Marjorie Riceová[10]), ktorá čítala synom predplatený časopis a článok o Jamesových objavoch v *Scientific American* z decembra 1975 v nej vzbudil pozornosť. Tiež ju zaujal júlový článok o päťuholníkových teseláciách a už vtedy si myslela, aké zaujímavé to muselo byť pre Kershnera objaviť nové typy teselujúcich päťuholníkov. Ale až po objave Richarda Jamesa jej záujem natoľko vzrástol, že sa rozhodla zistiť, či je schopná nájsť nejaký ďalší päťuholníkový typ [6]. Marjorie si najprv spísala všetky informácie o daných deviatich typoch a snažila sa nájsť spoločné vzťahy, ktorým vyhovovali dané päťuholníky a príslušné teselácie. Vianoce v roku 1975 boli pre ňu veľmi náročné, pretože sa tomuto problému venovala aj pri práci v kuchyni, pričom sa snažila, aby to nikto nezistil a nemusela tak svoju činnosť nikomu vysvetľovať. V polovici februára 1976 Marjorie poslala svoje nákresy M. Gardnerovi. V tom čase sa začala vzájomná korešpondencia a priateľstvo medzi Marjorie a Doris Schattschneiderovou, ktorá sa stala nielen jej priateľkou ale aj konzultantkou.[11]) Doris posielala Marjorie články, ktoré sa v danom čase objavovali

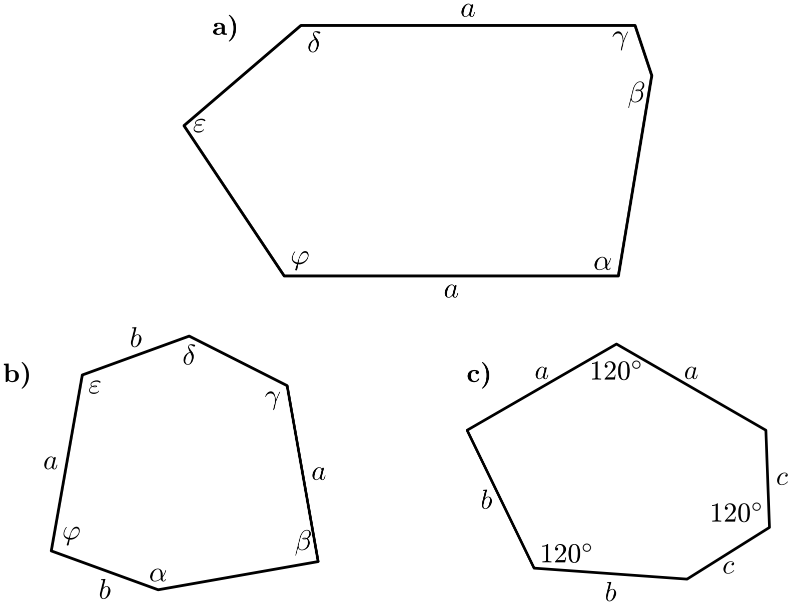
[10]) Marjorie Riceová (1923), matka piatich detí a žena v domácnosti zo San Diega. Po ukončení strednej školy, sa stala sekretárkou a neskôr sa vydala za svojho šéfa. Pri hľadaní typov teselujúcich päťuholníkov si vytvorila svoj vlastný systém označovania vyjadrujúci podmienky a vzťahy medzi dĺžkami strán a veľkosťami vnútorných uhlov.

[11]) Doris Schattschneiderová získala doktorát na Yaleskej univerzite v roku 1966. Učila na Northwestern University a University of Illinois v Chicago Circle, a od roku 1968 na Moravian College. Tu ju jej záujem o umenie priviedol k myšlienke vytvoriť kurz s názvom *Teselácie: Matematické umenie.* O tejto téme napísala veľa. Spolupracovala s grafikmi – umelcami na vytvorení knihy a kolekcie jedinečných geometrických modelov M. C. Eschera – *Kaleidocycles* (Schattschneider, D., Walker, W.: *Kaleidocycles.* Pomegranate Publications, Petaluma, CA 1987).

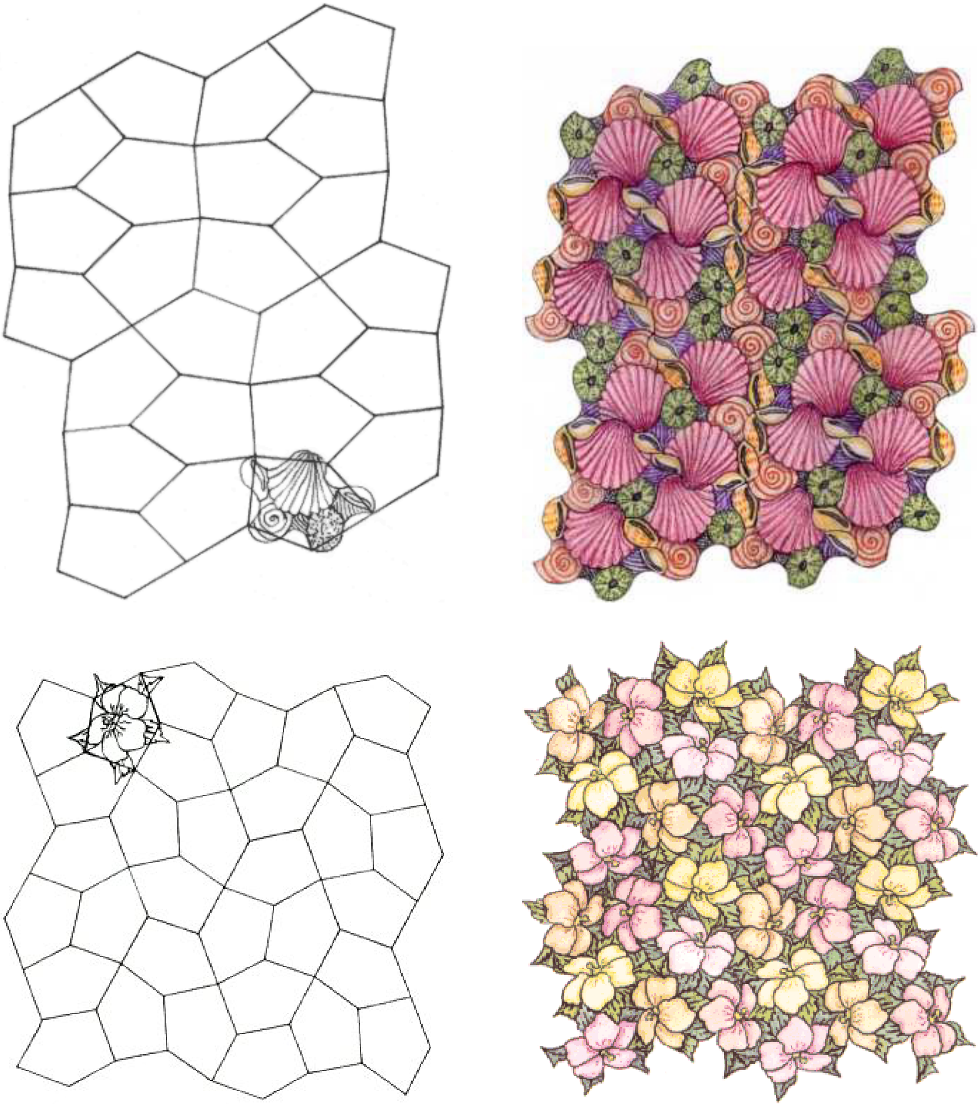
k danej problematike v odborných časopisoch, a Marjorie sa snažila napríklad šesťuholníkové cely rozdeliť tak, aby získala päťuholníkové. Bez formálneho matematického vzdelania, ale s nadšením sa jej podarilo počas obdobia dvoch rokov nájsť štyri nové typy teselujúcich päťuholníkov, pričom vzniknuté teselácie ešte dokreslila napríklad kvetinovým alebo zvieracím ornamentom, a viac než šesťdesiat topologicky rôznych päťuholníkových teselácií. Podrobný opis ako R. James alebo M. Riceová našli ďalšie typy teselujúcich päťuholníkov, je možné nájsť napríklad v [7].



Obr. 3. Pre súčet veľkostí vnútorných uhlov v ľubovoľnom štvoruholníku platí: $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$.



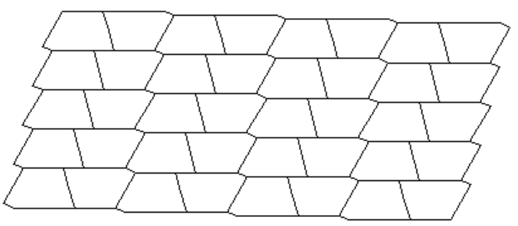
Obr. 4. Tri typy šesťuholníkov vytvárajúcich všetky monoedrálne rovinné teselácie. Podmienky, ktoré musia niektoré strany spĺňať, sú vyznačené v obrázku (strany s rovnakými dĺžkami sú označené rovnakými písmenami), podmienky pre veľkosti vnútorných uhlov sú nasledujúce: a) $\beta = 2\pi - \alpha - \gamma$, $\varepsilon = 2\pi - \delta - \varphi$, b) $\gamma = 2\pi - \delta - \varphi$, $\varepsilon = 2\pi - \alpha - \beta$, c) veľkosť troch vnútorných uhlov, ktoré zvierajú trojice zhodných strán, je 120°.



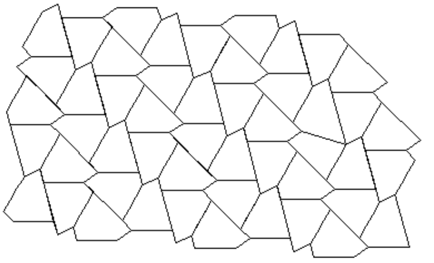
Obr. 5. Teselácie vytvorené opakovaním konvexných päťuholníkov, ktoré objavila a dokreslila zvieracím či rastlinným motívom Marjorie Riceová, obidva päťuholníky sú typu 2 (podmienka pre veľkosti vnútorných uhlov je $C + E = 180^\circ$, pre veľkosti strán $a = d$) [12]); pre prvý teselujúci päťuholník navyše platí, že všetky strany musia mať rovnakú dĺžku, v druhom okrem rovnakej dĺžky všetkých piatich strán je jeden z uhlov v podmienke ten najmenší zo všetkých piatich.[13])

[12]) Bližšie vysvetlenie označenia je v poznámke pod čiarou 14.

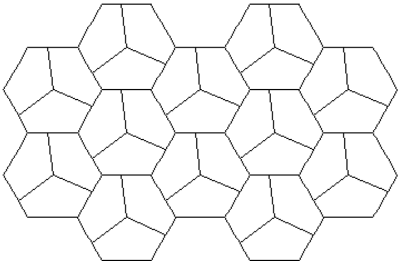
[13]) Obrázky sú prevzaté zo stránky M. Riceovej `home.comcast.net/~tessellations/tessellations.htm` [stránka aktuálna k 23. 4. 2010].



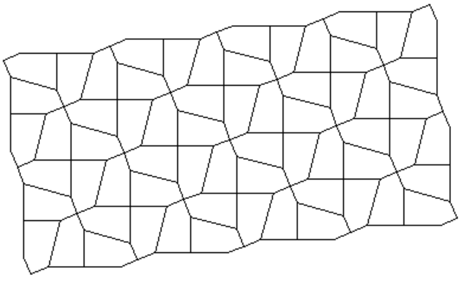
(1)



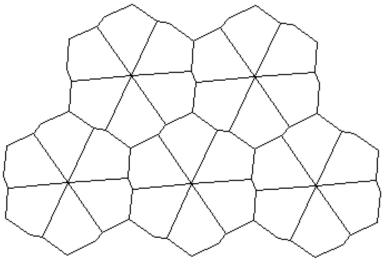
(2)



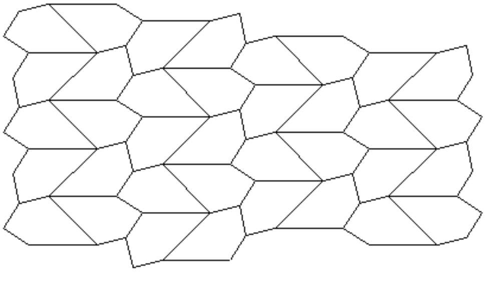
(3)



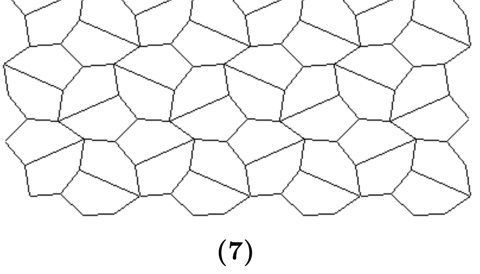
(4)



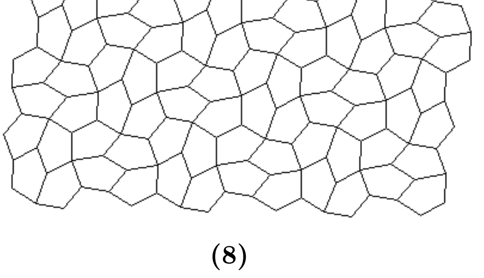
(5)



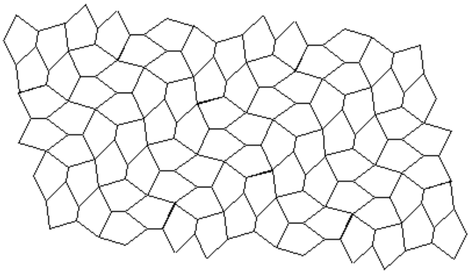
(6)



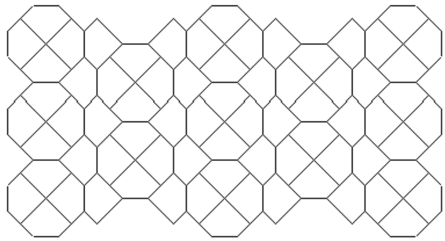
(7)



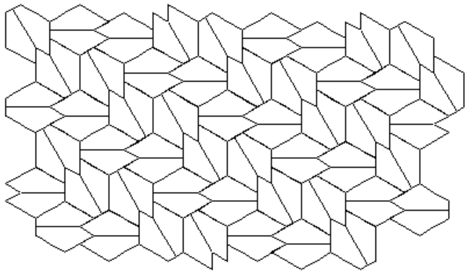
(8)



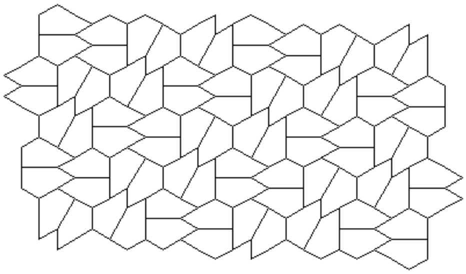
(9)



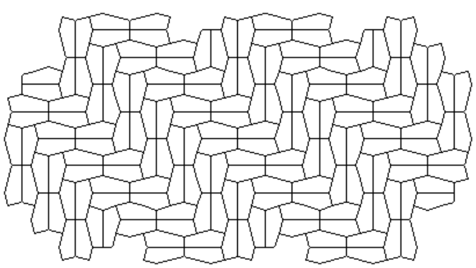
(10)



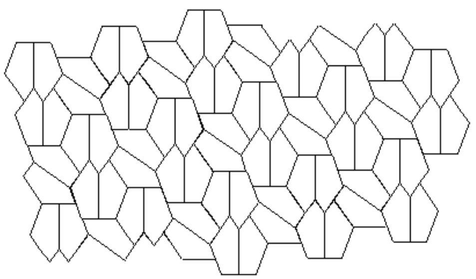
(11)



(12)



(13)



(14)

Obr. 6. Štrnásť typov päťuholníkov vytvárajúcich monoedrálne teselácie; teselácie 1 – 5 odvodil K. Reinhardt (1918), R. B. Kershner teselácie 6 – 8 (1968), R. James teseláciu 10 (1975), M. Riceová teselácie 9, 11 – 13 (1976–1977), R. Stein teseláciu 14 (1985).[14])

---

[14]) Obrázky sú prevzaté z internetovej stránky `www.mathpuzzle.com/tilepent.html` [stránka aktuálna k dňu 23. 4. 2010]. Podmienky pre dĺžky strán a veľkosti vnútorných uhlov jednotlivých typov sú nasledujúce (A, B, C, D, E – vnútorné uhly päťuholníka, a, b, c, d, e – strany päťuholníka, strana a je jedným ramenom uhla A, atď.; takéto označenie je napríklad použité v článku [5]) – **typ 1:** $D + E = 180°$, **typ 2:** $C + E = 180°$, $a = d$, **typ 3:** $A = C = D = 120°$, $a = b$, $d = c + e$, **typ 4:** $A = C = 90°$, $a = b$, $c = d$, **typ 5:** $C = 2A = 120°$, $a = b$, $c = d$, **typ 6:** $C + E = 180°$, $A = 2C$, $a = b = e$, $c = d$, **typ 7:** $2B + C = 360°$, $2D + A = 360°$, $a = b = c = d$, **typ 8:** $2A + B = 360°$, $2D + C = 360°$, $a = b = c = d$, **typ 9:** $2E + B = 360°$, $2D + C = 360°$, $a = b = c = d$, **typ 10:** $E = 90°$, $A + D = 180°$, $2B - D = 180°$, $2C + D = 360°$, $a = e = b + d$, **typ 11:** $A = 90°$, $C + E = 180°$, $2B + C = 360°$,

Zoznam trinástich typov teselujúcich päťuholníkov sa objavil už v roku 1978 v *Mathematics Magazine* v článku Doris Schattschneiderovej [6][15]) a D. C. Hunt a M. D. Hirschhorn v roku 1983 tvrdili, že dokázali jeho kompletnosť. Dôkaz dvojica publikovala v roku 1985 v renomovanom časopise *Journal of Combinatorial Theory.*[16]) V roku 1985 však objavil ďalší, štrnásty, teselujúci päťuholník Rolf Stein, študent z Univerzity v Dortmunde, ktorý vyhlásil (nepoučený zo skúseností Reinhardta a Kershnera), že daný problém je vyriešený raz a navždy.[17]) Prehľad doteraz známych typov päťuholníkov vytvárajúcich monoedrálne teselácie s príslušnými teseláciami je na obr. 5.

L i t e r a t ú r a

[1] Grünbaum, B., Shephard, G. C.: *Some Problems on Plane Tilings.* In Klarner, D. (ed.): The Mathematical Gardner. Prindle, Weber, and Schmidt, Boston, MA, 1981, 167–196.

[2] Grünbaum, B., Shephard, G. C.: *Tilings and Patterns.* W. H. Freeman, New York 1987.

[3] Ilucová, L.: *História pentagonálnych teselácií.* In Bečvář, J., Bečvářová, M. (eds.), Sborník sylabů 30. mezinárodní konference Historie matematiky, Jevíčko, 21.–25. 8. 2009. Matfyzpres, Praha 2009, 128–133.

[4] Kershner, R. B.: *On paving the plane.* Amer. Math. Monthly *75* (1968), 839–844.

[5] Niven, I.: *Convex polygons which cannot tile the plane.* Amer. Math. Monthly *85*, *10* (1978), 785–792.

[6] Schattschneider, D.: *Tiling the plane with congruent pentagons.* Math. Magazine *51* (1978), 29–44.

[7] Schattschneider, D.: *In Praise of Amateurs.* In Klarner D. (ed.): The Mathematical Gardner, Prindle, Weber, and Schmidt, Boston, MA, 1981, 140–166.

$d = e = 2a + c$, **typ 12:** $A = 90°$, $C + E = 180°$, $2B + C = 360°$, $2a = c + e = d$, **typ 13:** $A = C = 90°$, $2B = 2E = 360° - D$, $c = d$, $2c = e$, a **typ 14:** $D = 90°$, $2E + A = 360°$, $C + A = 180°$, $B + D + E = 360°$, $2e = 2c = a$.

[15]) Tento zoznam 13 teselujúcich typov päťuholníkov uviedli v svojom článku [1] aj B. Grünbaum a G. C. Shephard, ktorí napísali jednu z najrozsiahlejších a najkomplexnejších publikácií o teseláciách [2].

[16]) Hirschhorn, M. D., Hunt, D. C.: *Equilateral Convex Pentagons Which Tile the Plane.* Journal of Combinatorial Theory, Ser. A 39, *1* (1985), 1–18. Autori tvrdia, že rovnostranný konvexný päťuholník vytvára teseláciu v rovine vtedy a len vtedy, ak má súčet dvoch uhlov rovný 2π alebo je to jednoznačne určený päťuholník so špeciálnymi uhlami. Ich dôkaz je založený na preskúmaní všetkých bodov prieniku 100 kriviek. V článku O. Bagina *Tiling the Plane with Congruent Equilateral Convex Pentagons* (Journal of Combinatorial Theory, Ser. A 105, *2* (2004), 221–232) autorka predvádza alternatívny dôkaz tvrdení o päťuholníkoch a to založený na Eulerovej vete pre rovinné grafy.

[17]) O tomto objave napísala D. Schattchneiderová spolu s R. Steinom článok *A new pentagon tiler* publikovaný v roku 1985 v Mathematics Magazine 58 (5), 308 a obálka.