

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Jeanine Daems

Escher ako matematik. Rozhovor s N. G. de Bruijnom a Hendrikom Lenstrom

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 54 (2009), No. 1, 33--40

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/141884>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2009

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

Escher ako matematik

Rozhovor s N. G. de Bruijnom a Hendrikom Lenstrom

Jeanine Daems, Leiden

V roku 1954 sa v Amsterdame konal Medzinárodný kongres matematikov. Pri tejto príležitosti bola v múzeu Stedelijk zorganizovaná špeciálna Escherova výstava. Profesor N. G. de Bruijn¹) (1918) bol jedným z tých, ktorí sa na výstave podieľali. Približne o pol storočie neskôr sa profesor Hendrik Lenstra²) (1949) zastavil pri Escherovom obraze *Obrazáreň (Print Gallery)*³). Prečo je tam uprostred diera? Mohla by byť vyplnená, alebo existuje dôvod, prečo to tak nebolo urobené? H. Lenstra našiel odpoveď na túto otázku a odvtedy so svojimi kolegami cestuje po svete s prednáškou na túto tému. Jeanine Daems⁴) navštívila de Bruijna a Lenstru a položila im otázky týkajúce sa týchto životných epizód a ich názorov na Escherovu prácu.

N. G. de Bruijn a Hendrik Lenstra sa obaja zaoberali dielom M. C. Eschera. Aký je ich názor na jeho prácu?

¹) de Bruijn, Nicolaas Govert (1918), holandský matematik, autor viac ako 196 článkov. Zaoberal sa mnohými oblasťami v matematike (geometria, teória čísel, klasická i funkcionálna analýza, aplikovaná matematika, kombinatorika, logika či jazyk matematiky). Väčšinu svojho života pôsobil na Technickej univerzite v Eindhovene. Podľa neho je aj pomenovaná postupnosť De Bruijn, ktorej je objaviteľom, De Bruijn-Newtonova konštanta, De Bruijn-Erdősova teoréma či BEST teoréma (pozn. prekl.).

²) Lenstra, Hendrik Wilem (1949), holandský matematik, od roku 1978 pôsobil v Amsterdame na univerzite, od roku 1987 pracoval na univerzite v Berkeley, od roku 2003 na plný úväzok v Leidene. Venuje sa algoritmickej teórii čísel a je známy ako objaviteľ metódy faktorizácie eliptických kriviek a spoluobjaviteľ LLL algoritmu (pozn. prekl.).

³) Escherova litografia *Print Gallery* (v pôvodnom názve *Prentententoonstelling*, rozmery 32×32 cm) bola vytvorená v roku 1956. Predstavuje galériu, do ktorej sa vojde dverami na obrázku vpravo dole. Najprv je možné stretnúť návštevníka s rukami za chrbtom a potom v ľavom dolnom rohu mladíka, ktorý je štyrikrát väčší. Pozerá na obraz na stene zobrazujúci stredomorský prístav. Ako jeho oči pozorujú pobrežné budovy zobrazené na grafike zľava doprava a potom dole, objavuje medzi nimi tú istú galériu, v ktorej stojí. Všetky tieto detaily vidí ako súčasť dvojrozmerného obrazu, ktorý si prehliada. Kruhovú bielu stopu uprostred celého obrazu obsahuje Escherov monogram a podpis (pozn. prekl.).

⁴) Jeanine Daems, doktorandka na univerzite v Leidene. Jej doktorandská práca sa zaoberá matematickou kryštalografiou v 19. storočí z historického hľadiska (pozn. prekl.).

Z anglického originálu J. Daems: *Escher for the mathematician* preložila Lucia Ilucová.

© Nieuw Archief voor Wiskunde 5/9, nr. 2, červen 2008, str. 134–137.

Rozhovor s N. G. de Bruijnom

Ako ste sa zoznámili s Escherovou prácou?

Escherovu prácu som spoznal nejaký čas pred rokom 1954. V tej dobe ešte nebol taký známy. Avšak tu a tam sa objavil nejaký článok o jeho práci. Okrem toho, pravý Escherov grafický list som náhodou dostal v roku 1946.

Vo februári 1945 (bol to posledný rok 2. svetovej vojny) bola v Eindhovene založená dočasná akadémia. Južná časť Holandska bola oslobodená, zatiaľ čo zvyšok krajiny bol stále pod nemeckou okupáciou. Na juhu sa našlo niekoľko mladých ľudí, ktorí chceli študovať na univerzite, ale nebolo kde. V Eindhovene, vtedy plnom vedcov, bolo jednoduché zostaviť učiteľský zbor. Od roku 1944 do roku 1946 som pracoval v Eindhovene u firmy Philips, čo ma zachránilo pred nútenými prácami v Nemecku, takže som mohol usporiadať niekoľko kurzov na tejto akadémii.

Pri rozpustení akadémie v decembri 1945 požiadali Eschera, aby vytvoril pamätný obraz, a ten bol darovaný všetkým prednášajúcim (nie však študentom). Myslím, že bolo vytvorených asi 80 kópií.

Je na ňom rieka, ktorá sa tiež objavuje na Escherovom známom obraze⁵), s bielou na jednej strane a čiernou na druhej, so zrkadlením; niečo také ste mohli vidieť na tom obraze. Ale je tam najmä sova sediaca na ruinách a zlomených reťaziach, kým na druhej strane rieky ešte stále horia ohne.

Keď sa v roku 1954 konal v Amsterdame Medzinárodný kongres matematikov, Escherova výstava bola jeho súčasťou. Nápad vznikol v diskusii s mojím priateľom Seidelom, ktorý organizoval kultúrne činnosti v dobe kongresu. Ja som bol sekretárom programového výboru, a takto som bol v blízkom kontakte s organizátormi kongresu. Tí tento nápad hneď ocenili. Skontaktoval som sa s Escherom; navštívil som ho v jeho dome (v Baarne) a opýtal sa ho, čo si o tom myslí. Veľmi sa mu to páčilo. Zašiel som teda za výkonným riaditeľom Rijksmúzea⁶).

Rijksmúzeum?

Áno, išiel som do Rijksmúzea, pretože niekoľko kongresových akcií tam bolo naplánovaných. Bol to typ centra, do akého by išiel každý, pretože bolo svetoznáme. Ale výkonný riaditeľ povedal: „Nie, toto nebudeme robiť; to je moderné umenie! S tým by ste mali navštíviť múzeum Stedelijk⁷).“ V tom čase už som mal názor, že Escherova práca vôbec nie je umenie, ani nie je pekná, ale veľmi dômyselná a zaujímavá. Escher nebol ani matematik, ani umelec. Escher bol Escher. Akokoľvek, múzeu Stedelijk sa plán celkom páčil.

⁵) Týmto obrazom sa pravdepodobne chápe *Night and Day* z roku 1938 (pozn. prekl.).

⁶) *Rijksmúzeum* — známe národné múzeum umenia a histórie v Amsterdame na námestí Museumplein. V jeho zbierkach môžeme nájsť napríklad Rembrandtovu *Nočnú hliadku* (pozn. prekl.).

⁷) *Stedelijk múzeum* (v preklade Mestské múzeum) — múzeum moderného umenia v Amsterdame na námestí Museumplein (pozn. prekl.).

Výstavu však bolo potrebné zahájiť. Myslel som si, že by ju mal zahájiť Freudenthal⁸⁾, pretože som ho považoval za vedúceho matematika v Holandsku. Ale kongresový výbor — Koksma a ďalší — mi povedali: „Nie, to bol váš nápad, mali by ste to urobiť sám.“ Tak som si povedal, dobre, urobím to. To som ale prehnal, pretože som nemal žiaden nápad, ktorý by bol vhodný na zahájenie výstavy. Očakával som, že sa postavím na stupienok vo výstavnej miestnosti a poviem: „Vyhlasujem výstavu za zahájenú.“

Zvrtlo sa to akosi inak. Privítal ma riaditeľ múzea a nejakí ďalší úradníci ako kultúrni vyslanci provincie Noord-Holland. Pili sme kávu a v istom okamihu povedali: „Začnime.“ Nemal som žiaden nápad, ako by to malo byť. Najprv mal jeden z úradníkov podať krátky úvod a potom som mal mať hlavný príhovor. Ale ja som nemal pripravený príhovor! Vstúpili sme do tej miestnosti! Bola plná ľudí, muselo ich tam byť cez 150. Ale mal som šťastie; ten úradník mal veľmi dlhú reč — trvala najmenej 15 minút. Potom som nerozprával viac ako 5 minút, s použitím niekoľkých poznámok, ktoré som si medzičasom urobil. Výsledkom bolo, že mnoho ľudí si myslelo: „Prvý rečník hovoril príliš mnoho, ale druhý vykonal dobrú prácu!“

Niektoré z mojich poznámok sa dostali do tlačenej katalógov a Escher ich mohol neskôr s hrdosťou komentovať. Neboli o matematickom obsahu Escherovej práce, ale o jej hravosti, o tom istom pocite, ktorý zažívame v matematike.

Z pohľadu matematiky existovala len jedna vec, o ktorej som musel Escherovi povedať pred výstavou. Ukázal som mu obrázky Kleinovho modelu hyperbolického priestoru: disk. Vôbec tomu nerozumel, a keďže tam nebola ešte žiadna kopírka, moja pripomienka sa stratila. Po výstave na to upozornil Eschera Coxeter, a to spôsobilo, že Escher sa tejto téme začal venovať. Veľmi milé, naozaj. Predtým Escher pracoval s teseláciami len v spojení so 17 tapetovými grupami. Pre Eschera, ktorý nepoznal žiadnu teóriu grúp, 17 grúp predstavovalo len systém vytvárania tapiet. Tie systémy poznal: sám väčšinu z nich objavil. Coxeter zostal v kontakte s Escherom roky aj po výstave.

Mimochodom, súčasné historické výskumy odhalili skoršie kontakty Eschera a Georgera Pólyu, ktorý napísal článok o 17 grupách symetrií v roku 1924.⁹⁾

Mladý Roger Penrose bol ďalšou zaujímavou osobou, ktorú Escher stretol na kongrese. V tej dobe sa nezaujímal o teselácie, ale o obrazy nemožností ako napríklad schody, po ktorých tečie voda nahor. Čo sa týka teselácií, myslím si, že je škoda, že Escher nežil dosť dlho nato, aby uvidel Penroseovu známu neperiodickú teseláciu

⁸⁾ Freudenthal, Hans (1905–1990), holandský matematik. Po štúdiu matematiky v Berlíne a Paríži a získaní doktorátu získal miesto asistenta v Amsterdame. V roku 1946 sa stal profesorom na univerzite v Utrechte. Venoval sa topológii, geometrii a teórii Lieových grúp. Je považovaný za jedného z najznámejších holandských matematikov (pozn. prekl.).

⁹⁾ V roku 1936 poslal Escherovi jeho brat Berend (profesor geológie, paleontológie, mineralógie a kryštalografie na univerzite v Leidene) zoznam článkov týkajúcich sa teórie rovinných grúp symetrií. Medzi nimi bol aj spomínaný Pólyov článok *Über die Analogie der Kristallsymmetrie in der Ebene*. Zeitschrift für Kristallographie 60 (1924), 278–282 (pozn. prekl.).



Obr.: M. C. Escher (1956): *Obrazáreň*. (zdroj: escherdroste.math.leidenuniv.nl)

s nedokonalou päťnásobnou symetriou zo začiatku sedemdesiatych rokov. Na týchto základoch mohol Escher vytvoriť oveľa krajšie teselácie.

Ako ľudia reagovali na výstavu?

Prišlo mnoho ľudí. Výstava sa stala jednou z najlepších atrakcií kongresu. V Holandsku to nemalo veľký vplyv, ale výstava podnietila jeho slávu v medzinárodnom vedeckom svete.

Čo si myslíte, že je najkrajšie na Escherovej práci?

Najkrajšie... nuž, viete, pokiaľ sa jedná o krásu, ja naozaj nie som taký Escherov obdivovateľ.



Obr.: „Doplnený“ obraz. (zdroj: escherdroste.math.leidenuniv.nl)

Nie ste?

Nie, pochopte, ja rozumiem, ako to bolo vytvorené, ale Escherovo umelecké stváranie je niečo drevené, a zbytočne. Jeho ľudské postavy vyzerajú ako drevené bábiky. To je dôvod, prečo to nechcú praví umelci nazývať umením; čo urobil, nebolo niečo, čo by mohli oceniť. Ale páči sa nám to, však?

Escher pracoval najmä v bielom a čiernom. Keby používal viac farieb, mohol vytvoriť zaujímavejšie symetrické výsledky. Ale s technikou, ktorú používal, to bolo zložité. Bol samozrejme veľký majster v profesii, v ktorej sa vyžaduje veľa trpezlivosti a inšpirácie. Nuž pre matematikov Escherova práca je určite zábavná, ale pekná... Čo je pekné? Naozaj neviem.

Rozhovor s Hendrikom Lenstrom

Keď vezmete do úvahy de Bruijnovo hodnotenie, čo si vy myslíte o Escherovi ako umelcovi?

Nuž, keď sa pozerám na Escherovu prácu, je nepopierateľné, že nevedel kresliť! Napríklad nevedel kresliť ľudí. Jeho obrazy sú tak trochu ako obrazy Willinka¹⁰); ak je na Willinkovom obraze muž kráčajúci po ulici, tak nie je chodiacou osobou; je to len maketa v tvare chodiacej osoby. Escher nevedel kresliť, a on to aj sám pripustil, ako som čítal v jeho životopise. Ale to nie je kritika Eschera. Podľa môjho názoru je neodškriepiteľné, že Escher nevedel kresliť, a to je viditeľné na mnohých jeho grafikách.

Ako Vás napadlo pozrieť sa na Obrazáreň z matematického pohľadu?

Ako matematik na všetko nazerám z matematického pohľadu! S Escherovou prácou som sa zoznámil na strednej škole. Na začiatku 60-tych rokov Bruno Ernst¹¹) začal vydávať stredoškolský matematický časopis Pythagoras. Tam napísal články o Escherovej práci, veľmi milo, na náležitej úrovni, ale najfascinujúcejšie boli obrázky. *Obrazáreň* bola jedným z nich. Ako tínedžer som si kúpil knihy o Escherovi, ale ak mám byť úprimný, keď som sa stal študentom matematiky, tak mi to pripadalo dosť slabé; to nebola „pravá matematika“.

S vekom sa na veci pozeráme inak. Ako matematik vidíte určité veci a uvedomujete si, že im nerozumiete. Pamätám si, že som bol v lietadle, a čítal som o Escherovej výstave v jednom z tých časopisov aeroliniiek na kriedovom papieri. Opäť tam bola *Obrazáreň* a v tom čase som na to pozeral už úplne inak. Jasne tam bola vtiahnutá matematika, ale ja som nevedel, aká matematika. Jednalo sa o to, že som nebol schopný sformulovať problém. Je celkom samozrejmé, čo sa deje na obraze a čo chcel Escher vyjadriť. V literatúre o Escherovi sa to nazýva kruhové rozšírenie. Pokúsil som sa o nepriamy prístup: čo ak by niekto mal takýto umelecký nápad a prišiel za mnou počas úradných hodín — povedzme, že by som mal úradné hodiny — a opýtal by sa ma: „Chcem vyjadriť kruhové rozšírenie. Ako by som to mohol urobiť? Čo matematika v tomto smere ponúka?“ To je spôsob ako položiť otázku, hoci nie vo veľmi presnej forme. Je to otázka typu, s ktorou sú konfrontovaní skôr aplikovaní matematici než čistí matematici. Čistí matematici majú určité otázky, ale to sú otázky matematického charakteru. Na druhej strane je aplikovaný matematik konfrontovaný s javmi vonkajšieho sveta, a prvým krokom je ich previesť na matematický problém. To bol pre mňa najväčší problém: ako sa dostať k matematike — ako to vyjadriť matematicky. Iná vec, ktorá ma prekvapovala, keď som nad tým premýšľal, bola diera

¹⁰) Willink, Albert Carel (1900–1983), známy holandský maliar, ktorý svoj štýl nazýval imaginárny realizmus. Jeho realistické obrazy často predstavujú scény odohrávajúce sa v prednej časti budov (pozn. prekl.).

¹¹) V roku 1956 sa Escher zoznámil s učiteľom matematiky a fyziky Brunom Ernstom, ktorý bol nadšený matematickou povahou jeho prác. Istý čas cestoval za Escherom do Baarnu každú nedeľu. Na základe dlhých rozhovorov, detailných analýz jednotlivých prác a vzájomnej korešpondencie vznikla kniha *The Magic Mirror of M. C. Escher* (1976). Ernst patrilo k úzkemu kruhu ľudí, s ktorými sa na sklonku života Escher sťahoval (pozn. prekl.).

uprostred *Obrazárne*. Niektorí ľudia hovoria, že je škaredá, ale to nie je dôležité. Moja otázka je: je nevyhnutná? Matematika v tom vystupuje, a keď je príslušná matematika pochopená, zrejme by bolo možné odpovedať na otázku, či by mala byť diera vyplnená alebo či existuje hranica, za ktorou by to vyplnenie bolo fraškou. Ale čo znamená fraška? Ešte som to nesformuloval.

Skice, ktoré Escher nakreslil počas práce na *Obrazárni*, boli publikované. Mriežky na týchto skicách jasne ukazujú, čo sa deje uprostred. Viem si predstaviť, že to Escher videl tiež. Ale stále premýšľam o matematike v tom; napríklad, aké funkcie sú tam využité. Escher urobil štyri skice, a každá z nich sa objavila na ďalšej štyrikrát zmenšená. Evidentne je tam *Droste effect*.¹²⁾ Nakoniec som prišiel na dobrú otázku. V jeho skicách vidím, že obrázky sa opakujú zmenšené s faktorom $4^4 = 256$. Bolo mi jasné, že toto opakovanie muselo byť takisto v *Obrazárni*. Mohlo byť pozorované od podkladovej mriežky v obrázku, ale meranie vzdialeností na mriežke ukázalo, že opakovanie na mriežke je veľmi odlišné od toho v skicách. Bola to rotácia v obrázku, ale tento faktor 256 tam nebol! Bol tam faktor približne 20 a rotácia o 160 stupňov. To bolo divné. Takže mojou otázkou bolo: čo predstavujú tieto čísla? A to bola presná otázka. Odpoveď som mal asi o 5 minút neskôr, pretože bolo jasné z knihy Bruna Ernsta, že kľúčovým pojmom je konformnosť. Zobrazenia museli byť konformné, čo znamená, že uhly sú zachované. Spomeňte si, že som položil otázku: čo by mala „fraška“ znamenať? Znamená to, že deformácia je taká, že detaily už nie sú viac rozpoznateľné. Bruno Ernst sa vo svojej knihe zmienil, že Escher bol prinútený trochu ohnúť rovné čiary, pretože takto štvorciky v mriežke vyzerali „štvorcovejšie“.

Tak som si uvedomil, že skice, ktoré som videl, naozaj prezentujú celkom dobre známy alternatívny spôsob opisu eliptických kriviek v rovine komplexných čísel. Sama *Obrazáreň* bola nakreslená s rôznou periódou, a bola to tiež eliptická krivka. A ak zobrazenia medzi nimi sú konformné, potom eliptické krivky musia byť izomorfné. O izomorfizme medzi eliptickými krivkami som vedel všetko, takže som mohol hneď odpovedať na svoje otázky. To bolo v januári 2000. Týmto sa výskumná otázka zmenila na milú tému k diskusii počas obeda.

Prvú prednášku o tom som mal v marci 2000. Robbert Dijkgraaf bol prítomný a dal nový impulz k práci otázkou: „Prečo to nenaprogramujete?“ Nuž, neurobil som to, pretože nie som počítačový programátor.

Hlavnými ľuďmi zapojenými do tohto projektu som bol ja (neurobil som toho veľa, i keď som na to minul nejaké peniaze) a Bart de Smit. A potrebovali sme niekoho na programovanie — bol to Joost Batenburg, ktorý bol v tom čase študentom v Leidene.

Projekt naozaj nabral rýchlosť, keď Sara Robinson, spisovateľka zaoberajúca sa vedou, navrhla o ňom napísať článok do novin *New York Times*. Zapáčilo sa nám to, a predvídavo sme tušili, že článok bude generovať množstvo otázok a emailov.

¹²⁾ *Droste effect* — holandský názov pre špeciálny typ rekurzívneho obrázku. V obraze s efektom Droste vidíme jeho menšiu verziu v určitom mieste a tá je zobrazená znovu ako zmenšenina atď. Teoreticky je možné opakovať do nekonečna, ale v skutočnosti sa pokračuje len tak dlho, ako to rozlíšenie umožňuje. Názov pochádza z pomenovania kakaového prášku Droste, ktorý mal na krabici sestru s táckou so šálkou horúcej čokolády a krabicou rovnakej značky (pozn. prekl.).

Potrebovali sme miesto, na ktoré by sme ľudí nasmerovali. Preto sme vytvorili internetovú stránku (escherdroste.math.leidenuniv.nl), ktorá odštartovala v deň, kedy sa článok objavil. Bez Sary by sme na tom nemohli tak usilovne pracovať.

Taktiež sme mali dvoch umelcov, ktorí s nami pracovali. Prvým bol Hans Richter. Museli sme vyplniť diery v strede. Kvôli opakovaniu, významnú časť diery je možné vyplniť Escherovým obrazom samým. Ale nie celú; malá časť zostala prázdna. V narovnanom obrázku to odpovedalo prázdnej špirále. Bolo jasné, že je to možné vyplniť; preto by bolo potrebné ukončiť Escherov narovnaný obraz: pokračovať v niektorých čiarami a tak ďalej. Richter to urobil. Bol tým veľmi nadšený; pochopil matematiku a takisto našiel rozpor v Escherovom obraze: určité čiary, ktoré by mali byť rovnobežné, také nie sú. V skutočnosti, Richter musel niečo dokresliť sám: v našej verzii *Obrazárne* bolo trochu viac miesta ako v pôvodnej „obrazárni“ a preto tam nakreslil svoj obľúbený obraz od Eschera: Möbiov pásik s mravcami. Bolo to smiešne, pretože Möbiov pásik bol vytvorený v roku 1963, kým *Obrazáreň* je z roku 1956. Fantastické! Anachronizmus. Nemožné. To sa k Escherovi hodí! Ďalším umelcom bola Jacqueline Hofstra: „vyfarbila“ obraz odtieňmi sivej. Bola veľmi prekvapená mojim nadšením pre anachronizmus. Neočakávala, že matematikom sa páčia nemožné veci. Ľudia majú zvláštne predstavy o matematikoch.

Projekt skutočne vzbudil značnú verejnú pozornosť a my sme mali mnoho prednášok po celom svete.

Čo si myslíte, že je zaujímavé na Escherovej práci?

Čo sa mi zdá ako zaujímavé, sú veci, ktorým nerozumiem. Ale musím dodať, že „rozumieť“ nemusí znamenať to isté pre rôznych ľudí. Keď sa pýtam sám seba, či niečomu rozumiem, tak to často neviem jednoducho zistiť. Preto často premýšľam o tomto: keď príde umelec do mojej kancelárie a položí takúto otázku, viem, čo mu mám povedať? A teraz cítim, že viem. Musíte skontrolovať, akú matematiku tento umelec pozná a na akej úrovni mu veci môžem vysvetliť. Potom viem, čo odpovedať. Keď niekto naozaj rozumie matematickej teórii, môže ju vysvetliť na akejkoľvek úrovni.

Ale sú iné Escherove obrazy, ktorým takýmto spôsobom nerozumiem. Niekedy to je práve preto, že nepoznám danú oblasť, ako to bolo v prípade hyperbolickej geometrie. Viem si predstaviť, že niekto napíše knihu na tému: „Escher pre matematikov“. Mohla by to byť pôvabná kniha. Nemala by byť zameraná na stredoškolských študentov, ale na matematikov, a mala by vysvetliť veci takým spôsobom, aby sa vám to zapáčilo. Myslím si, že dôkladné skúmanie Escherových obrazov by pokrylo mnoho oblastí matematiky.

Myšlienky skrývajúce sa v *Obrazárni* by mohli byť aplikované ľubovoľným umelcom. Sám to neurobím. Príležitostne to môže byť zábava: pretransformovali sme Rembrandtovu *Nočnú hliadku* a zavesili ju na stenu našej jedálne. Dostať umelecky uspokojivý výsledok nie je ľahké, ale je to druh automatizmu. Ale v matematike nerobíme automatizmus! Keď niečo pochopíme, už to nie je zaujímavé.