

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Pavel Pokorný
Vyučování

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 55 (2010), No. 1, 64--65

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/141938>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2010

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

vyučování

ZAMYŠLENÍ NAD PARCIÁLNÍMI
DERIVACEMI

Pavel Pokorný, Praha

Úvod

V české literatuře, např. [1], se obvykle symbolem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

značí funkce, která vznikne tak, že funkci f nejprve zderivujeme podle proměnné y a poté podle x (předpokládáme, že dané derivace existují). Patrně proto, že text $\partial y \partial x$ čteme zleva doprava. Tato konvence, jak ukážeme dále, je v rozporu s významem některých jiných matematických symbolů. Když jsem se s touto pochybností svěřil dvěma matematikům, kterých si vážím (profesor Karel Rektorys a profesor Petr Kůrka), dostal jsem stejnou odpověď obsahující tyto tři body:

- máte pravdu, pane kolego,
- to mě nenapadlo,
- ale ono na tom stejně většinou nezáleží.

Myslím, že je dobré dát přednost logickému značení před chybnou tradicí. Čím dříve, tím lépe. Dovolte, abych se s tímto problémem svěřil i vám.

RNDr. PAVEL POKORNÝ, Ph.D., Ústav matematiky, Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Technická 5, 166 28 Praha 6, e-mail: Pavel.Pokorny@vscht.cz

Prefixové, infixové a postfixové operátory

Některé symboly značící matematické operace se píší před příslušný operand, např. $-a$ značí změnu znaménka reálného čísla a , $\neg A$ znamená negaci výroku A . Takové operátory nazýváme prefixové.

Jiné operátory se píší mezi své operandy, ty nazýváme infixové, např. $a + b$.

A některé operátory se píší naopak za své operandy, např. $n!$. Ty nazýváme postfixové.

V tomto světle se lze na symbol $\frac{\partial}{\partial x}$ dívat jako na prefixový operátor, který značí parciální derivaci podle proměnné x funkce, která stojí za tímto operátorem, např. $\frac{\partial}{\partial x} f$. Podobně pravý dolní index se používá jako postfixový operátor pro stejnou operaci, tedy f_x . Pak parciální derivace funkce f podle proměnné y bude $\frac{\partial}{\partial y} f$ neboli f_y .

Pokud funkci f zderivujeme nejprve podle x a pak podle y , měli bychom to zapsat $\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} f$, zkráceně $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, v postfixové notaci f_{xy} .

Kdy na tom záleží?

Ukažme si jednoduchý příklad funkce dvou proměnných, která má druhé smíšené parciální derivace, které se nerovnájí. Uvažujme funkci

$$z = f(x, y) = \begin{cases} 4xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{pro } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{pro } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Přejdeme-li od kartézských souřadnic x, y k polárním souřadnicím r, φ pomocí

vztahů $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, dostaneme $z = r^2 \sin 4\varphi$. Odtud je také dobře vidět, že je třeba dodefinovat funkci f v nule nulou, aby byla spojitá.

Snadno spočteme, že

$$f_x(0, h) = -4h \quad \text{pro } h \neq 0$$

a

$$\begin{aligned} f_x(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0, \end{aligned}$$

a tedy

$$f_{xy}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_x(0, h) - f_x(0, 0)}{h} = -4.$$

Obdobným způsobem dostaneme

$$f_{yx}(0, 0) = 4.$$

Tedy druhé smíšené parciální derivace funkce f v bodě $(0, 0)$ existují a jsou různé.

Nyní je zřejmé, že ke každé funkci $g(x, y)$, která má rovnající se druhé smíšené parciální derivace, existuje nekonečně mnoho funkcí, jejichž druhé smíšené parciální derivace se nerovnají, totiž $g(x, y) + cf(x, y)$, kde $c \neq 0$.

Vidíme, že interpretovat symbol

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

jako funkci, kterou dostaneme tak, že funkci f nejprve zderivujeme podle x a pak podle y , je přirozené a v souladu s významem jiných matematických symbolů.

Jsou i jiné české odlišnosti?

Všimli jste si např. rozdílu mezi českou a anglickou knihou? Když položíme českou knihu na stůl začátkem nahoru, tak její text na hřbetu je vzhůru nohama. Když tak položíme anglickou knihu, je text na jejím hřbetu správně.

Na vině je patrně norma ČSN 01 0166 „Nakladatelská (vydavatelská) úprava knih a některých dalších druhů neperiodických publikací“, odd. 3.10, s. 7: „Na hřbetu vazby, obálky a přebalu se uvádí, pokud je to technicky možné, u všech druhů publikací jméno autora a název díla. Tyto údaje se uvádějí buď vodorovně, nebo podélně zespodu nahoru“.

Závěr

Navrhuji, abychom v souladu s uvedenými důvody používali i v české odborné literatuře symbol

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

pro smíšenou druhou parciální derivaci funkce f , kterou dostaneme tak, že nejprve derivujeme podle proměnné x a pak podle y , a ve stejném duchu i pro derivace vyšších řádů.

Tato práce je podporována grantem MSM 6046137306 MSMT.

L i t e r a t u r a

- [1] JARNÍK, V.: *Diferenciální počet*. Academia, Praha 1976.