Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

František Kuřina

Může být školská matematika matematikou dobrou?

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 53 (2008), No. 4, 322–335

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/141871

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2008

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

Může být školská matematika matematikou dobrou?

František Kuřina, Hradec Králové

1. Úvod

Tento příspěvek vznikl z podnětu dvou publikací. První je sborník *Mathematics: Frontiers and Perspectives* [1] vydaný k *Roku matematiky 2000*, druhou je článek *Terence Tao: Co je dobrá matematika?* [12]. I já zde riskuji *dojem namyšlenosti a přílišného sebevědomí* ([12], s. 24), neboť musím přiznat, že jsem zdaleka ne všemu v citovaných zdrojích porozuměl. Je to pochopitelné, neboť se k problémům současné vědy vyjadřují takové autority jako např. *M. Atiyah, V. I. Arnold, A. Wiles* nebo *R. Penrose.* Přesto však jsem zde jako učitel matematiky našel řadu podnětů, které by mohly zajímat i naše čtenáře.

Problematiku uveďme následující úvahou.

Ve školních učebnicích matematiky můžeme najít úlohy, které jsou jakoby z jiného světa. Nesouvisejí s realitou žákova života a jejich kuriozita hraničí někdy s absurditou. Je pozoruhodné, že ačkoliv matematika vznikla patrně z potřeb praxe lidské společnosti, vyskytují se „nerealistické“ problémy i v matematice „vědecké“ a jejich tematika může být i dosti zvláštní.

Např. u *Tartaglii* (1500–1557) můžeme nalézt úlohu: *Loď, na níž se nachází 15 Turků a 15 křesťanů se dostala do bouře. Kormidelník nařídí hodit do moře polovinu cestujících. Při výběru, kteří to budou, se postupuje následovně: všichni cestující vytvoří kruh. Začne se počítat od určitého místa a každý devátý bude hozen do moře. Otázka zněla: „Jak rozestavit cestující, aby byli k naházení do moře označeni pouze Turci“* (citováno podle [8], s. 244).

Podle *H. S. M. Coxetera* je na univerzitě v Göttingen uložen výsledek desetileté práce *O. Hermese* z konce 19. století, v níž se mu podařilo sestrojit pravítkem a kružítkem pravidelný 65 537-úhelník ([4], s. 49). Tato konstrukce jistě nemá praktický smysl, avšak v „zázraku“ její existence můžeme spatřovat matematickou krásu.

A. Wiles, autor důkazu Velké Fermatovy věty, uvádí ve stati [15] jako příklad problému, který řeší současná teorie čísel, důkaz existence pravoúhlého trojúhelníku, jehož odvěsny mají racionální délky

$$\frac{6803298487826435051217540}{411340519227716149383203}, \quad \frac{411340519227716149383203}{21666555693714761309610},$$

Prof. RNDr. František Kuřina, CSc., Univerzita Hradec Králové, Pedagogická fakulta, katedra matematiky, Rokitanského 62, 500 03 Hradec Králové,
e-mail: `frantisek.kurina@uhk.cz`

přepona má délku

$$\frac{224403517704336969924557513090674863160948472041}{8912332268928859588025535178967163570016480830}$$

a jeho obsah je 157 ([1], s. 341).

Neodvažuji se diskutovat o tom, zda uvedené příklady představují dobrou matematiku ve smyslu článku [12], snad si však můžeme uvědomit, že bychom měli být tolerantní k úlohám školské matematiky, které nejsou zcela realistické, ale ilustrují vhodně studovanou problematiku.

Navzdory tomu, a navzdory zdání, že „akademická“ matematika je volným výtvorem svobodných vědců, je matematika spjata s realitou našeho světa velmi těsně. Sotva to lze vyjádřit výstižněji, než jak to učinil *V. I. Arnold* v článku uvedeném otázkou: *Je matematika jedinou vědou nebo souborem umění (Is Mathematics a Single Science or a Set of Arts)* ([1], s. 403)? Ocitujme několik jeho myšlenek, přestože některé z nich jsou diskutabilní. *Matematiku dělíme na tři části: kryptografii (placenou CIA, KGB apod.), hydrodynamiku (podporovanou výrobci atomových ponorek) a nebeskou mechaniku (financovanou vojsky a dalšími institucemi zabývajícími se raketovou technikou, takovými jako NASA).*

Kryptografie vytvořila teorii čísel, algebraickou geometrii nad konečnými okruhy, algebru, kombinatoriku a počítače. Tvůrce moderní algebry François Viète (1540 až 1603) byl kryptografem francouzského krále Henryho IV.

Díky hydrodynamice vznikla komplexní analýza, parciální diferenciální rovnice, Lieovy grupy a teorie algeber, teorie kohomologií a „scientific computing“.

Nebeská mechanika je zdrojem dynamických systémů, lineární algebry, topologie, variačního kalkulu a symplektické geometrie.

2. Dobrá školská matematika

Ačkoliv druhá část *Taova* článku [12] je velmi speciální, učinila na mne první část hluboký dojem a vyvolala celou řadu otázek. Uveďme některé. Má smysl pojem „dobrá matematika“, aniž se zajímáme o adresáta, o jejího konzumenta? Bude dobrá stejná matematika pro technika, pro badatele ve společenských vědách i pro profesionálního matematika? Chápu autora, který má vizi matematiky jako celku, a uvedené charakteristiky mají z jeho hlediska smysl. Zdá se mi však, že technik jistě ocení např. *dobré matematické řešení problémů* (i), *dobrou matematickou techniku* (ii), *dobré matematické aplikace* (vi), ale už patrně ho nechá chladným např. *dobrá metamatematika* (xii) nebo *matematika definitivní* (xxi).

Hlavní poučení, které jsem si já jako učitel matematiky z článku odnesl, jsou tato:

- Dobré matematické vzdělávání by mělo být orientováno na dobrou matematiku vymezenou většinou Taových bodů, zejména pak na matematické řešení problémů, matematickou techniku a teorii, na vhled, výsledky, aplikace, tvořivost a krásu matematiky. Jsem přesvědčen, že dobří učitelé práci ve škole takto orientují.

- *Terence Tao* je snad prvním autorem, který považuje *dobrý matematický výklad* (vii), *dobrou didaktiku matematiky* (viii) a *dobré matematické vztahy s veřejností* (xi) nejen za složky matematiky, ale za složky dobré matematiky. Za toto ocenění učitelské práce mu vyslovuji vřelý dík.

Všimněme si nyní matematického vzdělávání poněkud podrobněji. V pozadí našich úvah je otázka, zda např. na našich středních školách učíme dobrou matematiku v Taově smyslu.

Připomeňme nejdříve dvě myšlenky z publikace [1]. Matematiku dvacátého století v ní hodnotí dva autoři.

M. Atiyah např. píše: *V první polovině dvacátého století dominují v matematice formální přístupy reprezentované Davidem Hilbertem* (1862–1943) *a Bourbakim jako jeho nejslavnějším žákem. Soustředění na axiomatiku a do hloubky rozvíjené specifické oblasti byly na čas pozoruhodně úspěšné. Poté následovalo období hybridizace, v němž byly jednotlivé oblasti spojovány (např. algebraická topologie nebo topologické grupy). Konečně v poslední části 20. století jsme viděli návrat k méně spoutaným pohledům na matematiku, spíše v duchu Henri Poincarého* (1854–1912), *s důrazem na geometrické myšlení, dokonce i v takových oblastech jako algebra nebo teorie čísel. Připomeňme, že topologie nefiguruje mezi Hilbertovými problémy, ale Poincaré ji uvádí v r. 1908 jako důležitou složku matematiky budoucnosti* ([1], s. vii).

Naproti tomu *Yu. I. Manin* zdůrazňuje: *Matematiku můžeme zhruba popsat jako řešení problémů nebo rozvíjení široce založených programů. Tyto dva aspekty se navzájem doplňují. Matematika dvacátého století začíná souborem 23 Hilbertových problémů, jejichž řešení znamenají historické mezníky, hlavní její úspěch však patrně spočívá ve zrodu topologie, matematické logiky a počítačů* ([1], s. 156).

Podle našich současných učebnic matematiky pro gymnázia se mi zdá, že naše středoškolská matematika je ovlivněna duchem matematiky první poloviny dvacátého století, jak ji uvádí *M. Atiyah*, tedy tíhnutím k formalismu a k axiomatice. Odpovídá tomu poněkud formální styl výkladu a relativně hluboké studium oddělených matematických oblastí.

Snad je *Maninova* metafora *Chalk smells the same in Moscow, Cambridge, Mass., Tokyo, Bonn, Paris VI and Paris VII* ([1], s. 158) výstižná pro univerzitní vzdělávání, není však podle mého názoru vhodná pro vzdělávání středoškolské, neboť např. na gymnáziích existují silné rozdíly jak v přesvědčení učitelů (*René Thom: jaká je filozofie matematiky, takové je i její vyučování*), tak i ve skladbě studentů.

Bez zájmu studentů, v ovzduší apatie, vzdoru a bez vůle učit se není možné žádné vzdělávání, tím méně pak vzdělávání matematické, které vyžaduje hlubší soustředění než pouhé naslouchání, zapisování a reprodukci. Drezuru vzorců a početních postupů nelze považovat za matematické vzdělávání. Takovéto „učení“ nevyžaduje porozumění, ale pouhou mechanickou paměť. Snad bylo kdysi někde i potřebné (např. pro obchod nebo řemeslo), dnes však v období počítačů a internetu je téměř zbytečné. Tím ovšem netvrdím, že kultivaci paměti by neměla škola věnovat pozornost. Paměť je důležitá složka procesu porozumění souvislostem a řešení problémů není bez paměti možné.

V období, kdy jsou studenti nevyzrálí a nerozhodnutí, mnozí dokonce neschopní sami se rozhodnout, je problémem, ale také výhodou, jednotné matematické vzdělání pro všechny. Je velké umění kantorské učit matematiku tak, aby z ní měl užitek budoucí matematik, technik, filozof i dělník. Každému studentu bychom měli nejen nabídnout příležitost k poznání matematiky, měli bychom se pokusit ho pro matematiku i získat. Je však zcela nereálné, a také nerozumné z hlediska přípravy studentů pro jejich budoucí dráhu, přistupovat nediferencovaně k objemu a kvalitě osvojených matematických poznatků. Nelze dát žádné obecně platné administrativní předpisy jak hodnotit takto diferencovaně koncipované výsledky vzdělávání, jsem však přesvědčen, že je možné nalézt řešení v osobním, přátelském, ale profesionálním kontaktu učitele a studenta.

Ve třetí části tohoto příspěvku se pokusím nastínit své představy o koncepci dobré matematiky především z hlediska bodů vii, viii a xi Taova článku ([12], s. 22, 23). Problematika dobrého matematického výkladu, kterou Tao připomíná v bodě vii, je podle mého názoru závislá na studentech. Vzhledem k tomu, že každá třída představuje vlastně vzorek veřejnosti a matematické vzdělávání je především předávání matematiky nematematikům, přikláním se k názorům významného fyzika *R. Feynmanna,* který zdůrazňuje: *Ve třídě jsou studenti všeho druhu a . . . nejlepší metoda jak je učit, je použít každý možný způsob výkladu, který člověka napadne. To je jediná cesta, abychom během výkladu zaujali různé typy studentů* ([7], s. 42). Pro efektivní matematické vzdělávání je podstatné učit vidět souvislosti a rozumět dobře probíranému učivu.

3. Příklady

3. 1. Soubory a vztahy (množiny a relace)

V roce 1998 vydal náš publicista *Václav Jamek* pozoruhodnou knihu *O patřičnosti v jazyce,* v níž mimo jiné uvádí: *Jazyk je tkání, různě jemnou a pevnou, v níž jedině se může rozvíjet souvislé myšlení, a tedy i souvislý vztah k světu . . . Jedna věc je rozeznat ve světě jednotlivé prvky, rozložit si jej na části a částečky, a druhá, stejně důležitá věc je zase ty prvky mezi sebou pospojovat, vyjádřit části opět jako součásti, vzájemně vázané; v přiměřeném postižení této vázanosti znakem tkví základní drama lidského poznání* ([9], s. 152).

Charakteristickým znakem poznávacího procesu je tedy uskupování předmětů a jevů našeho světa do souborů podle určitých typických vlastností, tedy utváření pojmů. Pro poznání na jakékoliv úrovni, a v důsledku toho i pro vyjadřování, je nezbytné rozlišovat od sebe prvky okolního světa a opět je spojovat do určitých celků podle jejich vlastností. V matematice se takováto shrnutí prvků do celků nazývají *množinami.* Týž objekt můžeme ovšem interpretovat jako množinu různě. Tak např. zvolené město lze pokládat za množinu jeho domů, za množinu jeho obyvatel, za množinu jeho obchodů, za množinu lékařů, za množinu škol, . . . Množinový pohled je tedy vždy určitým způsobem zaměřen. U živočišných či rostlinných druhů jsou prvky příslušných souborů obvykle zřejmé, jinde může být jejich určení výsledkem vědeckého bádání (krevní skupiny).

Je s podivem, že v matematice pojem množina vykrystalizoval až v pracích českého matematika *Bernarda Bolzana* (1781–1848) a německého matematika *George Cantora* (1844–1918). Školská matematika vystačí, jak známo, s cantorovskou definicí z r. 1895: *Množinou rozumíme každé shrnutí dobře rozlišitelných objektů našeho nazírání nebo myšlení (které budeme nazývat prvky) do jednoho celku.* Důležité je, aby si studenti uvědomili, že o množině můžeme mluvit jen tehdy, je-li jasné, co jsou její prvky. Vzdělaný novinář, lékař, filozof či spisovatel by se měl vystříhat formulací tohoto typu:

Chybí mi množina vzdělání, kterou disponuje asociace klinických lékařů.

Existuje mužský mozek v ženském těle a ženský v mužském. Jsou to množiny, které se prolínají.

Které dvě množiny budeme pokládat za sobě rovné? Motivem pro příslušnou definici může být příklad množiny A všech prvočísel menších než 5 a množiny B všech kořenů rovnice $x^2 - 5x + 6 = 0$. Protože $A = \{2, 3\}$ a $B = \{2, 3\}$, je přirozené považovat tyto dvě množiny za sobě rovné, přes rozdílnost jejich konstrukce. Úhel pohledu, ačkoliv bývá prioritní v běžné komunikaci, je z „objektivního“ hlediska nepodstatný. Připomeňme tuto skutečnost známou anekdotou.

V závodech, kterých se zúčastňují pouze dva závodníci P, Q, se umístí závodník P před závodníkem Q. Závodník P o výsledku referuje: *Byl jsem první, Q byl poslední.* Účastník Q hodnotí výsledek slovy: *Byl jsem druhý, P byl předposlední.*

Matematika studuje nejen množiny, ale i *vztahy* mezi jejich prvky neboli *relace.* Např. na množině M pěti osob si můžeme všimnout vztahů popsaných výrokovými formami:

R_1: *osoba X je starší než osoba Y,*
R_2: *osoba X bydlí ve stejném městě jako osoba Y,*
R_3: *osoba X je vyšší než osoba Y,*
R_4: *osoba X má stejné povolání jako osoba Y.*

Každou z relací R_i můžeme charakterizovat pomocí množiny všech dvojic $[X, Y]$, pro něž se stává výroková forma R_i pravdivým výrokem.

Kolik relací na množině M bude existovat? Zdá se, že jejich počet můžeme libovolně zvětšovat, neboť po vhodném upřesnění bychom mohli např. relaci R_3 zjemnit na relace

$$Z_j\text{: } \textit{osoba } X \textit{ je o } j \text{ cm } \textit{vyšší než osoba } Y \ (j = 1, 2, 3, \ldots)\ldots$$

Otázka počtu relací ovšem opět souvisí s přirozenou otázkou rovnosti relací. V souladu s definicí rovnosti množin řekneme, že rovné jsou si ty relace, které se skládají ze sobě rovných množin dvojic $[X, Y]$. Je tedy účelné chápat relace na množině M jako podmnožiny kartézského součinu $M \times M$. Otázka počtu relací na množině má nyní dobrý smysl; relací bude tolik, kolik je podmnožin kartézského součinu $M \times M$, tedy

$$2^{5 \cdot 5} = 2^{25} = 33\,554\,432.$$

Vést studenty k poznání relací ekvivalence a pochopení rozkladu výchozí množiny na třídy navzájem ekvivalentních prvků je poučné nejen z hlediska matematického, ale i z hlediska všeobecně poznávacího. Doložme to několika příklady tříd ekvivalence a příslušných relací.

Rodáci (osoba X se narodila ve stejném místě jako osoba Y),
ročníky (osoba X se narodila ve stejném roce jako osoba Y),
tvary (útvar X je podobný útvaru Y),
zbytkové třídy (čísla X a Y dávají při dělení daným číslem týž zbytek),
druhy rostlin (rostlina X má stejné charakteristické znaky jako rostlina Y),
směry (přímka X je rovnoběžná s přímkou Y).
...

Je škoda, že v současných osnovách střední školy se pojem relace nevyskytuje, vždyť např. již v první třídě se setká žák s tím, že dvěma přirozeným číslům přiřazuje číslo třetí jako jejich součet, tedy s ternární relací, charakter vícečlenných relací mají např. vzorce pro velikosti geometrických útvarů...

Všimněme si na závěr této části příspěvku problematiky definování pojmů.

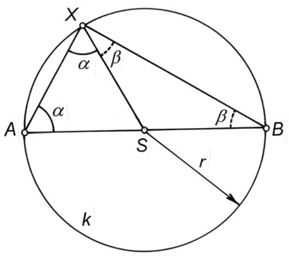
V dobré matematice vznikají pojmy z potřeb studia určité reality (přírodní, společenské nebo matematické) a jejich definice jsou účelnými konvencemi, které slouží zpravidla k upřesnění pojmu a ke komunikaci. Tak např. (patrně pro potřeby statistiky) *Unesco* a *Britská encyklopedie* definují *knihu* jako *neperiodickou tištěnou publikaci čítající více než 49 stran vyjma obálky.* Jistý vynálezce v 19. století považoval za nutné definovat *hrnec* jako *výjem obhmotnělé prostornosti: vyjímá část prostoru z jeho celistvosti a pojímá do sebe dílčí mnohost vzduchu.* Lékař *MUDr. Henri Gibbons* definoval *polibek* jako *anatomickou juxtapozici dvou orbicularis oris muscles ve stadiu kontrakce.* I v matematických textech se často setkáváme s nesprávnými nebo zbytečnými definicemi, např. uspořádaná dvojice $[a, b]$ se bez hlubšího rozboru definuje jako množina $\{a, \{a, b\}\}$, *vektor* i *komplexní číslo* se definují jako uspořádané dvojice reálných čísel, aniž by se mluvilo o početních operacích s nimi,...

Není dobré vytvářet u studentů názor, že pojmy se definují jen v matematice, stejně nesprávné však je utvářet přesvědčení, že *v matematice je každý pojem přesně definován* ([3], s. 7).

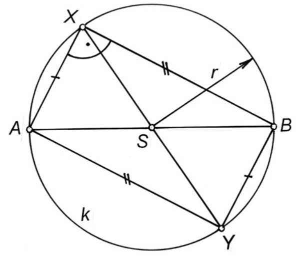
3. 2. Příběh kružnice

Kolo, snad nejužitečnější vynález všech dob, ... vynalezli neznámí lidé asi před šesti tisíci lety. Zprvu sloužilo jako hrnčířský kruh, pak ve spojení se saněmi vytvořilo vůz, v alexandrijské době se přeměnilo v ozubené kolo, potom ve šroub a matici, z čehož se zrodil celý obdivuhodný rod vozidel dostavníkem počínaje a rolls-roycem konče, až konečně proniklo do veškerého strojního průmyslu, takže nakonec zobecnělo do té míry, že současný svět by bez něho nemohl vůbec existovat. Dnes ovšem je vláda kola — výtvoru, který příroda nezná — vážně ohrožena. Připomeňme např. nahrazení vrtule reaktivním motorem, Pascalova ozubeného kola z počítačů elektronkami, ... ([11], s. 8). Příroda ovšem zná kruh a kružnici, např. v různých živočišných a rostlinných tvarech. Dítě pozná tvar kruhu, kroužku, kolečka, ... v předškolním věku, ve škole se učí kružnici rýsovat. Je to v souladu s *Euklidovými Základy.* Např. ve vydání komentovaném *Petrem Vopěnkou* ([6], s. 43) zní 3. postulát:

Vytvořit kruh o daném středu, na jehož obvodě leží daný bod.



Obr. 1



Obr. 2

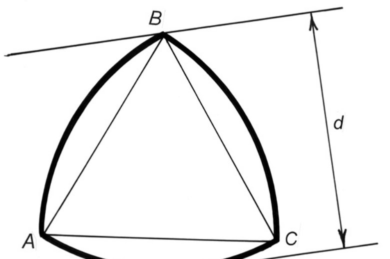
Mimo klasickou definici kružnice o středu S a poloměru r ($k = \{X \in \varrho,\ |SX| = r\}$) je ovšem účelné, aby student poznal tzv. *Thaletovo* vytvoření kružnice s průměrem AB jako množiny, do níž patří body A, B a všechny body X roviny, pro něž má úhel AXB velikost $\pi/2$. Zcela elementární prokázání ekvivalence obou definic je možné provést např. takto: Je-li $X \in k$, potom jsou v rovnoramenných trojúhelnících AXS, XBS úhly u základen shodné a v označení podle obr. 1 platí:

$$\alpha + \beta = \pi/2.$$

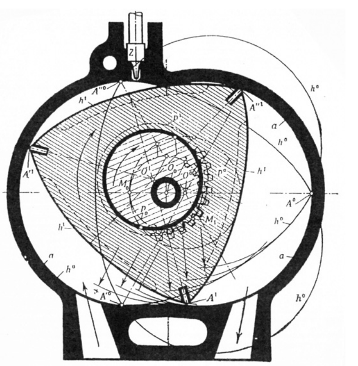
Je-li úhel AXB pravý, sestrojíme obdélník $AXBY$ podle obr. 2, a protože se úhlopříčky v obdélníku půlí, leží bod X na kružnici k s průměrem AB. V odstavci 3.3 připomeneme vektorové odvození věty o Thaletově kružnici.

Rovněž *Apolloniovo* vytvoření kružnice jako množiny všech bodů roviny, které mají od daných bodů P, Q poměr vzdáleností rovný danému číslu m ($m \neq 1$), by se mělo v dobré středoškolské matematice ukázat. Syntetické odvození tohoto výsledku není samozřejmé (viz např. [14], s. 181), analytické odvození uvedeme v části 3.3.

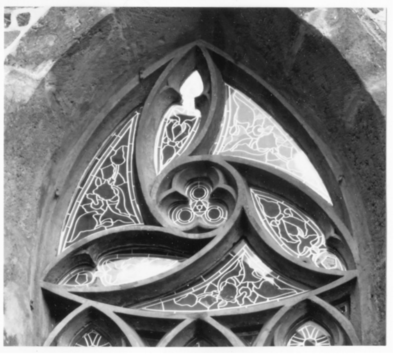
Kruh je ovšem útvar *konstantní šířky.* Studentům bychom neměli zatajit, že existují i další útvary této vlastnosti. Jedním z nich je tzv. *Reuleauxův trojúhelník* (obr. 3, kružnicové oblouky mají středy ve vrcholech rovnostranného trojúhelníku ABC). *Franz Reuleaux* byl německý inženýr, který v 19. století studoval mechaniku pohybů. Jeho trojúhelníky se vyskytují nejen v technice, ale i v umění. Na obr. 4 je schéma *Wankelova motoru,* na obr. 5 je část gotického okna katedrály sv. Ducha v Hradci Králové.



Obr. 3



Obr. 4



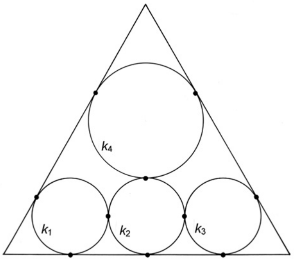
Obr. 5

Vidět matematiku v okolním světě a vidět souvislosti různých pojmů a jevů je podle mého názoru významný rys dobré středoškolské matematiky. S vlastnostmi kružnice je ovšem spjato i množství zajímavých konstrukčních úloh. Uveďme zde na ukázku aspoň dvě. Inspirací k první bylo logo jakési hodinářské firmy, kterého jsem si všiml na hradeckém nádraží, druhá úloha je převzata z matematické olympiády ([16], s. 169).

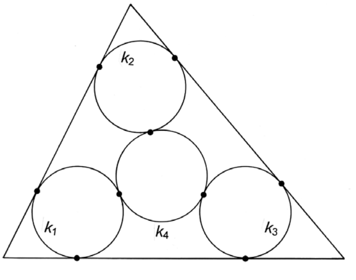
Úloha 1. *Do rovnostranného trojúhelníku „vepište" shodné kružnice k_1, k_2, k_3 a kružnici k_4 podle obr. 6.*

Úloha 2. *Sestrojte čtyři shodné kružnice k_1, k_2, k_3, k_4, z nichž tři se dotýkají vždy dvou stran daného trojúhelníku, čtvrtá má vnější dotyk s každou z předchozích kružnic (obr. 7).*

Úloha 1 je jednoduchá, napadne-li nás třem shodným kružnicím „v řadě" opsat rovnostranný trojúhelník. K řešení druhé úlohy je účelné všimnout si obrazů kružnic k_1, k_2, k_3, k_4 ve stejnolehlosti, které převádí středy prvních tří z těchto kružnic do vrcholů daného trojúhelníku.



Obr. 6



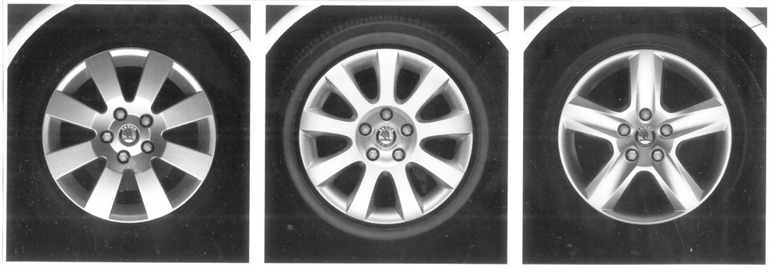
Obr. 7

Kružnice se „otáčí sama v sobě" podle svého středu. Je-li otáčení spjato s technickými problémy, např. s konstrukcí šroubů, je účelné spojit je „s matkou na klíč". Takováto matka by měla být „pravidelná", její podstavou by měl být pravidelný mnohoúhelník (definice pravidelného mnohoúhelníku je docela pěkná elementární otázka). Nejběžnější matky jsou šestiúhelníkové a čtyřúhelníkové (čtvercové). Pravidelný n-úhelník se obvykle konstruuje vepsáním do kružnice a při jeho sestrojení tedy potřebujeme rovnoměrně kružnici rozdělit na n částí. Zde se setkáváme s jednou z nejpozoruhodnějších souvislostí algebry a geometrie.

Máme-li řešit v oboru komplexních čísel binomickou rovnici

$$x^n = 1,$$

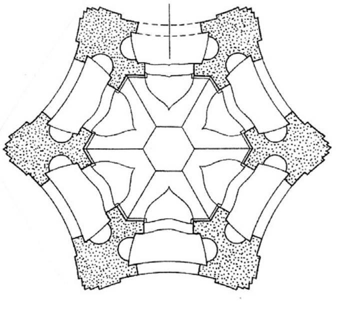
pak vzhledem k tomu, že při násobení komplexních čísel se sčítají jejich argumenty, můžeme řešení binomické rovnice geometricky interpretovat jako úlohu na rovnoměrné rozdělení kružnice, tedy jako konstrukci pravidelného n-úhelníku. Tuto úlohu řešil, jak známo, mladičký *Carl Friedrich Gauss* (1777–1855), který dokázal, že lze pravítkem a kružítkem sestrojit např. pravidelný sedmnáctiúhelník. Studenti by si měli uvědomit, že konstruovatelnost pravítkem a kružítkem není záležitost praktického měřictví, ale geometrie jako abstraktní disciplíny. *Praktické měřictví bylo pěstováno dávno před objevením „geometrického světa". Takzvaní napínači provazů, kteří se měřictvím zabývali, ovládali řemeslo s obdivuhodným mistrovstvím. Tak např. utvořit čtverec, který má stejný obsah jako daný kruh — k plné spokojenosti toho, kdo si práci objednal — je pro napínače lan hračkou, pro geometra úkolem neřešitelným* ([13], s. 39).



Obr. 8

Gauss by se patrně divil, kolik pravidelných n-úhelníků se otáčí na silnicích jeho rodného Německa i celého světa např. na discích automobilů, bez ohledu na to, zda jsou či nejsou euklidovsky konstruovatelné (obr. 8).

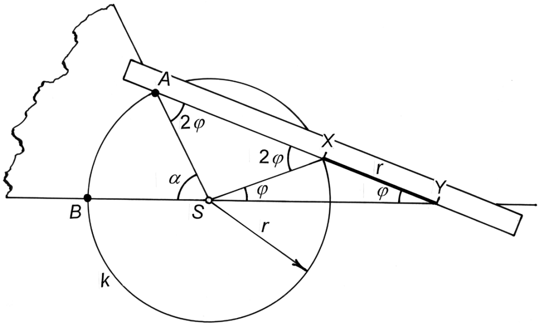
Obr. 9



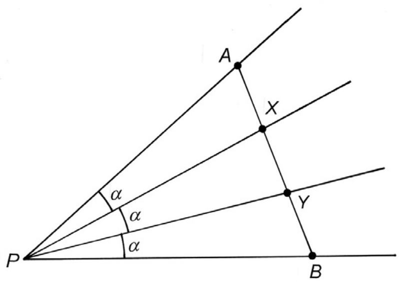
Obr. 10

Podobné pravidelnosti lze najít v přírodě (obr. 9), ale např. i v architektuře. Na obr. 10 je půdorys svatojanské kaple v Běstvině (o. Chrudim).

Trisekce úhlu, tj. rozdělení úhlu na tři shodné části je rovněž euklidovsky neřešitelným problémem, provedl ji ovšem neeuklidovsky např. *Archimedes* (287–212 př. n. l.) tímto způsobem: Sestrojil kružnici $k(S;r)$, kde S je vrchol daného úhlu velikosti α a úsečku XY délky r vyznačil na hraně pravítka; průsečíky kružnice k s rameny daného úhlu označil A, B. Nyní pohyboval pravítkem s ryskami X, Y tak, aby jeho hrana procházela bodem A, bod X aby náležel kružnici k a bod Y přímce BS podle obr. 11. Pak je zřejmě $\alpha = 3\varphi$ a $\varphi = \frac{1}{3}\alpha$. Mnohokrát jsem se setkal se studentskou „trisekcí" podle obr. 12, která je sice euklidovská, není však správná: nejdříve rozdělí „třetič" na tři shodné části AX, XY, YB základnu AB rovnoramenného trojúhelníku APB, APX je třetinou úhlu APB. Důkaz nesprávnosti této konstrukce je dobrou, i když ne obtížnou úlohou.



Obr. 11



Obr. 12

Geometrické řemeslo je právem složkou dobrého matematického vzdělávání, přitom *prokázaná nemožnost vyřešit klasické geometrické problémy nalezením příslušných euklidovských konstrukcí je netriviálním záporným poznatkem, jehož získání bylo provázeno některými jevy, jež takové poznatky obvykle přinášejí. Je to poznatek rozčilující, s nímž se někteří lidé dodnes nejsou schopni smířit* ([13], s. 317).

3. 3. Výpočty a kalkuly

Matematika odedávna souvisí s počítáním, s určováním počtu prvků množiny a s výpočty ekonomického a technického typu. Charakteristické pro takovéto výpočty je formální „hra" se symboly za účelem získání nových informací. Nezáleží přitom na tom, zda symboly jsou psané číslice či písmena nebo typy na klávesnici počítače. Z historie jsou známy zejména *aritmetický kalkul* spjatý s desítkovou soustavou, jehož původ je v Indii, *algebraický kalkul* vznikající v Evropě, *kalkul analytické geometrie* připisovaný *René Descartovi* (1596–1650), *vektorový kalkul, kalkul diferenciální a integrální* a *kalkul komplexních čísel.* Se všemi těmito druhy počítání se studenti střední školy seznamují, zdá se však, že ne příliš úspěšně. Zde se jedná o složku (ii) Taova pohledu, o *dobrou matematickou techniku.* Rozvíjení kalkulů souvisí s budováním představ o prvcích příslušných číselných oborů a rovněž v této oblasti má naše škola nedostatky. Uveďme úlohu, která může poodhalit úroveň vhledu a porozumění některým pojmům u studentů.

Úloha 3. a) *Kolikrát musíte sečíst číslo a, abyste dostali výsledek a^n?*

b) Je číslo $\sqrt{7+4\sqrt{3}}-\sqrt{3}$ *racionální či iracionální?*

c) *Ukažte, že existují iracionální čísla a, b, pro něž platí: a^b je racionální.*

K odpovědi na první otázku stačí rozumět definici mocniny, k ověření, že

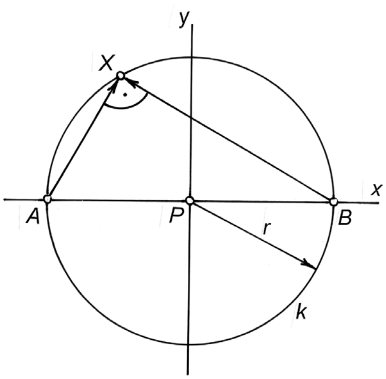
$$\sqrt{7+4\sqrt{3}}-\sqrt{3}=2$$

si stačí uvědomit, že $7+4\sqrt{3}=(2+\sqrt{3})^2$. Třetí úlohu ocení patrně pouze budoucí matematici. Uvažujme např. iracionální čísla $\sqrt{2}$ a $\sqrt{6}$. Číslo $(\sqrt{2})^{\sqrt{6}}$ je buď racionální, a pak jsme hotovi, nebo je $(\sqrt{2})^{\sqrt{6}}$ iracionální a platí

$$((\sqrt{2})^{\sqrt{6}})^{\sqrt{6}}=(\sqrt{2})^6=8.$$

Stačí tedy volit $a=(\sqrt{2})^{\sqrt{6}}$, $b=\sqrt{6}$.

Ukázat studentům „produktivní" roli kalkulů považuji za velmi důležité.



Obr. 13

Např. pomocí vektorového kalkulu můžeme ihned dokázat vlastnost Thaletovy kružnice. Je-li úhel AXB pravý, platí pro skalární součin a umístění bodů podle obr. 13 ($A[-r,0]$, $B[r,0]$, $X[x,y]$):

$$\overrightarrow{AX}\cdot\overrightarrow{BX}=0,$$

$$(x+r,y)(x-r,y)=0$$

neboli

$$x^2+y^2=r^2.$$

Bod X tedy leží na kružnici s průměrem AB. Obráceně platí pro libovolný bod X kružnice s průměrem AB: $AX\perp BX$.

Analytické odvození Apolloniovy kružnice spočívá v transformaci podmínky úlohy v označení podle obr. 14 ($P[0,0]$, $Q[q,0]$, $X[x,y]$)

$$\frac{|PX|}{|QX|}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{(x-q)^2+y^2}}=m$$

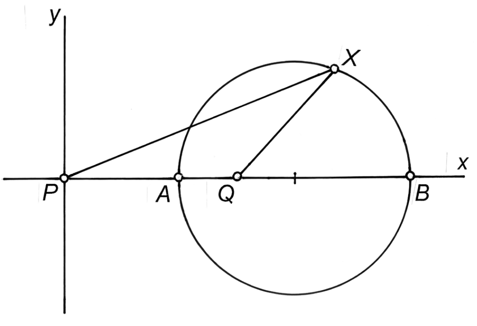
na tvar $(x-s)^2+y^2=r^2$, kde $s=\frac{m^2q}{m^2-1}$, $r=\frac{mq}{|m^2-1|}$.

Ještě výrazněji vynikne význam kalkulů při odvozování *Heronova vzorce*

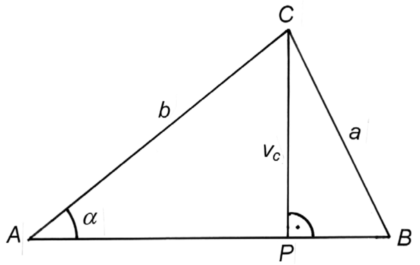
$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \tag{1}$$

pro obsah trojúhelníku se stranami délek a, b, c, kde $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$. Původní Heronův neobyčejně důmyslný důkaz (viz např. [10]) může dnešní středoškolák nahradit pouhou algebraickou úpravou výrazu pro výšku v_c příslušného trojúhelníku:

$$v_c=b\cdot\sqrt{1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2}=\frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}. \tag{2}$$



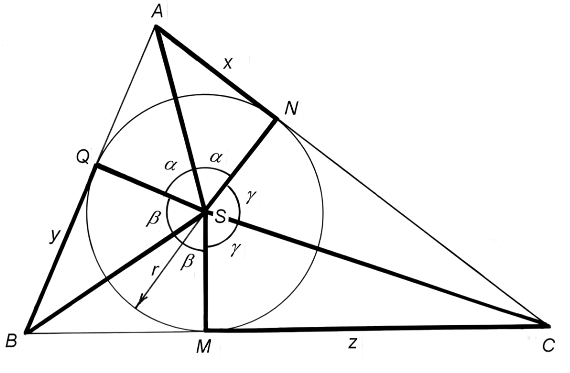
Obr. 14



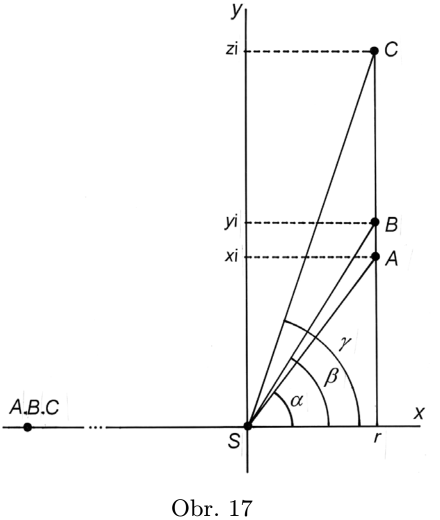
Obr. 15

Vyjádření výšky v_c ovšem plyne z užití kosinové věty pro trojúhelník ABC a Pythagorovy věty pro trojúhelník APC (obr. 15):

$$|AP|=b\cos\alpha,\quad v_c^2=b^2-b^2\cos^2\alpha,\quad \cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}. \tag{3}$$



Obr. 16



Obr. 17

Elegantnější důkaz Heronova vzorce s využitím komplexních čísel zveřejnil nedávno *Miles Dillon Edwards* [5]. Naznačme jeho postup. V trojúhelníku ABC označme S střed kružnice vepsané, r její poloměr, M, N, Q body dotyku této kružnice a stran trojúhelníku (obr. 16). Zřejmě platí: $|AN| = x = s - a$, $|BQ| = y = s - b$, $|MC| = z = s - c$. Umístíme-li trojúhelníky SNA, SQB, SMC do souřadnicové soustavy podle obr. 17, platí pro komplexní čísla A, B, C

$$A = r + x\mathrm{i}, \quad B = r + y\mathrm{i}, \quad C = r + z\mathrm{i}. \tag{4}$$

Protože $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, je součin $A.B.C$ reálné číslo, jehož imaginární složka je nulová. Platí tedy

$$r^2(x + y + z) = xyz \tag{5}$$

neboli

$$r = \sqrt{\frac{xyz}{x + y + z}}. \tag{6}$$

Protože pro obsah trojúhelníku ABC platí

$$S = rs, \tag{7}$$

plyne ze vztahu (7) s užitím výsledku (6) vzorec (1).

To je ovšem patrně postup, který ocení pouze budoucí matematici ve třídě. Ani na ně by ovšem dobrá školská matematika neměla zapomínat.

4. Závěr

Ve vyučování matematice na střední škole bychom měli ukazovat dobrá matematická řešení problémů, pěstovat matematickou techniku, rozvíjet na určité úrovni i matematickou teorii. Při řešení bychom měli ukazovat roli vhledu i možnosti aplikací. I studenti by měli poznat matematiku jako krásnou a přitažlivou disciplínu. To vše je možné při dobré práci učitelů, kteří jsou schopni matematiku jasně vykládat na zajímavých motivačních úlohách. Je nutné si uvědomit, že nespecializovaná třída je „vzorkem veřejnosti“, která je složena převážně z lidí bez kladného vztahu k matematice. Proto je důležité ukazovat kořeny i vyústění matematiky v realitě, proto bychom se měli snažit studenty matematikou zaujmout. Na několika příkladech jsem se pokusil naznačit, jak lze podle mého názoru takovou matematiku na úrovni střední školy pěstovat.

Věřím, že většina našich učitelů dobrou matematiku pěstuje, existují však určitě možnosti, jak v tomto směru práci školy zlepšit.

Poděkování. Tento příspěvek byl vypracován v rámci grantu GAČR 406/08/0710.

L i t e r a t u r a

[1] Arnold, V., Atiyah, M., Lax, P., Mazur, B.: *Mathematics: Frontiers and Perspectives.* Amer. Math. Soc., 2000.

[2] Berka, K.: *Aristoteles.* Orbis, Praha 1966.
[3] Bušek, I., Boček, L., Calda, E.: *Matematika pro gymnázia. Základní poznatky z matematiky.* Prometheus, Praha 1992.
[4] Coxeter, H. S. M.: *Introduction to Geometry.* John Wiley, New York 1961.
[5] Edwards, M. D.: *A Proof of Heron's Formula.* Amer. Math. Monthly, XII, 2007.
[6] Euklides: *Základy. Knihy I – IV.* OPS, Nymburk 2007.
[7] Feynmann, R.: *Radost z poznání.* Aurora, Praha 2003.
[8] Guedj, D.: *Papouškův teorém.* Ikar, Praha 2000.
[9] Jamek, V.: *O patřičnosti v jazyce.* Nakl. Franze Kafky, Praha 1998.
[10] Kuřina, F.: *Heronův důkaz Heronova vzorce.* Učitel matematiky *4* (28), 1998.
[11] Rousseau, P.: *Vynalézat je dobrodružství.* Orbis, Praha 1972.
[12] Tao, T.: *Co je dobrá matematika?* PMFA *53* (2008).
[13] Vopěnka, P.: *Rozpravy s geometrií.* Panorama, Praha 1989.
[14] Vyšín, J.: *Elementární geometrie 1.* Přírodovědecké vydavatelství, Praha 1952.
[15] Wiles, A.: *Twenty Years of Number Theory.* In: [1], 329–342.
[16] Zedek, M. a kol.: *Vybrané úlohy z matematické olympiády, kategorie B, C.* SPN, Praha 1971.

Mosaika IV

Čeněk Strouhal, Praha

Týden, který jsem Vám, mladí přátelé, navrhoval k pozorování světla zodiakalního, nevydařil se příznivě. Chladné, nevlídné počasí málo vábilo k vycházce po západu slunce; jaro začalo jen v kalendáři, nikoli v přírodě. Výjimku činila jen neděle dne 18. března, kdy bylo pěkně; ale večer nebyl zcela jasný, změna počasí se již ohlašovala. V neděli bylo v Praze maximum teploty 17°, v pondělí již jen 9°, v úterý 5°, ve středu jen 1° atd. Celý týden byl chladný, nepříjemný. Příznivý k pozorování byl večer v sobotu dne 24. března. Chtěje aspoň tohoto použíti vyšel jsem, svým mladším studentem provázen, po 8. hodině večer přes Brusku z Prahy ven k Dejvicům; chtěli jsme se dostati co možno daleko z oboru rozmanitých svítilen; ale světelná záře, nad Prahou se rozestírající, jevila svůj účinek i v končinách Dejvických, kde jsme konečně za vojenskými novými pekárnami zaujali pevnou pozorovací stanici. Jezdil jsem holí po nebi ukazuje svému hochovi kontury zodiakalního světla a jednotlivých souhvězdí, což asi z daleka vypadalo jako podezřelé šermování. Na zpáteční cestě u pekáren zastavila nás vojenská hlídka, která patrně naše divné počínání z daleka sledovala, a tázala se nás velmi zdvořile ale určitě, co že tam máme co hledat. Naše vysvětlení,

Pokračujeme v přetiskování Strouhalovy statě *Mosaika* započatém v č. 1 roč. 53 (2008). Tato část pochází z Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky XXXV (1906), 401–408.