Phillip L. Bowers

Recenze knihy Kennetha Stephensona „Úvod do vyplňování kružnicemi: teorie diskrétních analytických funkcí."

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 55 (2010), No. 1, 43--59

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/141936

Recenze knihy Kennetha Stephensona „Úvod do vyplňování kružnicemi: teorie diskrétních analytických funkcí“.

Phillip L. Bowers, Tallahassee, Florida, USA.

1. Kontext: osobní vzpomínky

Geometrizace topologie a diskretizace geometrie jsou dva důležité proudy v moderním vývoji matematiky. Autor jako člověk, který dosáhl zletilosti v době objevení těchto dvou směrů, a to jako jejich pozorovatel i jejich přímý účastník, není v situaci objektivního historika a snad mu tedy čtenáři prominou jeho osobní až výstřední zaujetí projevující se v následujícím textu. První příběh začíná v době, kdy se matematický svět ocitl v pasti abstrakce. Scénu ovládali stoupenci Bourbakiho a heslem dne bylo zobecňování. Coxeter byl pokládán za podivínského chřadnoucího strýce a byl v nejlepším případě tolerován, v nejhorším případě zlehčován jako provozovatel prostoduché matematiky devatenáctého století.

1.1. Geometrizace topologie. Píše se rok 1978 a já jsem právě začal svá postgraduální studia matematiky. Ve vzduchu je cítit určité vzrušení kolem myšlenek Billa Thurstona, které naznačují možnou cestu k řešení Poincarého hypotézy na základě klasifikace všech třírozměrných variet, a to za použití matematiky devatenáctého století – konkrétně neeuklidovské geometrie objevené Lobačevským a Bolyiaem. Tyto myšlenky se po pár letech nakonec objevují v sérii poznámek publikovaných na univerzitě v Princetonu a současně fascinují i vzbuzují zuřivost – chybějí přesně formulované věty a tvrzením často chybějí důkazy. Chybějí některé kapitoly a převládají zde jednotlivosti – avšak texty samy jsou přeplněny krásnými a vzrušujícími myšlenkami,

---

Philip L. Bowers, Department of Mathematics, The Florida State University, 1017 Academic Way, Tallahassee, Florida 32306-4519, e-mail: bowers@math.fsu.edu

Recenze knihy *Introduction to circle packing: The theory of discrete analytic functions*, by Kenneth Stephenson, Cambridge University Press, Cambridge, 2005, xii+356 pp., ISBN 13: 978-0-521-82356-2, £ 42.

Bulletin (*New Series*) of the A.M.S., Volume *46*, Number 3, July 2009, pp. 511–525.

 Přeložil a poznámkami opatřil Oldřich Kowalski.

Poznámka autora: Tato recenze je věnována památce Odeda Schramma, který pracoval na tématice vyplňování kružnicemi před svým objevem stochastické Loewnerovy evoluce a jejími aplikacemi na kritické jevy. Předčasná smrt tohoto mimořádného matematika při horolezecké nehodě 1. září 2008 byla velkou ztrátou pro naši akademickou obec.

Poznámka překladatele. Termín „circle packing“ je v zásadě překládán jako „vyplňování kružnicemi“, avšak vzhledem k časté frekvenci tohoto pojmu v recenzi je v mnoha případech použita pro totéž zkratka „CP“.

spletité argumenty jsou často jen naznačeny, vše kvůli popisu „terénu“, který Thurston vidí, když předkládá svou topologii třírozměrných variet. Thurstonova vize nás vrhá zpět do devatenáctého století a má mnoho společného s vysoce geometrickým a velmi specializovaným myšlenkovým okruhem, který inspiroval Felixe Kleina a Maxe Dehna. Tito geometři se pohybovali kolem Riemannových ploch, jednoho ze žhavých témat té doby, důvěrně je znali a chápali je v jejich specifičnosti, nikoliv jen z esoterických výšin, které ovládly celý svět matematiky a obzvlášť topologie v období od 30. do 70. let minulého století. Vliv Thurstonových „princetonských poznámek“ na vývoj topologie v následujících třiceti letech byl pronikavý, nejen pro jejich matematický obsah, ale ještě více pro autorovu vizi toho, jak by se měla pěstovat matematika. Daly celé generaci topologů svolení k tomu, aby si umazali své kolektivní ruce jednotlivostmi a zavrtali se hluboko do studia specifických struktur na specifických příkladech.

Co má geometrie společného s topologií? Thurston nám připomněl to, co věděl už Klein – že totiž topologie variet je těsně spojena s geometrickými strukturami, které tyto variety připouštějí. Thurston navrhl, že podobně jako plochy mohou být klasifikovány a roztříděny do kategorií s použitím každodenní geometrie trojúhelníků a přímek (tj. pomocí triangulace těchto ploch – *pozn. překl.*) –, nekonečně bohatší a spletitější svět třírozměrných variet by mohl být klasifikován pomocí třírozměrných geometrií, které sám nalezl a kterých je přesně osm. A pokud by měl pravdu, pak by vyřešení nejslavnějšího hlavolamu topologie – Poincarého hypotézy – bylo jen důsledkem takové geometrické klasifikace.

Thurstonova „Geometrizační Hypotéza“ ovládla obor geometrické topologie po následující tři desetiletí. Dokonce i po jejím nedávném vyřešení Hamiltonem a Perelmanem nám stále zanechává svůj odraz v pracovní metodologii topologů, kteří geometrizovali nejen topologii variet, ale i fundamentální grupy (tj. grupy smyček – *pozn. překl.*) patřící k těmto varietám. Proto nám jako odkaz zůstává mladá a velmi aktivní teorie geometrických grup, která prokazuje, že algebraické a kombinatorické vlastnosti grup jsou těsně svázány s geometriemi, na kterých operují. Tato teorie se zdá být kandidátem na budoucí organizační princip v topologii.

80. léta minulého století byla pro topologii zvláště vzrušujícím a plodným obdobím, protože vliv geometrie se zdál prostupovat vším. Začátkem onoho desetiletí Jim Cannon, inspirovaný Thurstonem, pečlivě studoval kombinatorickou strukturu fundamentálních grup 2-rozměrných a 3-rozměrných variet – z největší části šlo o kokompaktní Fuchsovy a Kleinovy grupy[1]) – a konstruoval ručně na velkých arších papíru Cayleyho grafy mnoha příkladů. Informoval mě, že grafy grup přiřazených hyperbolickým varietám se začínají konstruovat „téměř samy“, v tom smyslu, že získal

[1]) *Kleinova grupa* je definována jako konečně generovaná diskrétní grupa isometrií 3-rozměrného hyperbolického (Lobačevského) prostoru. Alternativně také jako konečně generovaná diskrétní grupa konformních transformací otevřené jednotkové koule v trojrozměrném euklidovském prostoru. *Fuchsova grupa* je definována jako konečně generovaná diskrétní grupa konformních transformací otevřeného jednotkového kruhu v (komplexní) rovině. Grupa se v obou případech nazývá *ko-kompaktní*, jestliže příslušný faktorový prostor je kompaktní. (*Pozn. překlad.*)

okamžité pochopení zbytku grafu poté, co sestrojil dostatečně velké okolí jednotky grupy. Bylo zde cosi automatického, co ovlivňovalo celou konstrukci, a poté, co spolu s Thurstonem navštívil Princeton, objevila se teorie automatických grup jako nová myšlenka, která získala kredit mezi topology studujícími fundamentální grupy. V této práci Cannon předjímal „podmínku tenkých trojúhelníků“ (*thin triangle condition*) jako bezpodmínečnou nutnou podmínku pro zápornou křivost, což vyplývalo z Thurstonova klasifikačního schématu. Studoval záporně zakřivené grupy spíše než variety se zápornou křivostí a ukázal, že výsledná geometrická struktura na Cayleyho grafech takových grup poskytuje kombinatorické nástroje, které činí strukturu grupy přístupnou počítačovému zpracování. To byl sňatek teorie grup s geometrií i s počítačovou vědou a ten se okamžitě rozkošatěl do topologie variet.

Tyto myšlenky vedly nakonec k jedné z nejkrásnějších hypotéz, která zůstala v Perelmanově definitivním řešení „Geometrizační hypotézy“ nezodpovězena. Šlo o to, že záporně zakřivená grupa s 2-rozměrnou sférou jako okrajem je v podstatě ko-kompaktní Kleinova grupa, totiž fundamentální grupa kompaktní hyperbolické variety.[2])

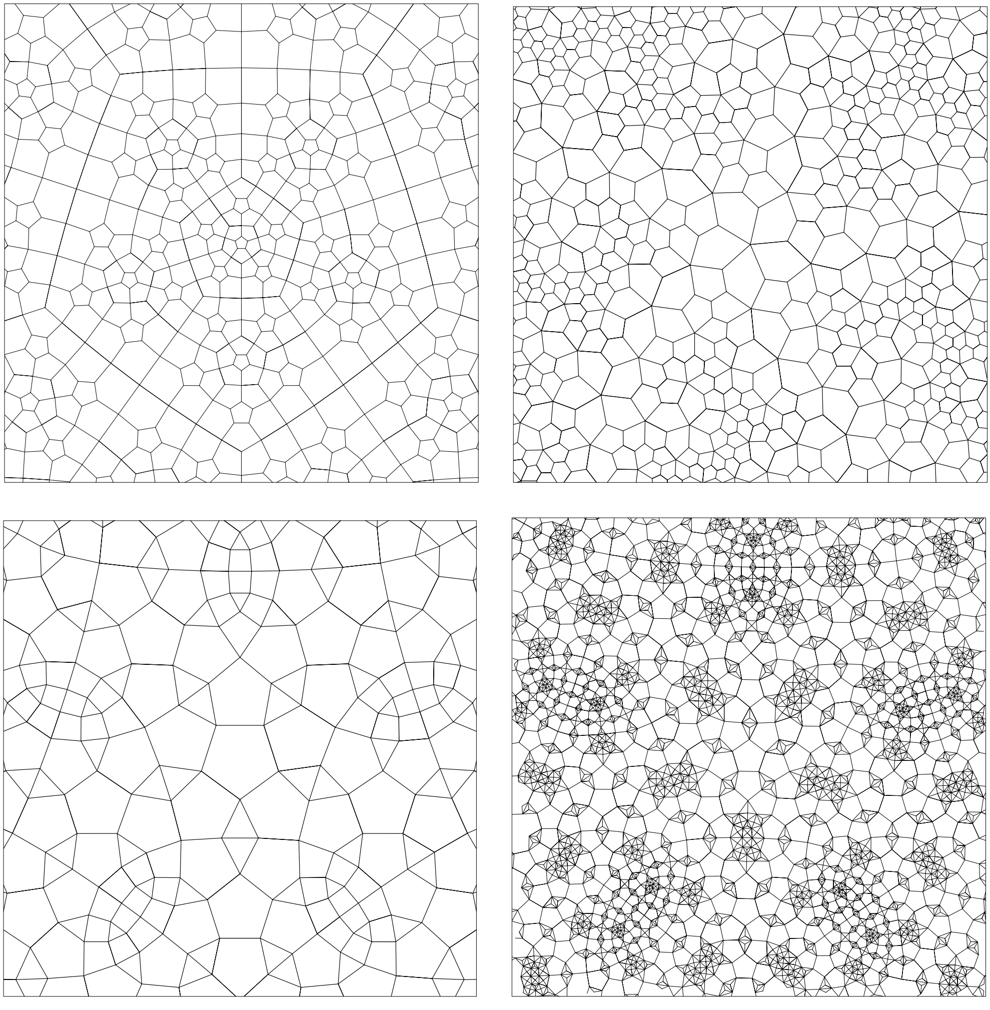
Cannonův pokus vyřešit tuto hypotézu ve spolupráci s kolegy Billem Floydem a Walterem Parrym zplodil některé z nejelegantnějších geometrických výsledků poslední doby. Šlo zvláště o objasnění pravidel konečného podrozdělení a jejich užití jako kombinatorických konstrukcí při vytváření konformních struktur na plochách – viz obr. 1. Aktivity kolem Cannonova programu vedly v 90. letech ke dvěma diskretizacím klasické Riemannovy věty o zobrazení (říkající, že každá jednoduše souvislá oblast v komplexní rovině je holomorfně ekvivalentní s jednotkovým kruhem, *pozn. překl.*). Jedna verze, zvaná „diskrétní Riemannova věta o zobrazení“, byla dokázána nezávisle Cannonem, Floydem a Parrym v [13] a Schrammem v [22]. Druhá verze pod názvem „kombinatorická Riemannova věta o zobrazení“ byla dokázána Cannonem v [12]. Zde se sestrojuje klasická konformní struktura na prostoru, který je opatřen vhodnou kombinatorickou nadstrukturou. Vrátíme se k těmto objevům později, ale nejprve se zmíníme o jiné stránce celého příběhu.

V roce 1987 Michail Gromov vyvolal ještě větší nadšení a urychlil celý projekt geometrizace topologie a teorie grup otištěním svého eseje *Hyperbolické grupy* [15], ve kterém představuje svůj velkolepý, i když jen spoře argumentačně podložený pohled na zápornou křivost v teorii grup. V roce 1993 k tomu přidal další vlivnou práci pod názvem *Asymptotické invarianty nekonečných grup* [16], která plnila podobný cíl pro nekladnou křivost. Téměř okamžitě po otištění každé z těchto prací celé skupiny matematiků nabídly podrobné důkazy osvětlující velké Gromovovy myšlenky a postgraduální studenti psali v následujících letech doktorské práce založené na obou esejích a občas vysvětlovali s podrobnými důkazy i tu nejkratší poznámku z těchto děl.

Nakonec je zajímavé zmínit se, i když stručně, o tom, že vyřešení „Geometrizační hypotézy“ v předešlých pěti letech se spoléhá méně na ducha hyperbolické geometrie 19. století, který byl obsažen v jádru původních Thurstonových prozíravých myšlenek, a více na moderní teorii diferenciálních rovnic. Thurston dokázal hypotézu pro velkou

---

[2]) Viz pěkně prezentovaný popis této práce v [14].



Obr. 1. Příklady parketáží komplexní roviny podle Cannona, Floyda a Parryho, generovaných nejhustším vyplněním roviny kružnicemi a využívajících „pětiúhelníkovou kombinatoriku“. Parketáž vlevo nahoře je zvláště zajímavá, protože je pravidelná v tom smyslu, že každý z pětiúhelníků, které naše oko vidí na *každé* úrovni zvětšení, je konformně pravidelný – tj. konformně ekvivalentní s pravidelným pětiúhelníkem při zachování jeho vrcholů. Navíc celá nekonečná parketáž může být vytvořena z jediné elementární „parkety“ tak, že donekonečna opakujeme anti-konformní zrcadlení napříč hranami. Viz [10].

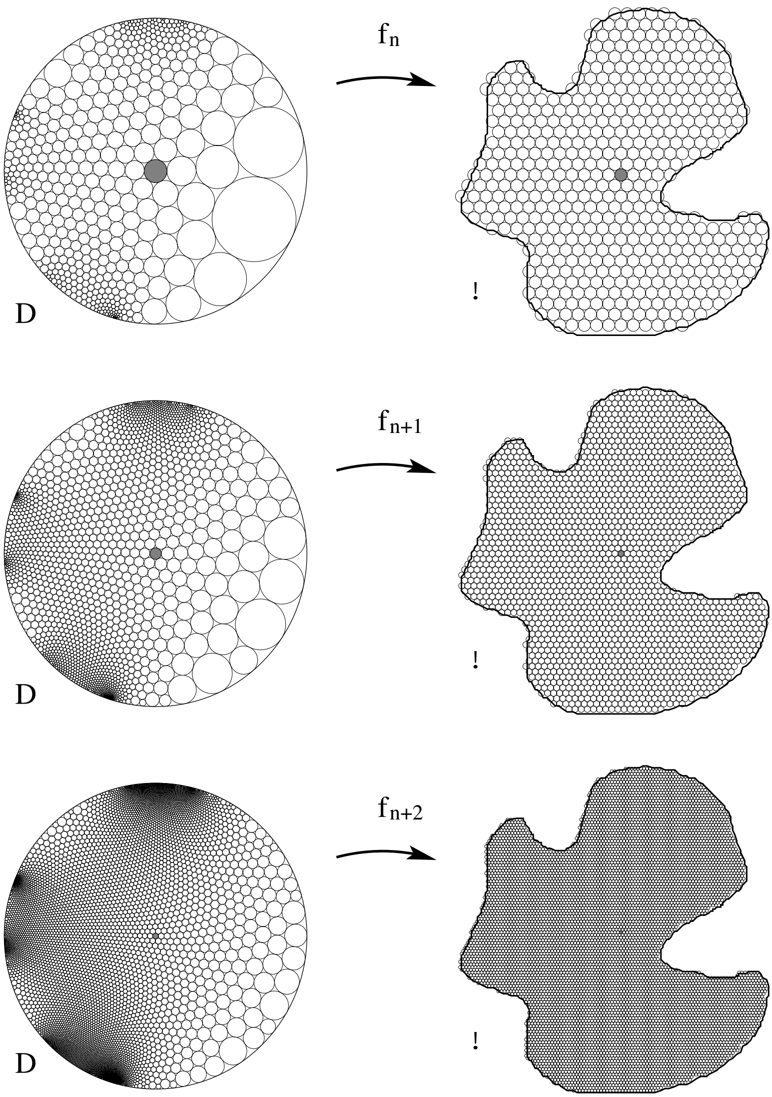
třídu variet, včetně Hakenových variet[3]), za což dostal v roce 1982 Fieldsovu medaili. V témže roce navrhl Richard Hamilton metodu pro vyřešení části hypotézy s využitím Riemannovy geometrie a zkoumání tzv. Ricciho proudění [16] (viz Wikipedia, heslo „Ricci flow“, pozn. překl.) Později zobecnil svou metodu tak, aby se dala použít

[3]) Za předpokladu orientovatelnosti je Hakenova varieta kompaktní ireducibilní 3-rozměrná varieta, která obsahuje nestlačitelnou plochu. Pro další podrobnosti, zejména specifický pojem ireducibility a pojem nestlačitelné plochy, viz například Wikipedia (*pozn. překl.*).

na vyřešení celé hypotézy. Hamilton rozvíjel svůj program po příští dvě dekády, ale pouze díky jasnozřivosti Grigorije Perelmana se podařilo překonat obtíže spojené se singularitami Ricciho proudění. Hlavními součástmi jeho konečného řešení jsou moderní teorie diferenciálních rovnic a globální analýza. Jak je všeobecně známo, Perelman v roce 2006 odmítl převzít Fieldsovu medaili za tuto svou práci.

1.2. Vyplňování kružnicemi: počátky. Moderní teorie CP (obecně 2-rozměrných variet – *pozn. překl.*) těsně souvisí s tématy předchozího odstavce. Výsledky předcházející zrodu této teorie jsou Koebeho věta [20] z roku 1936 a Andrejevovy věty [1], [2] z roku 1970. Paul Koebe, který pracoval v matematické analýze, dokázal, že každá triangulace uzavřeného jednotkového kruhu v komplexní rovině generuje vyplnění tohoto kruhu kružnicemi, z nichž každá odpovídá některému vrcholu triangulace, přičemž dvě kružnice se dotýkají, právě když odpovídající vrcholy jsou sousední a kružnice na okraji se dotýkají zevnitř hranice jednotkového kruhu. Navíc tento „ornament“ je dán jednoznačně až na Möbiovy transformace vnitřku kruhu nebo, což je totéž, až na izometrie tohoto vnitřku, pokud jej interpretujeme jako Beltramiho model Lobačevského-Bolyaiovy hyperbolické geometrie v rovině. (Jiná známá verze Koebeho věty platí pro triangulaci sféry, srov. odstavec 2.1 – *pozn. překl.*) Tato zdánlivá novinka byla rychle zapomenuta a odborníci v problematice CP ji opět vzali na vědomí až počátkem 90. let. Ze zcela jiného směru se k problematice dostal geometr E. M. Andrejev. Ve svém prvním článku z roku 1970 podal popis 3-rozměrných hyperbolických polyedrů s prodlouženými hroty (v originále „cusps“), ve druhém popsal obecnější hyperbolické polyedry a skončil popisem jistých 3-rozměrných hyperbolických polyedrů s konečným objemem.

Na konci 70. let Thurston, který nevěděl o výsledcích Koebeho a Andrejeva, dokázal zobecnění Koebeho věty, ve kterém povolil určité překrytí mezi kružnicemi místo jejich dotyků, podal důkaz založený na výpočtech a vše zobecnil na plochy libovolného rodu. Poté zjistil, že poznatky o 3-rozměrných hyperbolických polyedrech objevené Andrejevem plynou ze zobecněných Koebeho výsledků. Souvislost s trojrozměrným hyperbolickým prostorem najdeme, když si uvědomíme, že komplexní rovinu lze považovat za hranici horního poloprostoru prostoru $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$, což je model 3-rozměrné hyperbolické geometrie, a potom doplníme vyplnění kružnicemi o duální „ornament“ všech kružnic ortogonálních k těm původním. Nakonec vezmeme průnik vhodných hyperbolických poloprostorů ohraničených těmito kružnicemi a skončíme s konvexním hyperbolickým polyedrem s hroty. Zobecnění na situaci, kdy jsou mezi kružnicemi povoleny průseky pod předepsanými úhly, dovolilo Thurstonovi začlenit Andrejevovy výsledky o polyedrech konečného objemu do své koncepce. Thurston tvrdil, že ráno dokázal svou větu a za pozdního odpoledne našel Andrejevův výsledek. Trvalo však dalších patnáct let, než byl uznán Koebeho příspěvek. Tyto výsledky nebyly pro Thurstonův program klasifikace trojrozměrných variet vůbec okrajové; naopak, pro část tohoto programu měly přímo klíčový význam. Věta, která se nyní nazývá Koebeho-Andrejevova-Thurstonova věta, byla dále zobecněna, aby zahrnula i případy, kde vyplňujícími objekty nejsou kružnice, ale okraje jiných konvexních obrazců, případy, kdy kružnice se na sebe několikrát navinují, na případ nekonečných



Obr. 2. Konvergence Thurstonova vyplnění kruhu nekonečně mnoha kružnicemi k Riemannovu zobrazení kruhu na jednoduše souvislý obor v komplexní rovině.

triangulací otevřených kruhů a dokonce na případy, kdy sousední vrcholy reprezentují kružnice protínající se pod imaginárním úhlem. Ačkoliv Thurston zahrnul své výsledky o CP do nechvalně známé Kapitoly 13 svých princetonských poznámek – nechvalně známé, protože v mnoha rozeslaných kopiích chyběla –, námět příliš nepřitahoval publikum až do roku 1985, kdy Thurston naznačil ve své přednášce na Purdue University, že originální Koebeho věta může být použita k vytvoření účinného výpočetního algoritmu pro aproximace Riemannových zobrazení jednoduše souvislých oblastí komplexní roviny na jednotkový kruh, viz obrázek 2.

Mezi posluchači byl přítomen Ken Stephenson, autor zde recenzované knihy, který byl velmi překvapen a zaujat Thurstonovým předpokládaným spojením Koebeho věty s jedním z nejdůležitějších výsledků v komplexní analýze. Stephenson byl původně vzděláván v komplexní analýze, ale vždy měl sympatie ke geometrickým aspektům této teorie. Thurstonova přednáška a později ověření Thurstonovy domněnky Burtem Rodinem a Dennisem Sullivanem [21] způsobily Stephensonův postupný přerod z odborníka na klasickou komplexní analýzu v odborníka na diskrétní konformní geometrii. To vedlo k prudkému vzestupu výzkumu několika skupin i jednotlivců v geometrii CP: k novým výsledkům o existenci a jednoznačnosti, k novým souvislostem s konformními a analytickými zobrazeními, k řadě aplikací na otevřené matematické problémy, ke zpřístupňování tématiky pro formální výpočty, a byly nalezeny též souvislosti s náhodnými procházkami a dalšími diskrétními jevy.

CP je obor, který rychle přitáhl pozornost odborníků v analýze, kombinatorice, geometrii a topologii a původně se vyvíjel uvnitř

> „dvou různorodých zaměření. Jedno z těchto zaměření může být zhruba popsáno jako analytické a kombinatorické se zvláštním zřetelem k obsahu Thurstonovy přednášky v Purdue; totiž jako souvislost mezi vyplňováním kružnicemi a aproximacemi konformních zobrazení. Důraz klade na spojení CP s klasickou komplexní analýzou, což motivuje a opravňuje tento výzkum, a obzvláště na konstrukce dvou diskrétních analogií a důkazů některých klasických vět komplexní analýzy. ... Druhé zaměření může být zhruba popsáno jako geometrické a topologické, co se týče stylu, se zvláštním zájmem o čistou geometrii CP. Nepotřebuje jinou motivaci a oprávnění, než je půvabná souhra mezi geometrií, topologií a kombinatorikou, která odhaluje jistou tuhost CP, jež připomíná tuhost tak charakteristickou pro komplexní analytické funkce. Výsledky jsou často krásné a občas překvapující a připomínají autorům jejich postgraduální zkušenosti, pokud jde o překvapující tuhost a pozoruhodnou nevyhnutelnost, která prostupuje svět komplexních analytických funkcí.“[4])

Tato společná citace recenzenta a autora recenzované knihy byla napsána v roce 1991 a dává široký popis předchozích směrů našeho tématu.

1.3. Diskretizace geometrie. Počáteční studium vyplňování kružnicemi, od roku 1985 do půlky 90. let, se odehrávalo v atmosféře geometrizujícího vlivu topologů. Nebylo sice klíčové pro výzkum klasifikace variet a porozumění geometrické struktury grup, ale nabídlo dosud neprozkoumaný zdroj otevřený všem zainteresovaným vědcům. Navíc byla tato etapa přístupná počítačovému zkoumání a vskutku, nemálo matematiků bylo vtaženo do této oblasti kvůli krásně složitým obrázkům vyplňování kružnicemi generovaným počítačem, z nichž některé se objevují v tomto článku. `CirclePack` je nejrozšířenější a nejrafinovanější softwarový balík, který je k dispozici pro vytváření těchto obrázků a je neustále aktualizován jeho autorem a hlavním guru počítačových experimentů s CP – totiž samotným Kenem Stephensonem. Software byl

[4]) [9], str. 157–158.

vytvářen ruku v ruce s teorií, občas ukazoval cesty k teoretickému zkoumání, jindy zase podporoval intuici a graficky zobrazoval myšlenky.

Počítačová „tvárnost“ CP umístila tento obor přímo do centra našeho druhého důležitého zaměření v nedávné historii matematiky – diskretizace geometrie, která se začala objevovat s rostoucí propracovaností v posledních 15 letech. Zatímco první zmíněné odvětví, a CP jako jedna z jeho kapitol, má své kořeny v teoretické, čisté matematice, druhé zaměření je zakotveno v aplikované informatice, obzvláště v různých druzích 2-rozměrných a 3-rozměrných zobrazovacích problémů, které se staly přístupnými výpočetní technice až nedávno, díky pokroku výkonných stolních počítačů. Zmíněné zobrazovací problémy vedou k provokujícím matematickým problémům týkajícím se kromě jiného deformací ploch a těles zobrazených v $\mathbb{R}^3$. To v konečném důsledku znamená, že parketáže 2-rozměrných a 3-rozměrných objektů, což jsou občas triangulace a občas rozdělení na čtverce, musí být zobrazeny při operacích s počítačem jako data a příslušně se s nimi musí zacházet. Hlavní starostí bylo v maximální míře zachovat v příslušných kombinatorických údajích původní metrické údaje – tj. vzdálenosti, geodetiky, úhly a vnitřní i vnější křivosti. To často znamená, že se počítají geodetiky a křivosti spíše na kombinatorických objektech než na původních hladkých objektech a obvyklé nástroje Riemannovy geometrie se v tomto kombinatorickém pojetí ukazují jako neúčinné.

Toto druhé zaměření je zcela odlišné od prvního, kde hrálo svou roli jen několik prominentních protagonistů (Thurston, Cannon, Gromov) a které bylo ovládáno jediným, vše překlenujícím cílem (Geometrizační hypotéza a záporná křivost) a uctívanými texty v roli programových návrhů (Thurstonovy „princetonské poznámky“ a Gromovovo dílo *Hyperbolické grupy*). Diskretizace geometrie byla a je poháněna vrozenou potřebou vidět obrázky a manipulovat s nimi a její impulzy pocházely z různorodého sortimentu zdrojů, od čisté matematiky minimálních ploch a jejich zobrazení až k počítačovému vidění a rozeznávání cílů, od zobrazování anatomických dat v medicíně až k manipulacím s povrchy v průmyslovém návrhářství. Několik skupin matematiků a informatiků si uvědomilo, že problémy, se kterými se potýkají, se nezdají být řešitelné pouhými aproximacemi. Ukázalo se, že je potřebná diskrétní verze Riemannovy geometrie, která by byla do jisté míry věrná duchu klasické Riemannovy geometrie, která by s určitou mírou přesnosti reprezentovala spojité objekty a jejich vlastnosti, ale jejíž výpočetní nástroje by byly vlastní této nové teorii a ne pouhými aproximacemi nástrojů spojité geometrie. To vedlo k nalezení přirozených diskrétních analogií obvyklých nástrojů diferenciální geometrie, což jsou polyedrické plochy a prostory, diskrétní normálová vektorová pole, diskrétní operátory křivosti, diskrétní Laplaceovy-Beltramiho operátory, diskrétní geodetiky, diskrétní Gaussova zobrazení. Jedním ze zajímavých rysů tohoto úsilí je, že často existuje několik diskrétních analogií téhož spojitého nástroje, z nichž každá vhodně aproximuje spojitost, co se týče konvergence při „zjemňování sítě“, ale zachycuje různé vlastnosti studovaných diskrétních objektů. Nicméně toto paradigma je jiné než při klasické numerické aproximaci, kde hlavním účelem diskrétních operací a výpočtů je aproximace spojitého. V rozvíjejícím se oboru diskrétní diferenciální geometrie je standardem, že diskrétní teorie je soběstačný celek s přirozenými, exaktními nástroji vedoucími k přesným výpočtům, nikoliv aproximacím něčeho jiného. Ačkoliv se ukazuje, že klasická teorie je limitním případem stále jemnějších diskrétních vzorků, tento fakt často není v popředí zájmu.

Boris Springborn, Peter Schröder a Ulrich Pinkall [23, str. 77:1] formulovali toto paradigma následovně:

> Místo abychom se dívali na diskretizaci jako na prostředek zpřístupnění spojitého problému numerickým metodám, snažíme se rozvinout na diskrétní úrovni geometrickou teorii, která by byla stejně bohatá jako obdobná teorie pro spojitý problém. Cílem je „diskretizovat“ celou teorii, ne pouze nějaké rovnice. Místo abychom se ptali na aproximaci spojitého problému, jsme vedeni otázkami, jako je například tato: co odpovídá Riemannově metrice a Gaussově křivosti v analogické teorii pro trojúhelníkové sítě?

Toto úsilí pokračovalo prací mnoha výzkumných týmů s různými specializacemi – od zaměření na čistou matematiku Riemannovy geometrie, včetně geometrie variet nekonečné dimenze, přes kombinatorickou topologii a metrickou geometrii, informatiku, symbolické výpočty, databáze a programování, statistiku a inženýrské vědy až po široký výběr dalších vědeckých oborů. Úsilí bylo skutečně nezměrné a mnohostranné a není vhodné příběh ukončit nějakým přímočarým sdělením, takže se spokojím vyjmenováním některých význačných týmů, s jejichž členy se osobně znám a od nichž může zainteresovaný čtenář získat představu o rozsahu a síle nových myšlenek v diskrétní diferenciální geometrii. Každá z následujících výzkumných skupin udržuje rozsáhlý webový archiv, který detailně vysvětluje její významnou práci v tomto rozvíjejícím se oboru: Je to *Multi-Res Modeling Group* v Kalifornském technologickém institutu pod vedením Petera Schrödera, dále *Mathematical Geometry Processing Group* na Svobodné universitě v Berlíně pod vedením Konrada Polthiera, *German Matheon Research Center* a speciálně jeho oddělení polyedrických ploch s koordinátorem Alexandrem Bobenkem, skupina diskrétní geometrie na Technické univerzitě v Berlíně pod vedením Güntera Zieglera a konečně *Computer Vision Lab* na Floridské státní univerzitě, jejímiž vedoucími jsou Xiuwen Liu a Washington Mio.

2. Vyplňování kružnicemi v období dospívání

Ačkoliv počátky zkoumání vyplňování kružnicemi vycházejí z topologie, v polovině 90. let začal tento obor existovat jako zvláštní disciplina a teprve nedávno našel přirozený domov v prostředí diskrétní diferenciální geometrie. Ta část diferenciální geometrie, která se zajímá o diskretizaci klasické komplexní analýzy a konformní geometrie ve výše popsaném smyslu, je nyní zahrnuta pod názvem *diskrétní konformní geometrie*. CP je jedním z přístupů k diskretizaci těchto klasických disciplin a má ve srovnání s jinými přístupy jak svoje výhody, tak i nevýhody. Jeho největším úspěchem bylo poskytnutí věrné diskrétní analogie ke klasické teorii analytických funkcí v komplexní rovině, zejména diskrétních verzí klasického analytického zobrazení, které i v podrobnostech sdílejí podstatné rysy a vlastnosti svých klasických protějšků. Mnoho klasických vět z komplexní analýzy má svoje analogie v teorii vyplňování kružnicemi, které vlastně implikují platnost klasických vět jako limitních případů, kdy se poloměry kružnic blíží k nule. Neplatí to ale v opačném směru: pravdivost klasických výsledků zřídkakdy implikuje pravdivost diskrétních protějšků. Vypadá to, jakoby diskrétní bylo fundamentálnější a primárnější a jakoby klasická teorie byla odvozena z diskrétní teorie. Tyto poznámky platí také o jiných podoblastech v diskrétní diferenciální geometrii.

Příhodná metafora pochází z fyziky. Vyplňování kružnicemi je jakási kvantová teorie, ze které povstává klasická teorie analytických funkcí. Klasické analytické funkce jsou spojité deformace klasické komplexní roviny a mohou být velmi komplikované, ale jestliže na ně nahlížíme na úrovni atomů, tj. z tečné roviny, jde o lokální komplexní homotetie. Tedy klasická analytická zobrazení zachovávají nekonečně malé kružnice, zatímco diskrétní analytická zobrazení zachovávají skutečné kružnice (přesněji soustavy soustředných kružnic, *pozn. překl.*) Když se podíváme dostatečně zblízka na to, co jsme pokládali za spojité, najdeme skrýš diskrétního.

2.1. CP jako diskrétní geometrie. Abychom naznačili, jak mohou diskrétní kombinatorické údaje nést spojitou geometrickou informaci, dokonce i bez jakýchkoliv metrických nebo úhlových údajů zdobících tuto kombinatoriku, uvažujme libovolnou triangulaci K na kompaktní orientované ploše S rodu *(„genus“)* g (Taková plocha je homeomorfní sféře opatřené g „držadly“, *poz. překl.*) Zdůrazňuji, že S nenese žádnou metrickou strukturu, je to čistě topologická 2-rozměrná varieta. Potom existuje jediná konformní struktura na S a vzhledem k této konformní struktuře existuje vyplnění kružnicemi $\mathcal{C} = \{C_v : v \in V(K)\}$, tj. soubor kružnic v S indexovaný množinou vrcholů $V(K)$ triangulace K, které je jediné až na Möbiovy transformace a takové, že kružnice C_v je tečná ke kružnici C_w právě když vrcholy v a w jsou sousední v K. Abychom to trochu osvětlili v případě $g = 0$, kdy S je topologická sféra, zde na S existuje jediná konformní struktura až na ekvivalenci, totiž ta, která ztotožňuje S s Riemannovou sférou $\mathbb{C}^+$. Kružnice C_v jsou pak obyčejné kružnice na Riemannově sféře, a to můžeme chápat jako přeformulování Koebeho věty. Jestliže $g = 1$, pak S je topologický toroid a máme k dispozici spojitou dvou-parametrickou soustavu vzájemně neekvivalentních konformních struktur na S. Triangulace K vybírá přesně jednu z těchto struktur a ta indukuje v podstatě jedinou „rovnou“ (tj. lokálně euklidovskou) metriku a kružnice C_v jsou obyčejnými kružnicemi vzhledem k této metrice. Obecný případ nastává, když $g \geqq 2$. Potom máme k dispozici spojitou soustavu vzájemně neekvivalentních konformních struktur na S která závisí na $6g - 6$ parametrech, a kombinatorika triangulace K určuje přesně jednu takovou strukturu. Tato struktura nese jedinou metriku konstantní záporné křivosti -1, totiž hyperbolickou metriku, a kružnice C_v jsou hyperbolické kružnice. Vyplnění $\mathcal{C}$ je jediné až na hyperbolickou izometrii. Zdůrazňuji skutečnost, že žádná další z nespočetně mnoha konformních struktur s jejich hyperbolickými metrikami nepodporuje vyplnění kružnicemi, jejichž dotyky by byly zakódovány kombinatorikou triangulace K.

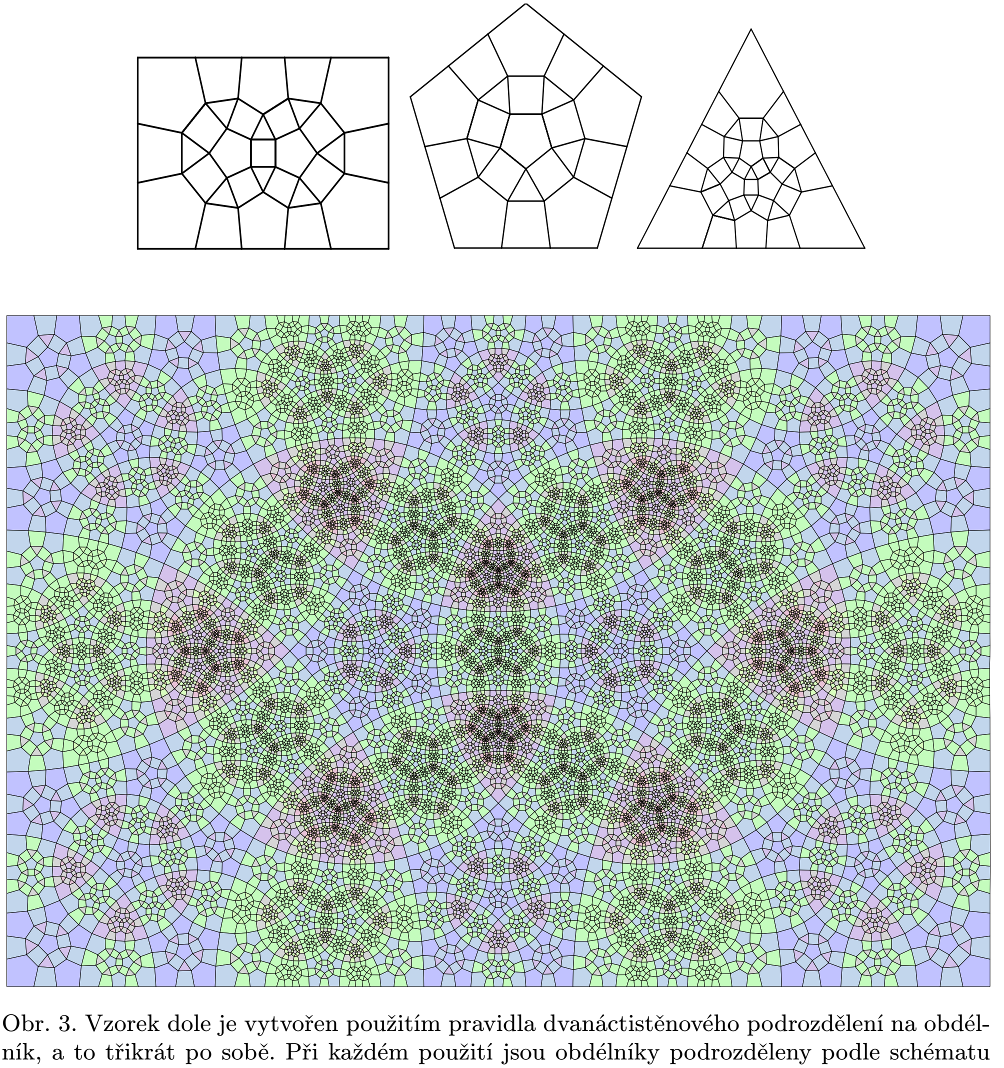
To je překvapující příklad diskrétních kombinatorických dat obsahujících zakódovanou geometrickou informaci. Výsledek může být dokázán několika různými metodami a byl jednou z klíčových vět, které povzbudily původní výzkum v oblasti CP. Je to také jedno z tvrzení „pohřbených“ v kapitole 13 Thurstonových „princetonských poznámek“ a od té doby bylo znovu objeveno a přepracováno několika matematiky. V počátečních letech byla matematická komunita velmi aktivní ve zkoumání tohoto výsledku a jeho zobecňování a také ve formulaci teorie stojící v pozadí za CP. Obor se stává obtížnějším a složitějším, když jsou plochy nebo vyplňující uzavřené křivky obecnější. V prvním směru může jít o nekompaktní plochy s neprázdným okrajem, v druhém směru o vyplňování překrývajícími se objekty nebo objekty „zavinutými kolem singularit“, nebo vyplňování nekonečně mnoha objekty – avšak souhra mezi kombinatorikou a geometrií zůstává organizačním principem.

Teorie CP pokročila do bodu, kdy nabízí diskrétní teorii obecných komplexních analytických zobrazení rovinných oborů a diskrétní teorii polynomiálních zobrazení sfér. Oblastmi současného výzkumu jsou diskrétní racionální zobrazení sfér a diskrétní konformní zobrazení Riemannových ploch. Recenzovaná kniha je textem, který krásným způsobem a detailně líčí teorii vyplňování kružnicemi pro diskrétní analytická zobrazení. Dříve než pojednám o knize důkladněji, chtěl bych zmínit několik málo významných úspěchů teorie CP jak v matematice, tak v aplikacích.

2.2. Některé přínosy pro matematiku. Koebeho věta byla odvozena Koebem jako důsledek jeho uniformizační věty, která říká, že každá (otevřená) oblast v komplexní rovině $\mathbb{C}$, jejíž doplněk má jen konečně mnoho souvislých komponent, je konformně ekvivalentní oblasti, která vznikne z $\mathbb{C}$ vynětím konečně mnoha (uzavřených) kruhů a bodů. Přitom konformní ekvivalence je jednoznačná až na Möbiovy transformace. Koebeho uniformizační věta je zobecněním Riemannovy věty o zobrazení a dává podpůrný argument pro velmi lákavou *Koebeho hypotézu*, která tvrdí, že *každá* oblast na Riemannově sféře je konformně ekvivalentní s oblastí, která vznikne z této sféry vynětím (nanejvýš spočetné) množiny uzavřených kruhů a bodů, a že příslušná konformní ekvivalence je jednoznačná až na Möbiovy transformace.

Přes koordinované pokusy dokázat Koebeho hypotézu v předchozích šedesáti letech nebyl zaznamenán žádný velký úspěch, až konečně Zheng-Xu He a Oded Schramm v článku publikovaném v roce 1993 v *Annals of Mathematics* [18] nabídli složitý důkaz založený na CP, který se vztahoval na všechny oblasti, jejichž doplněk v Riemannově sféře má spočetně mnoho komponent. Obecná hypotéza zůstává nevyřešena i patnáct let poté a výsledek výše uvedených autorů stále zůstává tvůrčím vrcholem v řešení hypotézy.

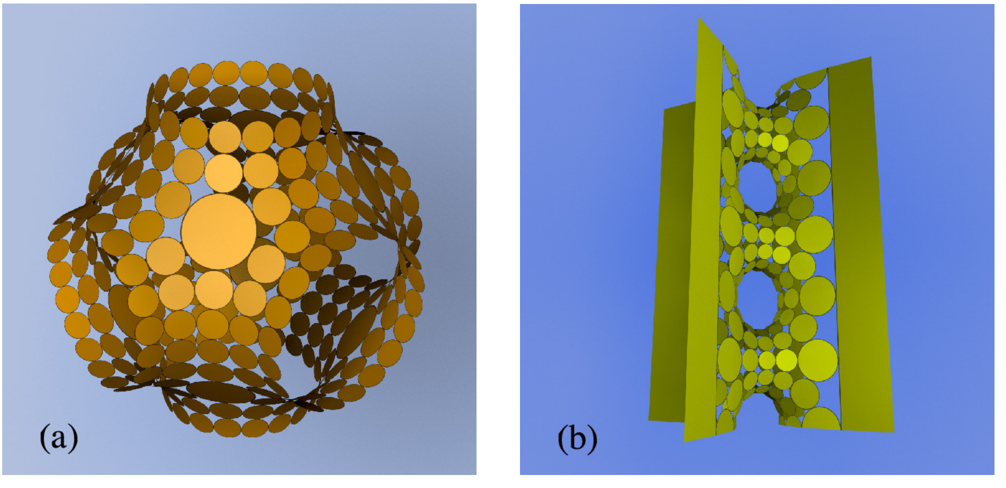
Vraťme se nyní ke Cannonově hypotéze popsané výše, že totiž záporně zakřivená grupa s 2-rozměrnou sférou jako okrajem je v podstatě ko-kompaktní Kleinova grupa. Zde bylo CP dobrým pomocníkem jako experimentální nástroj v programu rozvinutém Cannonem, Floydem a Parrym. Jejich program využívá kombinatorická data na sférickém okraji, která vznikají jako „stíny“ poloprostorů při pokusech sestrojit konformní strukturu, ve které tyto „stíny“ jsou „téměř kulaté“, což by pak podle autorů mělo stačit k důkazu hypotézy. Autoři našli podmínky, které zaručovaly existenci takových konformních struktur, a modelovali proceduru, která vedla od kombinatoriky ke konformní struktuře pomocí pravidel konečného podrozdělení, což je čistě diskrétní, kombinatorická konstrukce. Postupy CP byly použity jako experimentální sonda pro navržení požadavku „skoro kulatosti“ v několika důležitých případech zmíněného programu. Obrázek 3 ukazuje výsledky CP postupů aplikovaných na pravidlo podrozdělení pomocí dvanáctistěnů, které znázorňují, jak „kulatost“ vyplývá z kombinatorických údajů. Podkladová kombinatorická struktura zjištěná v tomto příkladě je čistým produktem iterací jednoduchých pravidel podrozdělení ukázaného v horní části obrázku 3. CP je pak použito k umístění přirozené geometrické struk-



Obr. 3. Vzorek dole je vytvořen použitím pravidla dvanáctistěnového podrozdělení na obdélník, a to třikrát po sobě. Při každém použití jsou obdélníky podrozděleny podle schématu vlevo nahoře, pětiúhelníky podle schématu uprostřed horní části a trojúhelníky podle schématu vpravo nahoře. CP generuje vložení, ve kterém se projevuje „skoro kulatost“ v různých měřítkách. Toto je přibližný pohled na vrhání stínů z nekonečna do sféry při první, druhé a třetí generaci hyperbolických poloprostorů určených dvanáctistěnovou parketáží trojrozměrného hyperbolického prostoru. (Cannon-Floyd-Parry).

tury na kombinatorickou strukturu, v níž „kulatost“ – ornament kružnic viditelných okem – se jako zázrakem objevuje při rozkladu v mnoha různých měřítkách. Mario Bonk a Bruce Kleiner [7], [8] nabídli jiný přístup ke Cannonově hypotéze za použití analýzy na metrických prostorech, který, alespoň na jednom místě, využívá Koebeho-Andrejevovu-Thurstonovu větu.

Zmíním poslední příklad, kde mělo CP vliv na čistou matematiku, a to v nabídce nových nástrojů i pohledů při studiu grafů. Nekonečné grafy nabízejí diskrétní pohled, ve kterém lze studovat náhodné procházky. Grafy vznikající při triangulaci roviny jsou nekonečné grafy, které nejenže nabízejí dichotomii mezi časově závislými a rekurentními (transient-reccurent) náhodnými procházkami, ale také dichotomii mezi hyperbolickým a parabolickým vyplňováním kružnicemi. Tato hyperbolicko-parabolická dichotomie vzniká, protože každý graf příslušný k některé triangulaci roviny kóduje „tečnou kombinatoriku“ vyplnění kružnicemi buď v hyperbolické rovině, nebo v euklidovské rovině, ale nikdy v obou současně. Zkoumání toho, jak lze typ vyplnění kružnicemi – hyperbolický nebo parabolický – porovnat s typem náhodné procházky – závislým na čase, nebo rekurentním –, vedlo k plodnému vzájemnému působení mezi CP a klasickými náhodnými procházkami, což obohatilo obě oblasti.



Obr. 4. Diskrétní Schwarzova (část (a)) a Scherkova (část (b)), minimální plocha generovaná uspořádáními kružnic a založená na „čtvercové kombinatorice“ (Bobenko, Hoffmann a Springborn, 2006).

2.3. Některé aplikace. Jedna ze zajímavých aplikací CP a teorie grafických objektů („pattern theory“) se dostane v situaci, kdy je hladká plocha v $\mathbb{R}^3$ reprezentována dvojrozměrnou varietou s nulovou křivostí tak, aby byla v co nejvyšší míře zachována konformní struktura původní plochy. Jde o proces, který se nazývá diskrétní konformní zplošťování. I když existují zplošťovací algoritmy založené na klasické numerické analýze, které poskytují rychlá a přesná konformní zobrazení, výhodou algoritmů založených na metodách CP je, že po každém zploštění máme k dispozici plný rozsah diskrétní teorie komplexních analytických a konformních zobrazení. Stephensonův softwarový balík byl využit v několika anatomických studiích týkajících se mozkové kůry – viz např. [19].

Bobenko a Springborn [5] začali nedávno zkoumat nové algoritmy založené na uspořádání kružnic, kde dotýkání se kružnic je zakódováno pomocí dělení na čtverce místo obvyklé triangulace. Inspirace pro tento postup přišla z fyziky integrabilních systémů a postup se ukázal jako úspěšný nejen pro konformní zplošťování, ale také pro elegantní diskrétní reprezentace minimálních ploch vložených v $\mathbb{R}^3$ (viz Bobenko, Hoffmann a Springborn, [6]) a obrázek 4.

Konečně chci zmínit jistý výskyt teorie CP v nedávno formulované matematické teorii *origami*, která je použita k navrhování neuvěřitelně komplikovaných výtvorů typu origami a také ve strojírenském návrhářství. Velmi doporučuji přečíst si přednášku Roberta Langa ze série TED (Technology, Entertainment, Design) z února 2008, která se najde na webové stránce `http://www.ted.com`.

3. Kniha: Úvod do vyplňování kružnicemi. Teorie diskrétních analytických funkcí.

Ken Stephenson je vedoucí osobností v okruhu lidí zabývajících se CP téměř od samého začátku, kdy se tato teorie začala oddělovat od svých topologických základů. Ke konci 80. let vypracovali společně s Alanem Beardonem [3], [4] některé z prvních myšlenek, které překonaly Thurstonovu původní práci obsaženou v „princetonských poznámkách“. Během posledních dvou desetiletí vytvořil, rozvinul a zdokonalil softwarový balík `CirclePack`, kde je Thurstonův algoritmus použit, zobecněn a doplněn přidruženým softwarem, jako je například `DesPack`. Pomáhal při objevování a formulování diskrétní teorie komplexních analytických zobrazení založených na CP a prozkoumal široké cesty pro CP v nových oblastech výzkumu, včetně využití v Cannonově hypotéze, v teorii náhodných procházek a teorii pravděpodobnosti a v Grothendieckově teorii dětských kreseb (*Dessins d'Enfants*) [11]. Je neúnavným obhájcem počítačových experimentů v čisté matematice s pomocí `CirclePack` a spolupracuje s vědci na využívání nástrojů CP pro řešení praktických problémů, od modelování nedokonalostí v krystalech přes ploché zobrazování anatomických objektů až po zdánlivě rutinní problém estetického zobrazení uzlů v $\mathbb{R}^3$ pomocí rovinných projekcí na obrazovce počítače, a to v rámci softwarového balíku `Knotscape` vytvořeného Morwenem Thistlethwaitem. Stephenson je hlavním kazatelem CP a šíří tuto teorii ve výzkumných, přehledových i populárních článcích, v přednáškách a seminářích, v postgraduálních kurzech a v rámci REU (Research Experiences for Undergraduates), dále pak organizuje konference a spolupracuje s vědci jiných oborů. Všude propaguje myšlenku věrného obrazu skutečnosti a estetické dokonalosti, které vidí v tomto poutavém oboru. Nevím o nikom lépe vybaveném pro napsání učebnice o základech teorie CP a diskrétních analytických funkcí. V recenzované knize nám Ken Stephenson daroval klenot, základní zdroj, z něhož se mohou naučit základům disciplíny studenti i vědečtí pracovníci.

Kniha je rozdělena do čtyř částí, z nichž každá se skládá z několika kapitol. **Část I, Přehled o CP**, je přesně to, co uvádí titulek – je to dobře vedená exkurze, která je bohatě ilustrovaná grafikou a představuje převážně vizuální úvod. Slouží také k rozvržení celku a k popisu ostatních částí díla pro potřeby čtenáře. **Část II, Tuhost: Maximální vyplňování**, je částí, kde je vymezeno hřiště pro CP. Je zde dokázána Koebeho-Andrejevova-Thurstonova věta, ale jako důsledek obecné „Diskrétní uniformizační věty", dokázané původně Beardonem a Stephensonem. Tato věta je fundamentálním výsledkem o existenci a jednoznačnosti pro CP a její formulaci a důkazu je věnováno sedm kapitol. Kromě již zmíněné věty zahrnuje druhá část též výsledky, o kterých bylo pojednáno v prvním odstavci části 2.1. Též zahrnuje nejnáročnější případ, totiž zobecnění Koebeho-Andrejevovy-Thurstonovy věty na případ nekonečné triangulace kruhu a jejích grafů K, kde se dokazuje existence a jednoznačnost vyplnění kružnicemi buď otevřeného kruhu, nebo roviny, s dotykovými vlastnostmi kružnic zakódovanými pomocí některého grafu K. Je skutečnou službou odborníkům v oboru CP, že autor podává úplný důkaz existence a jednoznačnosti ve všech detailech a rigorózně pro tento nejdůležitější případ. Důkaz je vyložen na 43 stranách z celkových 97 stran této části. Materiál zahrnutý v Části II je jinak roztroušený po literatuře a toto je jediné místo, o kterém vím, které dává úplný přehled o Diskrétní uniformizační větě.

Poté co bylo vymezeno „hřiště" pro CP, **Část III, Analytické funkce**, představuje hráče – diskrétní analytické funkce. V devíti kapitolách autor pečlivě rozvíjí plně diskrétní teorii analytických funkcí v otevřeném kruhu a v rovině, včetně diskrétních celistvých funkcí, a pokračuje se začátky teorie diskrétních racionálních funkcí a diskrétních analytických funkcí na Riemannových plochách. Na tomto místě nejsou zmíněny aproximace analytických funkcí, ale pouze formulace velmi přirozené teorie zobrazení mezi CP, která, jak s překvapením vidíme, mají všechny kvalitativní rysy klasických analytických zobrazení. Zde autor uvádí jednu z nejzajímavějších souvislostí mezi CP a jinými disciplínami, a to v kapitole o náhodných procházkách.

Autor líčí celý běh věcí, od situace z roku 1985, kdy seděl mezi posluchači na univerzitě v Purdue a slyšel Thurstonův podnět, že CP by mohlo být použito k aproximaci zobrazení Riemannových ploch. V **Části IV, Vyřešení: Aproximace**, Stephenson zkoumá v pěti kapitolách, jak mohou být diskrétní analytická zobrazení z Části III použity k aproximaci klasických analytických zobrazení. První kapitola nabízí úplný důkaz Thurstonova intuitivního tvrzení, nyní označovaného jako „Thurstonova hypotéza", potvrzujícího konvergenci algoritmu pro CP k Riemannovu zobrazení některé vlastní jednoduše souvislé oblasti na otevřený jednotkový kruh. Toto je dále zobecněno tak, aby byly zahrnuty i specifické třídy funkcí, včetně klasických Blaschkeho součinů[5]) a polynomů, a též aproximace konformních struktur na plochách. Část IV končí výběrem krásných exkurzí CP do jiných vědních disciplín, včetně Grothendieckovy teorie dětských kreseb [11], konformních parketáží a zobrazování mozku. Kniha pak končí devíti dodatky pojednávajícími o různých speciálních tématech.

[5]) Blaschkeho součin je omezená analytická funkce na otevřeném jednotkovém kruhu, která je konstruována tak, aby se rovnala nule na konečné nebo nekonečné posloupnosti předepsaných komplexních čísel. (*Pozn. překl.*)

Za zvláštní zmínku stojí tři významné rysy knihy, a sice styl psaní, grafika a praktika. Stephenson neuplatňuje ve svém psaní příliš formální a rigorózní styl, ale zvolil běžný a neokázalý způsob, který umožňuje, aby se jeho vyprávění vyvíjelo po etapách. Aby pomohl čtenáři, začíná obvykle každý námět neformálním, ale stále ještě matematicky korektním přehledem, často ozdobeným grafikou a uvolněnou prózou. Poté přistoupí k vlastní matematice a popisuje přesné detaily v řadě kroků, které jsou pečlivě navrženy, pokud jde o přiměřenost rozsahu a množství detailů. Text jako celek aktivně zapojuje čtenáře a stimuluje jeho další zájem. Jedinečným rysem knihy je počet a kvalita grafických obrázků. Již pouhé listování knihou a prohlížení krásných příkladů na vyplňování kružnicemi přináší jisté uspokojení. Ale skutečná hodnota těchto optických pomůcek je v tom, že jdou ruku v ruce s textem, že ilustrují důležité myšlenky a poskytují klíčová schémata důkazů. Konečně každá ze čtyř částí končí praktikem, což je krátký projekt týkající se výpočetních a softwarových problémů, které objasňují některé otázky, na něž narážíme při experimentování s programem `CirclePack`. Zde může čtenář vidět z první ruky ty často obtížné, ale vždy zajímavé problémy, které vyvstávají, když se snažíme vybudovat a použít praktický program, který se pokouší zachytit fascinující myšlenky CP.

Nakonec je třeba vyslovit uznání vydavateli. Cambridge University Press vytvořil publikováním Stephensonovy knihy skvělé dílo abstraktního umění. Tak jako u všech knih z tohoto vydavatelství, měřítka pro vazbu, sazbu a tisk jsou vysoká, ale péče věnovaná kvalitě se skutečně rozzáří ve vynikajících reprodukcích počítačové grafiky. Celkový účinek je úžasná menažerie obrázků doplňujících krásně psaný text.

Epilog

Celý příběh začal v období esoterické abstrakce v matematice. Vliv matematiků, jako byl Thurston, Cannon a Gromov, přinesl uvolnění od této abstrakce v geometrii a topologii a dovolil nám pěstovat geometrii opět „rukodělně“, na způsob velkého Felixe Kleina a jeho současníků. Vyplňování kružnicemi představuje jeden příklad tohoto více „rukodělného“ přístupu ke geometrii a jeho úspěch je svědectvím síly speciálního v matematice. Elegantní složitost, která vychází z jednoduchosti elementární geometrie – co může být více elementární než kružnice? –, fascinovala celou generaci specialistů na problematiku vyplňování kružnicemi, a jak se teorie rozšiřuje a aplikuje, slibuje, že bude i v budoucnu fascinovat nové generace. Ken Stephenson uskutečnil svou učebnicí účinnou a zábavnou výpravu do základů teorie CP a jejího použití pro odvození komplikované teorie diskrétních analytických funkcí. To vše povstalo ze skromné kružnice! Očekávám, že kniha bude zdrojem s velkým Z pro studenty a vědecké pracovníky po mnoho dalších let.

Poděkování. Autor děkuje vážené kolegyni Nadě Stehlíkové za pečlivou kontrolu překladu a četné podnětné připomínky vedoucí ke zlepšení stylu. Práce na tomto překladu byla podpořena výzkumným záměrem MSM 0021620839 Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy ČR.

L i t e r a t u r a

[1] E.M. Andre'ev, *Convex polyhedra in Lobacevskii space*, Math. USSR Sbornik **10** (1970), pp. 413–440.

[2] E.M. Andre'ev, *Convex polyhedra of finite volume in Lobacevskii space*, Math. USSR Sbornik **12** (1970), pp. 255–259.

[3] A.F. Beardon and K. Stephenson, *The uniformization theorem for circle packings*, Indiana Univ. Math. J. **39** (1990), pp. 1383–1425.

[4] A.F. Beardon and K. Stephenson, *The Schwarz-Pick lemma for circle packings*, Ill. J. Math. **35** (1991), pp. 577–606.

[5] A.I. Bobenko and B.A. Springborn, *Variational principles for circle patterns and Koebe's theorem*, Trans. AMS **356** (2003), pp. 659–689.

[6] A.I. Bobenko, T. Hoffmann, and B.A. Springborn, *Minimal surfaces from circle patterns: geometry from combinatorics*, Annals of Math. **164:1** (2006), pp. 231–264.

[7] M. Bonk and B. Kleiner, *Quasisymmetric parametrizations of two-dimensional metric spheres*, Invent. Math. **150** (2002), no. 1, pp. 127–183.

[8] M. Bonk and B. Kleiner, *Conformal dimension and Gromov hyperbolic groups with 2-sphere boundary*, Geometry & Topology **9** (2005), pp. 219–246.

[9] P.L. Bowers and K. Stephenson, *Circle packings in surfaces of finite type: An in situ approach with applications to moduli*, Topology **32** (1993), pp. 157–183.

[10] P.L. Bowers and K. Stephenson, *A "regular" pentagonal tiling of the plane*, Con. Geom. and Dynamics **1** (1997), pp. 58–86.

[11] J.W. Cannon, *The combinatorial Riemann mapping theorem*, Acta. Math. **173** (1994), 155–234.

[12] J.W. Cannon, W.J. Floyd, and W.R. Parry, *Squaring rectangles: the finite Riemann mapping theorem*, in *The Mathematical Heritage of Wilhelm Magnus—Groups, Geometry, and Special Functions*, Contemporary Mathematics, vol. 169, Amer. Math. Soc., Providence, 1994, pp. 133–212.

[13] J.W. Cannon, W.J. Floyd, and W.R. Parry, *The length-area method and discrete Riemann mappings*, unpublished manuscript available from Bill Floyd that is based on a talk given by J. Cannon at the Ahlfors Celebration at Stanford University in September, 1997 (1998).

[14] M. Gromov, *Hyperbolic Groups*, in *Essays in Group Theory*, G.M. Gersten, ed., MSRI Publ. 8, 1987, pp. 75–263.

[15] M. Gromov, *Asymptotic invariants of infinite groups*, in *Geometric Group Theory*, Vol. 2 (Sussex, 1991), LMS Lecture Note Series, 182, Cambridge University Press, Cambridge, 1993, pp. 1–295

[16] R. Hamilton, *Three-manifolds with positive Ricci curvature*, J. Diff. Geom. **17** (1982), pp. 255–306.

[17] Z-X. He and O. Schramm, *Fixed points, Koebe uniformization and circle packings*, Annals of Math. **137** (1993), pp. 369–406.

[18] M.K. Hurdal and K. Stephenson, *Cortical cartography using the discrete conformal approach of circle packings*, NeuroImage **23** (2004), Supplement 1, pp. S119–S128.

[19] P. Koebe, *Kontaktprobleme der Konformen Abbildung*, Ber. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-Phys. Kl. **88** (1936), pp. 141–164.

[20] B. Rodin and D. Sullivan, *The convergence of circle packings to the Riemann mapping*, J. Diff. Geom. **26** (1987), pp. 349–360.

[21] O. Schramm, *Square tilings with prescribed combinatorics*, Israel J. Math. **84** (1993), 97–118.

[22] B. Springborn, P. Schröder, and U. Pinkall, *Conformal equivalence of triangle meshes*, ACM Transactions on Graphics **27:3** [Proceedings of ACM SIGGRAPH 2008], Article 77, 2008.