Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Zdenko Takáč

O motivování žiakov k odovodňovaniu matematických tvrdení

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 54 (2009), No. 3, 243--251

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/141912

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2009

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

vyučování

O MOTIVOVANÍ ŽIAKOV K ODÔVODŇOVANIU MATEMATICKÝCH TVRDENÍ

Zdenko Takáč, Ružomberok

V článku [8] *sú opísané takzvané MRP úlohy (Motivation to Reasoning and Proving tasks) a pedagogický experiment, ktorý sa zaoberal ich vplyvom na motiváciu žiakov (druhého stupňa základných škôl a stredných škôl) pri odôvodňovaní a dokazovaní. V článku opíšeme tieto úlohy a spôsob, ako vplývajú na žiakov, na rozvoj ich kritického myslenia a predovšetkým na ich ochotu odôvodňovať svoje vlastné tvrdenia.*

Je úloha dôkazu v matematike a v školskej matematike rozdielna?

O vhodnosti zaradenia dôkazov do učiva jednotlivých typov škôl sa neustále vedú diskusie. Kedy a akou formou začať oboznamovať žiakov s týmto pojmom? Je to vhodné pre žiakov základných škôl? Je to vhodné pre žiakov stredných škôl? Alebo dokonca, je to vhodné aspoň pre študentov matematiky na vysokých školách? Našim cieľom nie je odpovedať na tieto otázky – odpoveď do značnej miery závisí od toho, čo v školskej matematike ešte uznáme za dôkaz a čo už nie. Odpovieme snáď na poslednú otázku, pri ktorej jednoznačne zastávame názor, že dôkaz do výučby matematiky na vysokoj škole patrí. Bez dôkazu sa študenti učia matematiku iba ako „súbor poznatkov“, nie ako „spôsob práce, či myslenia“. Bez pochopenia pojmu dôkaz sú študenti ukrátení o významný atribút matematiky, ktorý odlišuje matematiku od ostatných vedných odborov. Nie je však možné začať dokazovať bez predchádzajúcej prípravy. Takže študenti nastupujúci na vysokú školu by mali mať za sebou nejakú formu prípravy na dôkaz zo strednej, prípadne základnej školy. A práve touto prípravou sa zaoberáme v článku.

Podstatná časť vedeckej práce spočíva v rozhodovaní, či je dané tvrdenie (hypotéza) pravdivé alebo nepravdivé a následnom potvrdení stanoveného záveru. Každý vedný odbor má vypracované vlastné prostriedky a postupy na overenie pravdivosti tvrdenia. V matematike používame na tento účel dôkaz. Pod pojmom dôkaz v matematickej teórii chápeme konečnú postupnosť formúl v jazyku tejto teórie, z ktorých každá je axióma logiky, axióma teórie alebo vyplýva z predchádzajúcich členov postupnosti na základe zvolených odvodzovacích pravidiel (napr. Modus Ponens a Pravidlo generalizácie). V každodennej matematike používame tzv. skrátený dôkaz: konečná postupnosť formúl v jazyku teórie, z ktorých každá je veta (dokázané tvrdenie) logiky, veta teórie alebo vyplýva z predchádzajúcich členov postupnosti na základe ľubovoľných odvodzovacích pravidiel teórie.

V matematike je pojem dôkaz jednoznačne určený definíciou a pri dokazovaní sa riadime pravidlami, stanovenými matematickou logikou. Z hľadiska škol-

RNDr. Zdenko Takáč, PhD., katedra matematiky, Pedagogická fakulta, Katolícka univerzita v Ružomberku, Hrabovská cesta 1, 034 01 Ružomberok, Slovensko.
E-mail: takac@ku.sk

skej matematiky pojem dôkaz nechápeme tak striktne. V školskej matematike (predovšetkým na ZŠ a SŠ) sa pod pojmom dôkaz zvykne chápať ľubovoľné argumentovanie, ľubovoľný postup na potvrdenie pravdivosti tvrdenia. Na formu dôkazu sa prihliada, v súvislosti s vekom žiakov, podľa pravidla: na formu dôkazu treba dbať do takej miery, aby to, vzhľadom na psychické a mentálne schopnosti žiakov, neviedlo k prílišnému odvedeniu pozornosti od obsahu dôkazu a k následnému formalizmu (pozri [4]).

Úlohou dôkazu v školskej matematike nie je iba demonštrovať pravdivosť tvrdenia (pozri [5]). V [3] Hanna rozdeľuje dôkazy na „dôkazy, ktoré dokazujú" (demonštrujú pravdivosť tvrdenia), a „dôkazy, ktoré objasňujú": *dôkazy, ktoré dokazujú ukazujú iba to, že tvrdenie je pravdivé – poskytujú zrejmé odvodenia záverov osamote... dôkazy, ktoré objasňujú, na druhej strane, ukazujú aj, prečo je tvrdenie pravdivé, poskytujú množinu záverov, ktoré vyplývajú z daných faktov.* V školskej matematike majú dôležitú úlohu práve „dôkazy, ktoré objasňujú".

Dôkaz sa skladá z formálnej a vecnej stránky (pozri [9]). Formálna stránka dôkazu pozostáva z použitia axióm (resp. viet) logiky a odvodzovacích pravidiel logiky. Vecná stránka dôkazu pozostáva z použitia axióm (resp. viet) teórie a odvodzovacích pravidiel teórie, v ktorej dokazujeme. Teda vecná stránka dôkazu vyžaduje vedomosti z matematickej oblasti, v ktorej pracujeme, kým formálna stránka vyžaduje vedomosti z logiky. Prirodzene, tieto dve stránky dôkazu sa navzájom prelínajú a nie je možné jednu oddeliť od druhej. Učiteľ môže pri konkrétnom dôkaze zvoliť rôzne prístupy, podľa toho, akú mieru dôležitosti kladie na vecnú a akú na formálnu stránku dôkazu. Toto rozhodnutie by malo závisieť od pedagogických cieľov:

- dôraz kladený na vecnú stránku (matematické ciele) – rozvoj „matematických" schopností študentov, t.j. pochopenie matematických pojmov, vlastností matematických objektov a vzťahov medzi rôznymi objektmi,
- formálna stránka (logické ciele) – rozvoj „logických" schopností študentov, t.j. používanie logických postupov, metód dôkazu, logických spojok, kvantifikátorov, formálneho jazyka.

Úloha učiteľa, pri predvedení dôkazu žiakom, spočíva v nasledovnom:

- zvoliť vhodný stupeň formálnosti dôkazu – do akej miery sa bude venovať formálnej (logickej) stránke a do akej vecnej stránke,
- zvoliť úlohu dôkazu v rámci vyučovacej aktivity. Napríklad, podľa [10] môže byť úlohou dôkazu v školskej matematike:

  1. overiť, že tvrdenie je pravdivé,
  2. vysvetliť, prečo je tvrdenie pravdivé,
  3. prediskutovať novú matematickú vedomosť,
  4. objaviť alebo vytvoriť novú matematickú vedomosť, prípadne postup,
  5. systematizovať tvrdenie do axiomatického systému.

Dôkaz je v matematike nositeľom presnosti a prísnosti. Pre mnohých matematikov je tiež základným pojmom matematiky. Ale dôkaz je aj nositeľom formalizmu, a preto je pre mnohých žiakov najväčším strašiakom pri štúdiu matematiky. Najmä, pokiaľ sú nútení do dokazovania na formálnej úrovni, ktorá presahuje ich aktuálne možnosti. Učiteľ musí veľmi citlivo zvoliť stupeň formálnej úrovne dôkazu, ktorú vyžaduje od žiakov (ľubovoľného veku), v závislosti od ich veku a mentálnych schopností. Ak učiteľ vyžaduje viac ako môže, žiaci nie sú schopní pochopiť, čo a prečo sa od nich vyžaduje a získajú skôr odpor k dôkazom a dokazovaniu.

Motivácia študentov k odôvodňovaniu a dokazovaniu

V druhej polovici 20. storočia psychológovia, zaoberajúci sa predovšetkým vzdelávaním, skúmali vnútornú a vonkajšiu motiváciu. Množstvo výsledkov ukázalo priamu spojitosť medzi vnútornou motiváciou študentov a dosiahnutím vzdelávacích úspechov, ako i radosti študentov so vzdelávania (napríklad [1], [6], [11]). O vnútornej motivácii hovoríme vtedy, keď sa ľudia zaoberajú nejakou aktivitou bez vonkajších podnetov. Naopak, vonkajšia motivácia vyplýva z vonkajších podnetov, či už sa jedná o podnety cielené alebo náhodné. Vnútorná motivácia je pri činnosti žiakov väčšinou vhodnejšia (aj keď nie vždy silnejšia) ako vonkajšia motivácia.

Medzi najčastejšie detské otázky v predškolskom veku patria: „Čo je to?“ a „Prečo?“. Najmä druhá privádza často rodičov do zúfalstva. Túžba vedieť, prečo sa veci dejú, tak ako sa dejú, je prirodzená detská vlastnosť. Takzvaným opytovacím obdobím „prečo?“ prechádzajú deti ešte v predškolskom veku a je to obdobie, keď sa významne rozvíja príčinné myslenie. Práve reakcie okolia v tomto období môže mať pozitívny, ale aj negatívny vplyv na rozvoj príčinného myslenia u dieťaťa. Prirodzená detská zvedavosť pretrváva aj v mladšom školskom veku. Udržať a rozvíjať túto vlastnosť je jedným zo základných všeobecných cieľov matematického vzdelávania (a nielen matematického). Ak je to prirodzená vlastnosť, jej udržanie sa zdá byť jednoduchou úlohou. Ale problémy s motiváciou študentov k odôvodneniu získaných výsledkov (nehovoriac o dôkazoch) ukazujú, že to také jednoduché nie je.

Pre dosiahnutie stanoveného cieľa v ľubovoľnej ľudskej činnosti sú potrebné:

- vhodné podmienky,
- relevantné schopnosti,
- vôľa dosiahnuť cieľ.

To platí aj pri matematickom vzdelávaní a, prirodzene, i pri vyučovaní dôkazov. Takže, ak chceme dosiahnuť, aby žiaci dokázali dané tvrdenie, potrebujeme:

- mať dobrú pracovnú klímu na hodine (vhodné podmienky),
- študenti (o to skôr učitelia) musia mať potrebné vedomosti o matematických objektoch vyskytujúcich sa v dôkaze a tiež potrebné vedomosti o možných logických postupoch v dôkaze (relevantné schopnosti),
- študenti majú motiváciu dokázať tvrdenie (vôľa dosiahnuť cieľ).

Prvý bod je jedným z dlhodobých pedagogických cieľov každého učiteľa. Druhý bod závisí od odbornej prípravy učiteľa, od predchádzajúcich vzdelávacích výsledkov a od zvolenia vhodného tvrdenia na dokazovanie – primeraná náročnosť dôkazu po matematickej i logickej (formálnej) stránke. Posledný bod je záležitosť motivácie, ktorou sa zaoberáme v tomto článku.

Motivácia k dokazovaniu môže vyplývať z rôznych popudov:

a) žiak chce presvedčiť sám seba, že tvrdenie je pravdivé,

b) žiak chce presvedčiť niekoho iného, že tvrdenie je pravdivé,

c) žiak považuje tvrdenie za pravdivé, ale chce zistiť, prečo je pravdivé,

d) žiak nevie odhadnúť, či je tvrdenie pravdivé alebo nepravdivé, a chce to zistiť,

e) učiteľ (alebo zadanie úlohy) vyžaduje dôkaz.

Body *a*, *d* sú vhodnými predpokladmi pre rozvoj schopnosti žiakov hľadať logicky korektné argumenty (rozvoj deduktívneho myslenia). Bod *b* je navyše vhodným predpokladom pre rozvoj verbálnych schopností študentov, ich schopnosti presne formulovať svoje argumenty a vo vyššom veku i spresnenie symbolického jazyka. Body *c*, *d* sú vhodnými predpokladmi pre uvedomenie si vzťahov a súvislostí medzi jednotlivými pojmami, vyskytujúcimi sa v dôkaze, ako i ďalšími pojmami a zatriedenie nového poznatku do štruktúry skôr vytvorených poznatkov. S miernym zveličením možno povedať, že bod *e* je vhodným predpokladom pre zabitie väčšiny dobrého opísaného v prvých štyroch bodoch.

Keď to zhrnieme, body *a* až *d* zodpovedajú vnútornej motivácii, kým bod *e* vonkajšej. Ak učiteľ dosiahne, aby študenti dokazovali na základe vnútornej motivácie, potom je jeho úloha podstatne jednoduchšia: vybrať vhodný problém a podľa potreby usmerňovať činnosť študentov.

V praxi sa žiaľ veľmi často stretneme so situáciou zodpovedajúcou poslednému bodu – učiteľ má pripravené tvrdenie, ktorého dôkaz chce predviesť alebo chce, aby ho skonštruovali žiaci. Ale takúto situáciu učiteľ väčšinou môže zmeniť tak, aby nebol dôkaz priamo vyžiadaný od žiakov, ale aby ich k dôkazu viedol jeden z dôvodov uvedených v bodoch *a* až *d*. Uvádzame niekoľko príkladov:

- Učiteľ zistí, kto v triede považuje tvrdenie za pravdivé, kto za nepravdivé. Ak sa vytvoria dve skupiny, stačí ich primäť k tomu, aby obhájili svoj názor. Tu treba pripomenúť, že činnosť skupiny, ktorá odhadla výsledok nesprávne, má rovnako veľký význam, ako činnosť druhej skupiny – ak ich totiž argumenty presvedčia o tom, že by mali zmeniť svoj názor, znamená to, že porovnávali silu svojich argumentov proti argumentom iných a to je veľmi priaznivá situácia na rozvoj deduktívneho myslenia. V tomto prípade môže byť silným popudom pre žiakov prirodzená ľudská túžba ukázať, že „ja mám pravdu“ (vnútorná motivácia).
- Ak väčšina žiakov odhalí pravdivosť, resp. nepravdivosť tvrdenia, učiteľ v nich môže vyvolať pochybnosti nejakým protiargumentom alebo protipríkladom. V tomto prípade je dôležité mať pripravený naozaj vhodný protiargument, ktorý síce nebude korektný, ale bude dostatočne dôveryhodný, aby študenti začali pochybovať o svojom odhade. Ak sa to stane, začnú preverovať učiteľove protiargumenty (vnútorná motivácia súvisiaca väčšinou s dôverou vo vlastný úsudok a túžbou ukázať, že učiteľov argument je nesprávny) alebo preverovať a spresňovať vlastné pôvodné argumenty (vnútorná motivácia súvisiaca väčšinou s nedôverou vo vlastný úsudok a túžbou opraviť vlastnú chybu alebo sa presvedčiť o správnosti vlastného postupu). V oboch prípadoch je ich činnosť veľmi prospešná pre naplnenie

výchovno-vzdelávacích cieľov súvisiacich s argumentáciou.

- Ak väčšina žiakov odhalí pravdivosť, resp. nepravdivosť tvrdenia nesprávne, učiteľ v nich opäť môže vyvolať pochybnosti nejakým protiargumentom alebo protipríkladom. V tomto prípade by mal byť protiargument dostatočne dôveryhodný, aby študenti začali pochybovať o svojom odhade, ale zároveň dostatočne hmlistý, aby žiakom „neukázal“ celý dôkaz. Činnosť žiakov by mala mať podobný priebeh ako v predchádzajúcom prípade. Rozdiel spočíva v tom, že žiak by si nakoniec mal uvedomiť svoju chybu. Ak naozaj pochopí, v čom urobil chybu, zvýši sa šanca, že v budúcnosti sa podobným chybám vyhne.
- Navodiť situáciu, ktorá sama prirodzeným spôsobom „núti“ žiakov k dokazovaniu (k určitej forme argumentácie). Úlohy, ktoré spĺňajú túto požiadavku, sú opísané v nasledujúcej časti článku.

MRP úlohy

S narastajúcim vekom sa zvedavosť detí zmenšuje a otázku: „Prečo?“ kladú čoraz zriedkavejšie. Matematika, špeciálne argumentácia a dôkazy, poskytujú veľmi dobré možnosti na udržanie tejto zvedavosti a najmä na jej rozvinutie do vyššej fázy: uvedomovanie si potreby byť schopný odôvodniť svoje (cudzie) tvrdenia. Argumentácia a dôkazy nie sú aktivity vyhradené pre špeciálny čas alebo špeciálne učivo matematiky. Mali by tvoriť prirodzenú, priebežnú časť diskusie v triede, bez ohľadu na preberané učivo (NCTM 2000, možno nájsť na adrese http://standards.nctm.org/). V tomto ohľade môžu byť pomôckou pre učiteľov úlohy typu:

1. Úloha, ktorá má na prvý pohľad „očividné“ riešenie, ale v skutočnosti má iný, často prekvapujúci, výsledok.
2. Úloha, ktorú je možné intuitívne vyriešiť (nájsť, resp. odhadnúť predpokladané riešenie), ale bez istoty, že je riešenie správne.
3. Úloha, pri ktorej pripadá do úvahy niekoľko rôznych riešení a žiak musí rozhodnúť (a potvrdiť), ktoré z nich je správne.

Medzi týmito typmi úloh nie je ostro vymedzená hranica – nejedná sa o zaškatuľkovanie úloh do troch jasne oddelených skupín. Nie sú to dôkazové úlohy, vo väčšine z nich sa (ani pri riešení) s dôkazom nestretneme. Sú to jednoducho úlohy, ktoré by mali trochu zneistiť študentov v ich dôvere k riešeniu, založenom iba na rýchlom odhade a intuícii, bez overenia. Navyše to môžu byť úlohy z ľubovoľnej oblasti matematiky a s ľubovoľnou náročnosťou. V článku [8] sú takéto úlohy nazvané MRP úlohy (Motivation to Reasoning and Proving tasks). V tomto článku je opísaný pedagogický experiment, zaoberajúci sa vplyvom riešenia MRP úloh na ochotu študentov (v budúcnosti) dokazovať. Z výsledkov vyplynulo, že u žiakov druhého stupňa ZŠ, ktorí sa počas jedného školského roka pravidelne zaoberali riešením MRP úloh, bola ochota odôvodňovať svoje tvrdenia pred učiteľom preukázateľne vyššia ako v porovnávacej vzorke žiakov. Ako príklad uvedieme tri MRP úlohy aj s komentárom (viac úloh možno nájsť v [8]):

Úloha 1:
Peter a Monika sa pretekajú na trati z Ružomberka do Dolného Kubína a späť. Monika ide z Ružomberka do Dolného Kubína na bicykli priemernou rýchlosťou

25 km/h a späť ide peši priemernou rýchlosťou 5 km/h. Peter celú trať tam aj späť prebehol priemernou rýchlosťou 9 km/h. Kto preteky vyhral, ak vzdialenosť medzi štartom v Ružomberku a obrátkou v Dolnom Kubíne je 25 km?

Komentár k úlohe 1:
V tejto úlohe môžeme prípadne vynechať informáciu o vzdialenosti medzi Ružomberkom a Dolným Kubínom, ktorá nie je potrebná. Závisí to od veku žiakov a ich schopností pracovať s premennými. Nami očakávaný účinok tejto úlohy sa prejaví, ak žiaci tvrdia, že vyhrala Monika. Dajú sa pritom predpokladať dve rôzne odôvodnenia:

1. Výpočtom: Monika vyhrá, pretože išla priemernou rýchlosťou $v = \dfrac{25+5}{2} = 15$ km/h a Peter iba 9 km/h.
2. Slovné: Monika vyhrá, pretože z Ružomberka do Dolného Kubína išla oveľa rýchlejšie ako Peter, a naspäť išla iba trochu pomalšie ako on.

Poznamenajme, že táto úloha bola v rámci experimentu zadávaná žiakom od siedmeho ročníka základnej školy po tretí ročník strednej školy. S obidvomi odôvodneniami sme sa stretli vo všetkých ročníkoch, pričom iba mierne klesalo percento takýchto nesprávnych odpovedí so zvyšujúcim sa vekom žiakov.

Prvé odôvodnenie vyplýva z nedostatočného chápania pojmu priemerná rýchlosť. Táto chyba je veľmi častá – žiaci si neuvedomujú, že uvedený postup môžu zvoliť v prípade, keď sa Monika pohybuje rýchlosťou 25 km/h a potom 5 km/h v rovnakých časových intervaloch, nie po rovnakých dráhach. Druhé odôvodnenie je založené na intuícii. Čísla v zadaní sú volené tak, aby zviedli žiaka práve k takémuto záveru. Tu sa prejavuje buď nedôslednosť žiaka (riešenie „vidí“ na prvý pohľad a nedá si námahu s jeho overením), alebo, tak ako v prvom prípade, nedostatočné chápanie pojmu priemerná rýchlosť.

V každom prípade, primárnym cieľom riešenia tejto úlohy by malo byť precvičenie pojmu priemerná rýchlosť, jeho hlbšie pochopenie a upozornenie na často nesprávne používanie opísané vyššie. Ak tento cieľ dosiahneme, zároveň tým splníme i sekundárny cieľ danej úlohy – dôverovať svojím tvrdeniam až vtedy, keď si ich overíme. Zadanie tejto úlohy, v opísanom experimente, vždy viedlo k nesprávnemu riešeniu žiakov a najmä k veľkému prekvapeniu, keď sa pomocou podrobného výpočtu presvedčili, že preteky skutočne vyhral Peter.

Úloha 2: V rohu šachovnice stojí jazdec (políčko A1). Môže obskákať celú šachovnicu (t.j. všetky políčka), pričom na každom políčku by stál práve raz, a dostať sa tak do opačného rohu šachovnice (na políčko B8)?

Komentár k úlohe 2: Pri tejto úloha je vhodné mať k dispozícii šachovnicu a ukázať žiakom, ako sa môže v šachu pohybovať jazdec. Potom potrebujú žiaci čas na experimentovanie. Je predpoklad, že časť odpovie áno, časť nie a časť nebude rozhodnutá, pričom aj tí, ktorí sa rozhodnú pre jednu z možností (áno alebo nie), si nebudú istí svojim záverom (vychádzame z osobných skúseností autora s touto úlohou a zo skúseností zo spomínaného pedagogického výskumu). V tejto úlohe je dobré nechať žiakom voľnosť, nech prichádzajú s nápadmi, pretože tým sa väčšinou iba utvrdia, že nevedia s istotou povedať, aká je odpoveď (predpokladáme, že nikto nenájde presvedčivý argument pre svoju odpoveď). Nakoniec ich navedieme na dôkaz (pojem dôkaz používame v zmysle dôkazu v školskej matematike). Ten má v tomto prípade mimoriadne vhodné vlastnosti pre náš cieľ – je taký jednoduchý, že by ho mal pochopiť a uveriť mu naozaj každý žiak, na druhej strane, bez dôkazu zrejme žiaci nikdy nenadobudnú istotu, aké je riešenie úlohy. Dôkaz je založený na nasledovnej myšlienke: políčka A1 a H8 sú biele, jazdec pri každom ťahu z bieleho políčka prejde na čierne, resp. naopak, z čierneho prejde na biele. Keďže na každom políčku má stať práve raz a šachovnica obsahuje 64 políčok, musí urobiť 63 ťahov. Keď začína na bielom, musí byť po nepárnom počte pohybov na čiernom políčku, ale H8 je biele. Preto to nie je možné. Táto úloha je vhodná aj na dlhodobejšie riešenie. Učiteľ môže žiakom poskytnúť dostatok času aj doma. Ak napriek tomu neprídu na dôkaz, o to silnejším zážitkom bude, keď ich k nemu na hodine navedie učiteľ. V rámci experimentu sa osvedčili najmä dve pomôcky učiteľa:

1. „Skúmajte zákonitosti, ktoré platia pri ľubovoľnom pohybe jazdca po šachovnici.“
2. „Môže vám pomôcť fakt, že jednotlivé políčka šachovnice sú biele alebo čierne.“

Ak niekto príde s dôkazom aj bez pomôcky (či už z vlastnej hlavy alebo mu pomohol niekto mimo triedy), o to lepšie, môže prezentovať dôkaz pred triedou.

Úloha 3: Pretekajú sa pes a mačka po priamej dráhe 100 metrov tam a späť. Pes na jeden skok preskočí 3 metre a mačka iba 2 metre, ale mačka urobí 3 skoky za ten istý čas, ako pes urobí 2 skoky. Ako skončia preteky?

Komentár k úlohe 3: Nami očakávaný účinok tejto úlohy sa prejaví, ak žiaci tvrdia, že nikto nevyhrá (alebo vyhrajú obaja). Väčšina žiakov si veľmi rýchlo uvedomí, že pes a mačka sa pohybujú rovnakou rýchlosťou: pes urobí dva trojmetrové skoky (prejde 6 metrov) za ten istý čas, ako mačka tri dvojmetrové skoky (prejde 6 metrov). Často si, pri radosti z rýchleho „vyriešenia“ úlohy, neuvedomia, že pri obrátke, po prejdení 100 metrov, sa mačka dostane pred psa a vďaka tomu vyhrá preteky. Táto úloha sa v princípe podobá úlohe 1, uvedenej vyššie. Rozdiel je v tom, že je jednoduchšia. Pozornejší žiaci sa nenechajú „nachytať“, a preto pri nich nevznikne očakávaný efekt MRP úlohy. Zase naopak, pre žiakov, ktorí sa „nachytať“ nechajú, má veľkú výhodu, že vysvetlenie je veľmi jednoduché a pochopia ho aj najslabší žiaci, bez potreby nejakých matematických vedomostí (počas experimentu bol pri vysvetlení v úlohe 1 so slabšími žiakmi často problém, v úlohe 3 sa tento problém nevyskytol).

Využiteľnosť daného problému ako MRP úlohy závisí nielen od samotnej úlohy, ale aj od reakcie žiakov na úlohu. Aby MRP úloha dosiahla svoj cieľ, musí v triede spontánne vzniknúť vhodná atmosféra – teda žiaci buď majú návrh riešenia, ale cítia pochybnosti o jeho správnosti, alebo našli nesprávne riešenie, o ktorom sú presvedčení, že je správne (s tým, že sa nejedná o numerickú chybu), prípadne sa nevedia rozhodnúť, ktoré z možných riešení je správne. Ak takáto atmosféra nevznikne, nemá zmysel triedu do niečoho nútiť. Sila MRP úloh spočíva práve v tom, že žiaci zažijú prekvapenie na úkor svojho presvedčenia (ktoré si neoverili, prípadne urobili chybu v argumentácii), alebo sú nerozhodní a sami sa chcú presvedčiť, ktoré riešenie je správne. Naopak, často sa na hodine môže stať, že takáto nálada vznikne bez zámeru učiteľa. V takom prípade je dobré, keď si učiteľ situáciu uvedomí a využije riešený problém aj ako MRP úlohu. Všimnime si, že v úlohe 1 a úlohe 3 je podstatným faktorom prekvapenie – žiaci si uvedomia, že aj v zdanlivo jednoduchých situáciách sa môžu pomýliť, ak si svoje tvrdenie poriadne neoveria. V úlohe 2 je podstatný fakt, že bez overenia (dôkazu) žiaci nie sú schopní rozhodnúť, ktoré riešenie je správne, ale na základe pomerne jednoduchého dôkazu to „vidia".

Záver

Záver opísaného experimentu znel, že žiaci druhého stupňa ZŠ, ktorí sa zaoberali MRP úlohami mali vyššiu vnútornú motiváciu do odôvodňovania – presnejšie do hľadania argumentov na podporu svojho tvrdenia (riešenia). Od toho je ešte k matematickému dôkazu ďaleko, ale, vzhľadom na vek, je to dôležitý krok k postupnému zavádzaniu pojmu dôkaz a akceptovaniu jeho dôležitosti žiakmi. Dospeli sme k názoru, že zaoberanie sa MRP úlohami rozvíja u žiakov kritické myslenie, cítia potrebu overiť vlastné, prípadne cudzie tvrdenia a neprijímať nové informácie bezducho a nekriticky. Výsledkom je, že vnútorná motivácia k odôvodňovaniu tvrdení rastie – čo by sa malo pozitívne prejaviť v budúcnosti pri dôkazoch. Tu je dôležitý prechod od dôkazu, chápaného ako ľubovoľné odôvodnenie tvrdenia, k dôkazu v matematickej teórii spĺňajúcemu formálne kritéria stanovené matematickou logikou. To je zložitý problém, ktorým sme sa v tomto článku nezaoberali, ale mal by byť obsahom ďalšej práce autora. Navyše treba brať do úvahy výsledky experimentov, uvedené napríklad v [2] a [7], z ktorých vyplýva, že väčšina žiakov základných a stredných škôl o pravdivosti tvrdenia viac presvedčia konkrétne príklady, ako logické odôvodnenie.

Rozvíjanie kritického myslenia žiakov je dôležite nielen v matematike, ale aj v každodennom živote a malo by byť jedným z cieľov školskej matematiky. Žiak by sa mal naučiť prijímať informácie (aj keď je ich autorom učiteľ) s určitým stupňom nedôvery a pred akceptovaním informácie by sa mal nad ňou zamyslieť a vedieť, prečo ju považuje za pravdivú, prípadne, prečo o jej pravdivosti pochybuje. Tým danú informáciu jednak lepšie pochopí – jeho poznatok bude kvalitnejší a bude zaradený do štruktúry iných poznatkov, jednak si ju lepšie zapamätá – jeho poznatok bude trvalejší. A tu zďaleka nehovoríme iba o matematike.

Pochybnosti žiaka o pravdivosti učiteľových tvrdení nemusia pramениť z faktu, že nerešpektuje učiteľove odborné vedomosti. Ale jeho rešpekt nevylučuje podvedomú túžbu potvrdiť novú informáciu „vlastným spôsobom" – formulovať (aspoň v duchu) „svoje vlastné" argumenty, ktoré potvrdzujú jej pravdivosť. Ak je žiak schopný nájsť také argumenty, je predpoklad, že dosiahne vyšší stupeň pochopenia. Preto učiteľ nemôže brať, ako svoju urážku, keď žiak neakceptuje jeho tvrdenia hneď, ale špekuluje nad nimi a hľadá v nich chyby. Naopak, ak mu v tom pomôže, usmerní jeho postup, prípadne mu ukáže, kde robí chyby a nakoniec spoločne prídu k záveru, že tvrdenie je skutočne pravdivé, je to priaznivá situácia pre vznik trvalého a hodnotného poznatku.

Výhoda je, že aj formulovanie nesprávnych argumentov pomáha pri rozvoji kritického myslenia a pri rozvíjanie deduktívnych schopností. Ak napríklad učiteľ pomôže žiakovi uvedomiť si jeho chybu a ten ju skutočne „vidí“, pravdepodobne sa z tejto situácie poučí a zvýši sa šanca, že sa podobnej chyby už v budúcnosti nedopustí.

L i t e r a t ú r a

[1] Deci, E. L., Ryan, R. M.: *Intrinsic motivation and self-determination in human behavior.* Plenum, New York 1985.
[2] Fischbein, E.: *Intuition and Proof.* For the Learning of Mathematics, 3 (2), 1982, 9–18.
[3] Hanna, G.: *Proofs that prove and proofs that explain.* Proc. of the Thirteenth International Conference for the Psychology of the Mathematics Education, 2 (1985), 45–51.
[4] Hanna, G.: *Challenges to the importance of proof.* For the Learning of Mathematics, 15 (3), 1995, 42–49.
[5] Knuth, E. J.: *Proof as a tool for learning mathematics.* The Mathematics Teacher, 95 (7), 2002, 486–491.
[6] Lokšová, I., Lokša, J.: *Tvořivé vyučování.* Grada Publishing, Praha 2003.
[7] Martin, W. G., Harel, G.: *Proof frames of preservice elementary teachers.* Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 20, 41–51.
[8] Takáč, Z.: *Influence of MRP Tasks on Students' Willingness to Reasoning and Proving.* ICMI Study 19: Proof and Proving in Mathematics Education, Taipei, Taiwan, 2009, Volume 2, 202–207.
[9] Takáč, Z.: *Analýza matematického dôkazu.* Dizertačná práca, Prírodovedecká fakulta UPJŠ v Košiciach, 2007. (`http://fedu.ku.sk/~takac/publikacie/07diz_takac.pdf`)
[10] De Villiers, M.: *Rethinking proof with the Geometer's Sketchpad.* CA: Key Curriculum Press, Emeryville 1999.
[11] Zelina, M.: *Aktivizácia a motivácia žiakov na vyučovaní.* Krajský pedagogický ústav, Bratislava 1989.

Zprávy oznámení

Prof. Ing. MIROSLAV FINGER, DrSc., SEDMDESÁTILETÝ

Na letošní 27. srpen připadá významné životní jubileum Prof. Ing. Miroslava Fingera, DrSc., profesora Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze a dlouholetého spolupracovníka Spojeného ústavu jaderných výzkumů (SÚJV) v Dubně. Profesor Finger (narozen v roce 1939) byl a stále je významným českým odborníkem v oblastech jaderné fyziky, fyziky elementárních částic, fyziky nízkých teplot a aplikace jaderných metod ve fyzice kondenzovaných soustav. Položili jsme při této příležitosti panu profesorovi několik otázek:

Jak vzpomínáte, pane profesore, na své začátky ve fyzice?

Vysokoškolské studium jsem absolvoval v létech 1956 až 1961 na Fakultě technické a jaderné fyziky Univerzity Karlovy, a později Českého vysokého učení technického (ČVUT) v Praze, obor technická fyzika, specializace jaderná fyzika. Po dokončení studia jsem začal pracovat jako pedagogický asistent a asistent na katedře fyziky Fakulty