Emil Vitásek

# Periodické distribuce a diskrétní Fourierova transformace

*Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, Vol. 54 (2009), No. 2, 137–144

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/141897`

# Periodické distribuce a diskrétní Fourierova transformace

*Emil Vitásek, Praha*

## 1. Úvod

Diskrétní Fourierovou transformací se obvykle rozumí konstrukce bází v konečně dimenzionálních vektorových prostorech, kde vektory bázových funkcí jsou tvořeny hodnotami trigonometrických polynomů v konečném počtu bodů. Souřadnice vektorů v těchto prostorech jsou pak tvořeny *diskrétními Fourierovými koeficienty*, tj. konečnými součty paralelními ke klasickým Fourierovým koeficientům. Zde popíšeme poněkud jiný postup, kdy si budeme všímat nikoliv konečných posloupností reálných nebo komplexních čísel, ale nekonečných posloupností. Jejich obrazy pak budou nekonečné Fourierovy řady určitých speciálních typů. Naším cílem bude vypracovat analogii operátorového počtu založeného na klasické Fourierově transformaci. Popisovaný postup pochází od světoznámého amerického matematika českého původu Ivo Babušky a byl publikován v renomovaném polském časopise Archiwum mechaniki stosowanej (viz [1]). Tento časopis je však zaměřen spíše na teoretickou mechaniku než na aplikovanou matematiku, a proto článek nevešel mezi matematiky v takovou známost, jak by zasloužil.

## 2. Konvoluce síťových funkcí

V tomto odstavci zavedeme dva prostory komplexních funkcí diskrétní proměnné a jednu jednoduchou operaci nad nimi. V následující textu označíme množinu celých, resp. komplexních čísel obvyklými symboly $\mathbb{Z}$, resp. $\mathbb{C}$. O množině funkcí $f := \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ pak budeme mluvit jako o *diskrétních* nebo *síťových funkcích*. Jde tedy vlastně o posloupnosti komplexních čísel.

Řekneme, že diskrétní funkce $f$ je *pomalu rostoucí*, existuje-li celé číslo $p \geqq 0$ a (reálná) konstanta $C \geqq 0$ takové, že platí

$$|f(n)| \leqq C(|n|^p + 1) \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{2.1}$$

Množinu všech pomalu rostoucích diskrétních funkcí označíme symbolem $\mathcal{M}$. Upozorněme, že konstanty $p$ a $C$ v nerovnosti (2.1) mohou záviset na individuální funkci $f$.

RNDr. Emil Vitásek, CSc., Matematický ústav AV ČR, Žitná 25, 115 67 Praha 1, e-mail: vitas@math.cas.cz

Výzkum byl podpořen výzkumným záměrem čís. AV0Z10190503 Akademie věd ČR.

Množina $\mathcal{M}$ tvoří zřejmě lineární vektorový prostor a navíc se v ní dá zavést taková topologie, že vznikne lokálně konvexní topologický lineární prostor. Tato topologie se přitom dá zvolit tak, že konvergence $f_n \to f$ v $\mathcal{M}$ je charakterizována následujícími dvěma vlastnostmi:

(i) existuje celé číslo $p \geqq 0$ a reálné číslo $C \geqq 0$ takové, že nerovnost

$$|f_n(j)| \leqq C(|j|^p + 1) \quad \forall j \in \mathbb{Z} \tag{2.2}$$

platí pro *všechna* $n$;

(ii) $\lim_{n\to\infty} f_n(j)$ existuje pro každé $j \in \mathbb{Z}$.

Řekneme, že diskrétní funkce $a := \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ je *rychle klesající*, existuje-li ke každému celému číslu $p \geqq 0$ (reálná) konstanta $C_p \geqq 0$ taková, že platí

$$|n|^p |a(n)| \leqq C_p \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{2.3}$$

Množinu všech rychle klesajících diskrétních funkcí označíme symbolem $\hat{\mathcal{M}}$.

Buď nyní dána rychle klesající diskrétní funkce $a$ a pomalu rostoucí diskrétní funkce $f$. Pak je vidět v podstatě na první pohled, že řada na pravé straně rovnice

$$(Af)(n) = \sum_{j=-\infty}^{j=\infty} a(n-j) f(j) \tag{2.4}$$

je absolutně konvergentní. Tento předpis tedy skutečně definuje funkci $Af := \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$. Ne příliš komplikovaněji se dokáže, že dokonce platí $A(f) \in \mathcal{M}$, takže jde o zobrazení $\mathcal{M} \to \mathcal{M}$. Zobrazení $A := \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ dané diskrétní funkcí $a \in \hat{\mathcal{M}}$ a definované rovnicí (2.4) nazveme *konvolucí* funkcí $a$ a $f$. Platí pro ně následující věta.

**Věta 2.1.** Nechť je $a \in \hat{\mathcal{M}}$. Pak konvoluční zobrazení $A := \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ dané vzorcem (2.4) je lineární spojité zobrazení.

Tato věta stejně jako další tvrzení týkající se diskrétní Fourierovy transformace a periodických zobecněných funkcí jsou podrobně dokázány v už výše citované práci (viz [1]). V dalším už to nebudeme v jednotlivých konkrétních případech připomínat.

Prostor $\mathcal{M}$ je základním prostorem, v němž budeme konstruovat diskrétní Fourierovu transformaci. Konvoluční zobrazení bude přitom hrát zásadní roli.

## 3. Fourierova transformace síťových funkcí

Tento odstavec obsahuje základy teorie Fourierovy transformace diskrétních funkcí. Než však zformulujeme příslušné definice a věty, uvedeme pro pohodlí čtenáře některé pojmy a tvrzení z teorie Schwartzových distribucí (zobecněných funkcí). Základní informace nalezne čtenář v původní monografii [5] a samozřejmě v celé řadě dalších publikací (viz např. [4], [6], [8]).

Symbolem $\mathcal{S}$ označíme lineární prostor funkcí $\varphi := \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, které mají v $\mathbb{R}$ spojité derivace libovolně vysokých řádů a takových, že ke každé dvojici přirozených čísel $p$ a $q$ existuje konstanta $C_{p,q}$ taková, že platí

$$|x|^p|\varphi^{(q)}(x)| \leqq C_{p,q} \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3.1}$$

Funkce z prostoru $\mathcal{S}$ ze běžně nazývají *rychle klesající funkce* a tvoří zřejmě lineární vektorový prostor. Dále se dá v tomto prostoru zavést topologie tak, že prostor $\mathcal{S}$ je lokálně konvexní topologický lineární prostor, ve kterém konvergence $\varphi_n \to \varphi$ značí, že

(i) ke každé dvojici přirozených čísel $p$ a $q$ existuje konstanta $C_{p,q}$ taková, že nerovnost
$$|x|^p|\varphi_n^{(q)}(x)| \leqq C_{p,q} \tag{3.2}$$
platí pro všechna přirozená $n$ a všechna $x \in \mathbb{R}$ ($\varphi^{(0)} = \varphi$);

(ii) posloupnost $\{\varphi_n^{(j)}\}_1^\infty$ konverguje pro každé $j = 0, 1, \ldots$ stejnoměrně na každém kompaktním intervalu $I \subset \mathbb{R}$.

Prostor lineárních funkcionálů nad prostorem $\mathcal{S}$ opatřený slabou topologií nazveme prostorem *pomalu rostoucích zobecněných funkcí* nebo *temperovaných distribucí* a označíme jej symbolem $\mathcal{S}'$.

Konvergence posloupnosti $\{f_n\}$ v prostoru $\mathcal{S}'$ znamená, že číselná posloupnost $\{\langle f_n, \varphi\rangle\}$ konverguje pro každé $\varphi \in \mathcal{S}$. Symbolem $\langle f, \varphi\rangle$ jsme přitom označili hodnotu funkcionálu $f \in \mathcal{S}'$ v prvku $\varphi \in \mathcal{S}$.

Samotné prvky prostoru $\mathcal{S}'$ budeme nazývat temperovanými distribucemi nebo temperovanými zobecněnými funkcemi; slovo temperovaný budeme přitom většinou vynechávat. Název zobecněná funkce je oprávněn tím, že každé funkci $g := \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, která je integrovatelná na každém konečném intervalu a která neroste v nekonečnu rychleji než jako nějaký polynom, můžeme přiřadit zobecněnou funkci $f_g$ pomocí integrálu

$$\langle f_g, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\varphi(x)\mathrm{d}x. \tag{3.3}$$

Poznamenejme, že běžnějším prostorem distribucí je prostor $\mathcal{D}'$ lineárních spojitých funkcionálů nad prostorem $\mathcal{D}$ nekonečně diferencovatelných funkcí s kompaktním nosičem, tj. rovných nule vně nějakého kompaktního intervalu. Prostor $\mathcal{S}'$ je podprostorem prostoru $\mathcal{D}'$ a zvolili jsme jej proto že je vhodnější pro vyšetřování vlastností diskrétní Fourierovy transformace. Tak je tomu ostatně i v případě spojité Fourierovy transformace. Studium Fourierovy transformace dalo vlastně jeden z podnětů k vyšetřování prostorů typu $\mathcal{S}'$.

Zobecněnou funkci lze zřejmě násobit libovolnou komplexní konstantou, přičemž součin je opět zobecněná funkce. Lze ji také násobit libovolnou nekonečně diferencovatelnou funkcí $a := \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, která má navíc tu vlastnost, že ke každému přirozenému $q$ existuje přirozené číslo $p$ a reálná konstanta $C$ tak, že platí

$$|a^{(q)}(x)| \leqq C(|x|^p + 1) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3.4}$$

Ve shodě s předchozím názvoslovím budeme někdy o funkci s vlastností (3.4) hovořit jako o *pomalu rostoucí funkci*. Nerovnosti (3.4) zaručují, že $a\varphi \in S$ pro každou funkci $\varphi \in S$. To nám umožňuje definovat součin pomalu rostoucí zobecněné funkce $f$ s pomalu rostoucí funkcí $f \in S'$ rovnicí

$$\langle af, \varphi \rangle = \langle f, a\varphi \rangle \,. \tag{3.5}$$

Už výše jsme se zmínili, že motivace pro zavedení prostorů $\mathcal{S}$ je dosti podstatně dána studiem Fourierovy transformace. Vysvětleme to nyní poněkud podrobněji. Zobrazení, které funkci $\varphi$ přiřazuje funkci $F(\varphi)$ předpisem

$$\big(F(\varphi)\big)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\mathrm{d}t, \tag{3.6}$$

se nazývá Fourierova transformace a má smysl pro každou funkci $\varphi \in \mathcal{S}$. Je to vidět takřka na první pohled z rovnice (3.2). Důležitější je, že stejně snadno se nahlédne, že navíc je $F(\varphi) \in \mathcal{S}$. Prostor $\mathcal{S}$ je tedy uzavřený vzhledem k Fourierově transformaci. Dále se dá dokázat, že zobrazení $F$ je prosté lineární a spojité zobrazení prostoru $\mathcal{S}$ na prostor $\mathcal{S}$. Existuje také inverzní zobrazeni $F^{-1}$, které je rovněž spojité (viz např. [8]).

Připomeňme, že každá zobecněná funkce má zobecněnou derivaci libovolně vysokého řádu $r$, která je zase zobecněnou funkcí a je definována vztahem

$$\left\langle f^{(r)}, \varphi \right\rangle = (-1)^r \left\langle f, \varphi^{(r)} \right\rangle .$$

Nyní už přejdeme k zavedení speciálních podmnožin prostoru zobecněných funkcí $\mathcal{S}$, které mají při vyšetřování vlastností Fourierovy transformace diskrétních funkcí z prostoru $\mathcal{M}$ zásadní důležitost.

První z těchto podmnožin označíme symbolem $\mathcal{P}$ a budeme jí rozumět takové funkce $f \in \mathcal{S}'$, které se dají psát ve tvaru řady

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} \tag{3.7}$$

konvergující v prostoru $\mathcal{S}'$. Zápis (3.7) se sice běžně užívá, ale není přesně vzato matematicky korektní, protože $f$ je zobecněná funkce a o její hodnotě v bodě $x$ nemá samozřejmě smysl mluvit. Vzorec (3.7) je tedy třeba chápat jako stručný zápis toho, že funkcionál $f \in \mathcal{P}$ je tvaru

$$\langle f, \varphi \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\varphi(x)\mathrm{d}x, \tag{3.8}$$

kde koeficienty $c_n$ musí být takové, aby řada na pravé straně tohoto vzorce konvergovala. Množina $\mathcal{P}$ tvoří zřejmě lineární vektorový prostor. Další vlastnosti tohoto prostoru zformulujeme v několika následujících větách.

**Věta 3.1.** *Nechť posloupnost zobecněných funkcí $\{f_n\} \subset \mathcal{P}$ konverguje v prostoru $\mathcal{S}'$ k funkci $f$. Pak je také $f \in \mathcal{P}$.*

Vektorový prostor $\mathcal{P}$ je tedy skutečně podprostorem prostoru $\mathcal{S}'$.

**Věta 3.2.** *Posloupnost $\{c_n\}$ je prvkem prostoru $\mathcal{M}$ právě tehdy, když řada (3.7) konverguje v prostoru $\mathcal{S}'$.*

**Věta 3.3.** *Nechť zobecněná funkce $f$ je nulový prvek prostoru $\mathcal{P}$. Pak platí $c_n = 0$ pro každé celé $n$.*

Věta 3.2 udává, že každé zobecněné funkci $f \in \mathcal{P}$ tvaru (3.7) odpovídá funkce $g \in \mathcal{M}$ taková, že je $g(n) = c_n$ a naopak, že každé posloupnosti $g \in \mathcal{M}$ odpovídá zobecněná funkce $f \in \mathcal{P}$ tvaru (3.7) s $c_n = g(n)$. To nám dovoluje vyslovit následující definici.

**Definice.** Zobrazení $\mathcal{F}$ prostoru posloupností $\mathcal{M}$ na prostor zobecněných funkcí $\mathcal{P}$ definované vzorcem

$$\mathcal{F}g = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} \tag{3.9}$$

pro $g \in \mathcal{M}$ nazveme *diskrétní Fourierovou transformací.*

Z předchozích úvah plyne, že $\mathcal{F}$ je prosté lineární spojité zobrazení prostoru $\mathcal{M}$ na prostor $\mathcal{P}$, takže existuje inverzní zobrazení $\mathcal{F}^{-1}$, které je také spojité.

Než přejdeme k dalším vlastnostem právě zavedeného zobrazení, všimněme si ještě jedné důležité vlastnosti prostoru $\mathcal{P}$. Konverguje-li řada na pravé straně rovnice (3.7) v běžném slova smyslu, představuje klasickou Fourierovu řadu $2\pi$-periodické obyčejné funkce $f$. Je zřejmé, že pro každou $2\pi$-periodickou obyčejnou funkci $f$ platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x+2k\pi)\mathrm{d}x \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \tag{3.10}$$

Na základě této rovnice lze jednoduše rozšířit pojem $2\pi$-periodičnosti na zobecněné funkce z prostoru $S'$. Stačí nazvat funkci $f \in \mathcal{S}'$ $2\pi$-*periodickou zobecněnou funkcí*, platí-li

$$\langle f, \varphi \rangle = \langle f, \varphi(\cdot + 2k\pi) \rangle \tag{3.11}$$

pro každou funkci $\varphi \in \mathcal{S}$ a pro každé celé $k$.

Velmi snadno se dokáže, že i každá zobecněná funkce z prostoru $\mathcal{P}$ je $2\pi$-periodická. Poněkud komplikovaněji se zjistí, že toto tvrzení platí i naopak, tj. že každá $2\pi$-periodická zobecněná funkce je prvkem prostoru $\mathcal{P}$. Prostor $\mathcal{P}$ je tedy jako množina totožný s prostorem všech $2\pi$-periodických zobecněných funkcí. Platí dokonce následující věta.

**Věta 3.4.** *Nechť posloupnost $2\pi$-periodických zobecněných funkcí*

$$f_j = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^{(j)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} \tag{3.12}$$

*konverguje pro $j \to \infty$ v prostoru $\mathcal{S}'$. Pak posloupnosti $\{c_n^{(j)}\}_{n=\infty}^{\infty}$ jako prvky prostoru $\mathcal{M}$ konvergují při $j \to \infty$ v prostoru $\mathcal{M}$. Obráceně, konvergují-li koeficienty $c_n^{(j)}$ v řadě na pravé straně rovnice (3.12) pro $j \to \infty$ jako prvky prostoru $\mathcal{M}$, konverguje posloupnost zobecněných funkcí daných řadami (3.12) v prostoru $\mathcal{S}'$.*

Věta 3.4 dokazuje velmi důležitou vlastnost diskrétní Fourierovy transformace, totiž že je to homeomorfismus prostoru $\mathcal{M}$ pomalu rostoucích posloupností a prostoru $\mathcal{P}$ periodických distribucí.

Uveďme ještě jedno tvrzení, které je na základě předchozích úvah zřejmé takřka na první pohled, je však důležité pro výpočet Fourierových koeficientů periodické zobecněné funkce.

**Věta 3.5.** *Každá $2\pi$-periodická zobecněná funkce je $m$-tou derivací obyčejné $2\pi$-periodické funkce, jejíž Fourierova řada konverguje absolutně a stejnoměrně na intervalu $[-\pi, \pi]$.*

Vyslovená tvrzení nám už dovolují zformulovat základní věty teorie diskrétní Fourierovy transformace.

**Věta 3.6.** *Nechť $A := \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ je konvoluční zobrazení definované posloupností $a \in \hat{M}$ a nechť $f \in \mathcal{M}$. Pak platí*

$$\mathcal{F}(Af) = (\mathcal{F}a)(\mathcal{F}f). \tag{3.13}$$

**Věta 3.7.** *Nechť $A := \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ je konvoluční zobrazení definované posloupností $a \in$ $\in \hat{M}$ a nechť $f$ a $g$ jsou takové posloupnosti z prostoru $\mathcal{M}$, že $\mathcal{F}g = (\mathcal{F}a)(\mathcal{F}f)$. Pak platí $g = Af$.*

## 4. Aplikace

Nechť $A$ je konvoluční zobrazení definované posloupností $a \in \hat{M}$ a nechť $f$ je daná diskrétní funkce z prostoru $\mathcal{M}$. Pak problém nalezení takové diskrétní funkce $g \in \mathcal{M}$, pro niž platí

$$Ag = f, \tag{4.1}$$

nazveme $A-$*problémem*.

Jako triviální příklad $A-$problému může sloužit nekonečná soustava lineárních rovnic s třídiagonální maticí

$$-g_{n-1} + (2+\varepsilon)g_n - eg_{n+1} = f_n, \quad n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots. \tag{4.2}$$

Diskrétní funkce $a$ definující konvoluční zobrazení v (4.1) se zde volí tak, že je $a(-1) =$ $= a(1) = -1, a(0) = 2 + \varepsilon$ a všecha ostatní $a(k)$ jsou rovna nule. Taková funkce patří samozřejmě do $\hat{\mathcal{M}}$.

Následující věta řeší $A-$problém v důležitém speciálním případě.

**Věta 4.1.** *Nechť $A$ je konvoluční zobrazení definované diskrétní funkcí $a \in \hat{\mathcal{M}}$ a nechť navíc platí*

$$|(\mathcal{F}a)(x)| > 0 \text{ pro každé } x \in \mathbb{R}. \tag{4.3}$$

*Pak pro každou pravou stranu $f \in \mathcal{M}$ existuje v $\mathcal{M}$ právě jedno řešení rovnice (4.1). Toto řešení je dáno vzorcem $g = A^{-1}f$ a $A^{-1}$ je konvoluční zobrazení definované diskrétní funkcí $\mathcal{F}^{-1}(1/\mathcal{F}a)$.*

Jsou-li tedy splněny předpoklady této věty, jsou řešením soustavy (4.1) Fourierovy koeficienty 2π-periodické zobecněné funkce $\mathcal{F}f/\mathcal{F}a$.

Vrátíme-li se k našemu příkladu (4.2), máme $(\mathcal{F}a)(x) = 2(1 - \cos x) + \varepsilon$. Pro $\varepsilon > 0$ je podmínka (4.3) splněna a nekonečná soustava (4.2) má tedy právě jedno řešení při libovolné pravé straně $f \in \mathcal{M}$.

Předpoklad (4.3) v právě zformulované větě je dosti podstatný. Věta 4.1 říká, jak už bylo ostatně řečeno, že řešení $A-$problému získáme tak, že vypočteme z rovnice (3.13) jeho Fourierův obraz dělením funkcí $\mathcal{F}a$. Aby tato operace byla definovaná, musí být funkce $1/\mathcal{F}a$ prvkem prostoru $\mathcal{S}$, neboť jen pro takové funkce jsme definovali násobení zobecněných funkcí hladkými funkcemi (viz rovnici (3.4) a předchozí text). Je-li nerovnost (4.3) porušena, nastává řada problémů, jejichž charakter naznačíme opět na příkladě 4.2, v němž položíme $\varepsilon = 0$. Pak je $(\mathcal{F}a)(x) = 2(1-\cos x)$ a požadavek (4.3) je porušen v bodech $x_k = 2\pi k,\ k = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ Nechť dále $\delta$ je 2π-periodická zobecněná funkce definovaná vzorcem

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(x_k), \quad \varphi \in \mathcal{S} \tag{4.4}$$

(tzv. *periodická Diracova $\delta$-funkce*). Všimněme si, že řada na pravé straně rovnice (4.4) je konvergentní, jak je ihned vidět z nerovností (3.1). Nyní snadno vypočteme, že součin hladké funkce $\mathcal{F}a$ a $\delta$-funkce (4.4) je nulový. Posloupnost $g = \mathcal{F}^{-1}\delta \in \mathcal{M}$ je tedy řešením homogenní rovnice $Ag = 0$ a řešení nehomogenní rovnice (4.1), pokud vůbec existuje, není určeno jednoznačně.

Problémy, které jsme naznačili v několika předchozích řádcích, souvisejí se značně komplikovanou problematikou dělení distribucí nulou. Nebudeme je zde dále rozvádět a na závěr pouze konstatujme, že i za omezujícího předpokladu (4.3) může teorie diskrétní Fourierovy transformace ulehčit řešení různých problémů souvisejících s diferenčními rovnicemi. V [2] je jí např. užito k řešení konkrétního fyzikálního problému.

Popsaný postup lze zobecnit v různých směrech. Triviální je zobecnění na diskrétní vektorové funkce. Jiným typem je vyšetřování Fourierovy transformace diskrétních funkcí více proměnných (viz [7]) nebo užití diskrétní Fourierovy transformace k řešení problémů typu $A$-problému, kde však pravá strana rovnice (4.1) je rovna nule pro záporné argumenty a řešení nás zajímá jen pro nezáporné argumenty (viz [3]).

L i t e r a t u r a

[1] I. Babuška: *The Fourier Transform in the Theory of Difference Equations and its Applications,* Arch. Mech. Stos. *11* (1959), 349–381.
[2] I. Babuška, F. Kroupa, E. Vitásek: *Some Applications of the Discrete Fourier Transform to Problems of Cristal Lattice Deformation I, II,* Czech J. Phys. *B10* (1960), 419–427, 488–504.
[3] I. Babuška, E. Vitásek: *Wwiener-Hopf Technique in the Theory of Difference Equations I, II, III,* Arch. Mech. Stos. *13* (1961), 4–21, 457–469, *14* (1962), 83–91.
[4] I. Halperin: *Introduction to the Theory of Distributions,* Toronto University Press, Toronto 1952.
[5] L. Schwartz: *Théorie des Distributions,* Hermann, Vol. 1, Paris 1950, Vol. 2, Paris 1951.
[6] L. Schwartz: *Méthodes Mathématiques pour les Sciences Physiques,* Hermann, Paris 1961.
[7] E. Vitásek: *The n-Dimensional Fourier Transform in the Theory of the Difference Equations,* Arch. Mech. Stos. *12* (1960), 186–202.
[8] K. Yosida: *Functional Analysis,* Springer, Berlin 1965.

# 125 let od narození Miloše Kösslera (1884–1961)

*Pavla Pavlíková, Praha*

V červnu letošního roku uplyne 125 let od narození významného českého matematika, specialisty na teorii analytických funkcí a teorii čísel, Miloše Kösslera. Cílem tohoto článku je připomenout při této příležitosti jeho životní osudy a vědecké výsledky.

## 1. Život

Miloš Kössler se narodil 19. června 1884 v Praze. Vyrůstal ve velmi chudých poměrech. Jeho životní cestu výrazně ovlivnilo studium na Akademickém gymnáziu v Praze, kde mezi jeho vyučující patřily osobnosti zvučných jmen. V primě jej vyučoval zeměpisu a dějepisu Zikmund Winter (1846–1912), na výuce matematiky a fyziky se podíleli Karel Pánek (1849–1904), Antonín Jeřábek (1852–1915) a Jan Vojtěch (1879–1953).

RNDr. Pavla Pavlíková, Ph.D., Ústav matematiky VŠCHT Praha, Technická 5, 166 28 Praha 6, Katedra didaktiky matematiky, Matematicko-fyzikální fakulta UK, Sokolovská 83, 186 75 Praha 8, e-mail: `Pavla.Pavlikova@vscht.cz`