Marc Leeuwen

Výpočet polynomů Kazhdana, Lustiga a Vogana pro rozštěpení grupy E_8

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 53 (2008), No. 4, 315–321

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/141870

Výpočet polynomů Kazhdana, Lustiga a Vogana pro rozštěpení grupy E_8

Marc van Leeuwen, Poitiers, Francie

V roce 2007 se stali experti v teorii Lieových grup předmětem zájmu médií, když oznámili, že struktura nejsložitější z výjimečných jednoduchých Lieových grup, totiž grupy E_8, byla konečně zmapována. Přesný výsledek byl ve skutečnosti mnohem komplikovanější a asi by byl pro sdělovací prostředky méně atraktivní: po intenzivních výpočtech za pomoci počítače byly zcela určeny polynomy Kazhdana, Lustiga a Vogana umožňující rozštěpení reálné Lieovy grupy typu E_8. Historku skrytou za tímto počítačovým projektem vypráví Marc van Leeuwen, profesor na Univerzitě v Poitiers a jeden ze spoluautorů řešení celého problému.

Dne 19. března 2007 se ocitl projekt „Atlas of Lie groups and representations" v centru zájmu novinářských kamer po oznámení, že byly vypočteny polynomy Kazhdana, Lustiga a Vogana pro rozštěpení grupy E_8, přičemž bylo vytvořeno tolik gigabajtů dat, že by mohly „pokrýt celý Manhattan". Na začátku bylo dobře uvážené rozhodnutí Amerického Institutu Matematiky zorganizovat propagaci tohoto nedávného výsledku, který by jinak určitě nevzbudil mnoho pozornosti lidí mimo projekt. Avšak náhlý zájem, který oznámení vyvolalo, překvapilo všechny zainteresované. Jako tomu bývá u většiny témat v matematickém výzkumu, bylo nemožné vysvětlit široké veřejnosti, čeho přesně bylo dosaženo nebo proč bylo téma tak zajímavé, a my jsme mohli věc jen hrubě interpretovat slovy, že jsme uspěli v konečném „dekódování" grupy E_8. Lze jen učinit závěr, že určitě existuje mnoho lidí, kteří bez znalosti detailů a bez pátrání po takových detailech milují matematiku všeobecně a grupu E_8 obzvláště. David Vogen vysvětlil v *Notices* Americké matematické společnosti širší kontext teorie reprezentací, ve kterém byly vedeny výpočty projektu Atlas a zejména postavení grupy E_8. V tomto článku sledujeme skromnější cíl: podáme několik údajů o povaze výpočtů a matematických objektech, které byly ve hře.

Počítačová Lieova teorie a projekt „Atlas"

V Lieově teorii se studují grupy, které jsou také diferencovatelnými varietami, tedy téma, které na první pohled nenabízí ten druh exaktních algebraických výpočtů, jaký užíváme například pro konečné grupy. Nicméně struktura a teorie reprezentací

Marc van Leeuwen, Université de Poitiers, Mathématiques, Téléport 2 – BP 30179, Boulevard Marie et Pierre Curie, 86962 Futuroscope Chasseneuil Cedex, France, e-mail: Marc.van-Leeuwen@math.univ-poitiers.fr

© Z anglického originálu *Computing Kazhdan-Lusztig-Vogan polynomials for split* E_8, Nieuw Archief voor Wiskunde *9* (2008), nr. 2, 113–116, přeložil Oldřich Kowalski.

(reduktivních) Lieových grup používá spíše než elementy samotných grup jejich odvozené kombinatorické struktury, jako jsou kořenové systémy, a to vskutku činí téma velmi vhodným pro počítačový přístup. Když tedy začaly být v 80. letech všeobecně k dispozici dostatečně výkonné počítače, byly vyvinuty programy pro provádění (v podstatě kombinatorických) výpočtů objevujících se v této teorii. Významným příkladem je program **LiE**, vyvinutý kolem roku 1990 v rámci projektu vedeného Arjehem Cohenem v CWI v Amsterdamu, který operuje s reprezentacemi komplexních reduktivních Lieových grup a který se používá dosud. Velký význam pro tuto teorii mají také Kazdanovy-Lustigovy polynomy pro Coxeterovy grupy, které byly poprvé definovány kolem roku 1980. Ačkoliv jsou dány elementárními rekurzivními relacemi, jejich výpočet představuje jedinečnou výpočetní výzvu, na kterou je nejlepší odpovědí zasvěcený program. Nejvýkonnější program tohoto charakteru s názvem *Coxeter* napsal a neustále zdokonaloval v 90. letech Fokko du Cloux, holandský matematik žijící v Lyonu.

V roce 2002 na semináři o počítačové Lieově teorii konaném v Montrealu předložili Jeff Adams, Dan Barbasch, Fokko du Cloux, John Stembridge, Peter Trapa a David Vogan první nárysy projektu nazvaného *Atlas of Lie Groups and representations.* Účelem bylo aplikovat počítačové metody také na komplikovanější teorii reálných Lieových grup. Konkrétně Kazhdanovy-Lusztigovy polynomy mohou být zobecněny na tuto situaci, ačkoliv „množina parametrů“, na které závisejí, je mnohem komplikovanější kombinatorická struktura než Weylova grupa použitá u komplexních grup. V roce 2003, kdy už se tento projekt naplno rozběhl, jsem se do něj zapojil i já, na pozvání Fokka (kvůli mým zkušenostem z projektu **LiE**), abych se zúčastnil významného programátorského úsilí, které by nový projekt mohl vyžadovat. Poté co Fokko počátkem roku 2004 ukončil svůj program *Coxeter*, začal pracovat na novém programu *Atlas*. Koncem roku 2005 zavedl všechny nutné pojmy ze strukturální teorie reálných reduktivních Lieových grup a přizpůsobil Kazhdanovy-Lusztigovy algoritmy této situaci (zatímco já jsem pouze začínal chápat programovací jazyk `C++` a některé kódy, které napsal). V té chvíli bylo možno vypočítat polynomy Kazhdana, Lustiga a Vogana (krátce „KLV polynomy“) ve všech zajímavých případech s výjimkou velkého bloku rozštěpené reálné formy pro grupu E_8.

Klasické a výjimečné grupy

Abychom porozuměli speciální roli grupy E_8 v počítačové Lieově teorii, dovolte mi říci pár slov o klasifikaci reduktivních Lieových grup, kde budu poněkud zjednodušovat, abych se mohl zaměřit na to podstatné. První klasifikace se týká *komplexních* reduktivních grup. Ty obsahují „polojednoduchou část“ a „centrální anuloid“. Možná přítomnost druhé části slouží převážně k tomu, abychom mohli poskytnout důležité příklady jako je grupa $\mathbf{GL}(n,\mathbb{C})$ (a také zkomplikovat některé algoritmy), ale jinak není zvlášť důležitá. Polojednoduchá část je v podstatě určena svým „kořenovým systémem“, což je konečná množina vektorů ve vektorovém prostoru konečné (a poměrně malé) dimenze, která splňuje jistý počet podmínek symetrie. Tyto podmínky jsou tak omezující, že kořenové systémy mohou být úplně klasifikovány, což učinili již Killing a Cartan na konci 19. století. Každý kořenový systém je direktním součinem „jednoduchých“ faktorů, z nichž každý buďto patří k jedné ze čtyř nekonečných posloupností $(A_n)_{n\geqq 1}$, $(B_n)_{n\geqq 2}$, $(C_n)_{n\geqq 3}$ a $(D_n)_{n\geqq 4}$, nebo k jednomu z pěti typů označených symboly G_2, F_4, E_6, E_7 a E_8. Členy nekonečných posloupností se objevují jako kořenové systémy jistých „klasických“ Lieových grup, jako jsou speciální lineární a symplektické grupy; ostatní odpovídají „výjimečným“ jednoduchým Lieovým grupám.

Klasické kořenové systémy mají velmi pravidelný popis ve všech dimenzích: například kořenový systém typu D_n může být realizován jako množina všech vektorů délky $\sqrt{2}$ v jisté podmřížce celočíselné mřížky $\mathbb{Z}^n$ prostoru $\mathbb{R}^n$ se standardním skalárním součinem (případy D_2 a D_3 jsou z klasifikace vyňaty, protože odpovídají některým jiným kořenovým systémům). Avšak výjimečné kořenové systémy závisejí na zvláštních okolnostech, protože se vyskytují jen pro specifické dimenze. Například standardní popis realizuje kořenový systém typu D_4 pomocí 24 vektorů jako je $(1,0,-1,0)$, ale lze vytvořit kopii tohoto systému, v níž místo každého vektoru v vezmeme vektor $\sqrt{2}v$. Tím získáme 24 vektorů délky 2 v $\mathbb{Z}^4$, jako jsou $(0,2,0,0)$ nebo $(-1,1,-1,-1)$; potom sjednocení těchto dvou kořenových systémů tvoří 48-prvkový kořenový systém typu F_4. Kořenové systémy typu G_2 a E_8 mohou být vytvořeny podobně vzhledem k singulárním okolnostem, zatímco systémy typu E_6 a E_7 jsou nejsnadněji popsány jako kořenové podsystémy systému typu E_8. Poslední kořenový systém má následující popis: začneme obvyklým 112-prvkovým kořenovým systémem typu D_8 obsaženým v mřížce $\mathbb{Z}^8$, přidáme všechny vektory z mřížky $(\frac{1}{2}\mathbb{Z})^8$, které (rovněž) mají délku $\sqrt{2}$, a nakonec vektor, jehož součet souřadnic je sudé celé číslo, jako například $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. Tím přidáme dalších 128 vektorů a dostaneme celkem 240 vektorů pro kořenový systém typu E_8. Tato soustava vektorů má výjimečně vysoký stupeň symetrie (v důsledku čehož vektory původního podsystému pro D_8 se nijak nedají odlišit od ostatních), o čemž svědčí fakt, že zrcadlení vzhledem k nadrovině kolmé k libovolnému z 240 kořenů vždy zachová kořenový systém jako celek. Tato zrcadlení generují konečnou grupu řádu 696 729 600, totiž Weylovu grupu.

V počítačové Lieově teorii může řešení mnoha otázek selhat kvůli jednoduchým faktorům, proto je těmto případům věnováno nejvíce pozornosti. Mezi nimi zaujímají zvláštní místo výjimečné typy, a to z několika důvodů. Za prvé, protože jejich počet je konečný, můžeme doufat, že se pro výjimečné typy dají úplně vyřešit některé otázky pomocí počítače. Na druhé straně pravidelnost klasických typů umožňuje, že některé odpovědi mohou být dány abstraktním (kombinatorickým) popisem, jako je Littlewoodovo-Richardsonovo pravidlo popisující rozklad v tenzorové součiny pro všechny typy A_n. Výjimečné grupy, a obzvláště E_8 mají hustější a složitější strukturu než klasické grupy, a tím se odpovídající počítačové problémy pro ně stávají náročnější. To nastalo zvláště v případě Kazhdanových a Lusztigových výpočtů. Grupa E_8 tedy slouží jako jakýsi „zlatý standard“: abychom posoudili účinnost použití nějakého obecného algoritmu, podíváme se, jak funguje na E_8.

V projektu Atlas se zabýváme reálnými Lieovými grupami, což znamená, že v komplexní grupě musí být specifikována některá její „reálná forma“. V typu E_8 existují tři neekvivalentní reálné formy. Již zmíněná množina parametrů pro KLV polynomy, což je kombinatorická struktura zvaná „blok“, závisí komplikovaným způsobem na reálné formě grupy a na reálné formě duální komplexní grupy. Velká část kódů programu Atlas slouží ke konstrukci bloků. Komplexní grupa E_8 je duální sama k sobě, takže existuje 9 možných kombinací reálných forem a duálních reálných forem; příkaz „*délka bloků*“ v programu Atlas spustí výpočet, který nám řekne, jak dlouhé jsou příslušné bloky (některé mohou být prázdné). Nakonec dostaneme matici

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3150 & 73410 \\ 1 & 73410 & 453060 \end{pmatrix}.$$

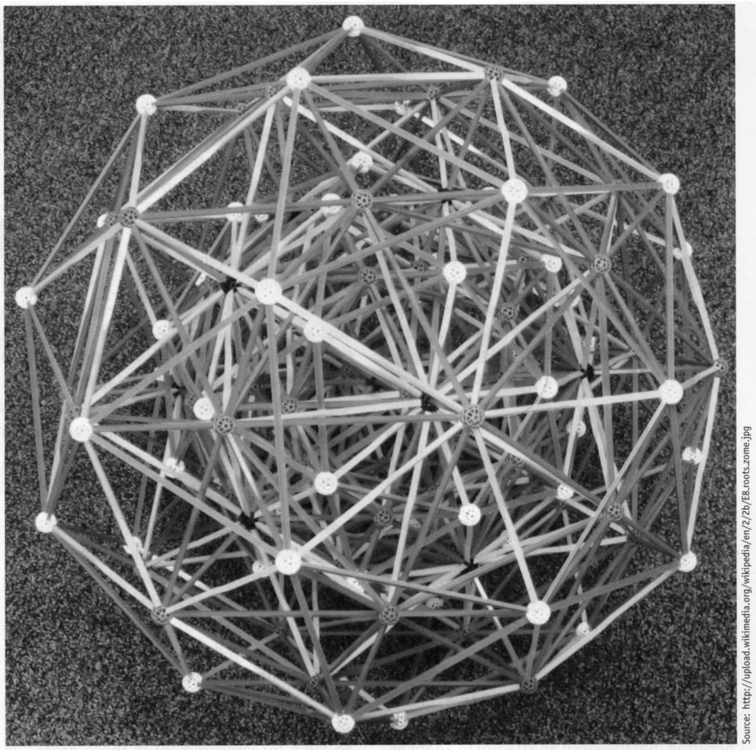
Tedy první reálná forma má přesně jeden blok s jedním prvkem (to nastane pro *kompaktní* reálnou formu každého typu), druhá forma má dva podstatně větší bloky a poslední blok třetí (rozštěpené) reálné formy se nazývá „velký blok“. Protože KLV polynomy závisejí na dvou parametrech, které se pohybují po tomto bloku, je zvláštní zájem o délku velkého bloku pochopitelný, a tato délka nebyla známa, dokud neexistoval program Atlas. Tato délka se ukázala být relativně malá ve srovnání s počtem prvků Weylovy grupy; nicméně číslo 453060^2 je přibližně 2.05×10^{11}.

Výzva velkého bloku grupy $\boldsymbol{E}_8$

Elementy každého bloku odpovídají třídám ireducibilních reprezentací příslušných reálných Lieových grup a KLV polynomy dodávají těmto třídám spletité strukturální informace. Například ireducibilní reprezentace každé *kompaktní* grupy, mající všechny konečnou dimenzi, tvoří jedinou třídu. Existence jediného KLV polynomu (ve skutečnosti konstantního polynomu rovného 1) znamená, že *kompaktní* grupy jsou ovládány jedinou formulí, totiž Weylovou formulí pro charaktery (na které je založeno mnoho výpočtů programu **L^IE**).

KLV polynom je element okruhu $\mathbb{Z}[q]$, o jehož koeficientech je známo, že jsou nezáporné. Teorie dává jediný prostředek k jejich výpočtu, totiž soubor relací vyjádřený pomocí kombinatorické struktury bloku, který může být použit jako soubor rekurzivních relací pro postupný výpočet všech dvojic parametrů na daném bloku. Tato kolekce polynomů je přirozeným způsobem ztotožněna s dolní trojúhelníkovou maticí a rekurzivní relace odkazují k prvkům této matice, které jsou v řádcích nad daným prvkem nebo ve sloupcích napravo od něj. Vzhledem k povaze těchto relací je bezpředmětné pokoušet se vypočítat jednotlivé KLV polynomy nebo počítat je bez shromažďování již vypočtených hodnot pro pozdější vyhledávání. Takže program Atlas v podstatě vyplňuje tuto matici polynomů na základě rekurzivních formulí a pak zapíše všechny výsledky do jednoho souboru.

Dokud paměť, kterou máme k dispozici, je dostatečná k uložení všech výsledků, výpočet je docela rychlý; to vysvětluje proč všechny zajímavé případy s výjimkou velkého bloku pro E_8 mohou být zvládány velmi rychle, když už byl program jednou napsán. Dokonce výpočet KLV polynomů pro blok s délkou strany 73 410 patřící k prostřední reálné formě grupy E_8 trvá na moderním osobním počítači méně než 10 minut, za předpokladu, že je tento počítač vybaven alespoň dvěma gigabajty (GB) paměti. Tento zvláštní případ může být zvládnut, protože *ne všechny* prvky v trojúhelníkové části matice jsou ukládány; jinak bychom museli uložit kolem 2.7×10^9 prvků, což by vyžadovalo mnohem více než 10 GB paměti. Každý prvek matice, k němuž je příslušná rekurzivní relace stejná jako poslední vypočtená, se neukládá (a může být nalezen dodatečně, pokud jeho hodnotu budeme potřebovat). Také se neukládají prvky nulové hodnoty. Ve zmíněném případě to znamená, že se ve skutečnosti ukládá pouhých 63 milionů prvků, což je 2.5 % všech míst trojúhelníkové části matice.



Obr. 1: Třírozměrný model *Zome* kořenového systému grupy E_8 sestrojený Davidem A. Richterem. Na jeho webové stránce najdete popis této konstrukce a mnoho dalších zajímavých modelů.

Když se ale vyčerpá paměť, situace se rapidně zhorší. Díky použití virtuální paměti se však můžeme vyhnout tomu, že bychom museli přerušit výpočet: část dat může být uložena na zvláštní disk (do tzv. výměnného prostoru), abychom vytvořili prostor pro nové hodnoty. Ale ačkoliv se operační systém pokouší držet ve své paměti hodnoty, které byly použity jako poslední, ukazuje se, že se tato množina neustále přesunuje, takže výpočet začne brzy spotřebovávat skoro všechen čas na výměnu dat mezi pamětí počítače a diskem. Právě toto se stalo pro velký blok grupy E_8: dokonce s několika gigabajty paměti přímo v počítači a s prakticky neomezeným výměnným prostorem program Atlas spotřeboval týdny pouze na práci s diskem, ale vůbec se nepřiblížil úplnému výpočtu matice polynomů.

Mezitím jsme byli šokováni zjištěním, že u Fokka byla diagnostikována amyotrofická laterální skleróza (degenerativní neurologická choroba), téměř v momentě, kdy dokončil programování algoritmu pro KLV polynomy. Během několika měsíců ztratil schopnost hýbat rukama a do roka zemřel. Ačkoliv nebyl schopen sám programovat, pokračoval v práci na projektu Atlas během tohoto posledního roku tak, že pomáhal Davidu Voganovi a nechal na Adamsovi a na mně, abychom se seznámili s jeho programem a dále jej zlepšovali. Ve skutečnosti nebylo pro Fokka primární záležitostí dobytí velkého bloku grupy E_8, protože, jak nám řekl, během několika let budeme mít všichni počítače s dostatečnou pamětí k dosažení tohoto cíle. Možná, že mohl mít docela dobře pravdu, ale my jsme nakonec neměli tolik trpělivosti jako on.

Rozlousknutí problému E_8

Spojili jsme se s Williamem Steinem z Washingtonské státní univerzity, který nám umožnil pracovat s programem Atlas na počítači *Sage*, který měl 64 GB paměti. Nicméně zdálo se, že k provedení výpočtu pro E_8 bychom potřebovali přístroj s nejméně 150 GB paměti. Zatímco jsme uvažovali o zakoupení ještě většího počítače, objevila se myšlenka, která zahájila pokusy přizpůsobit Atlas tak, aby bylo možno provést veškeré výpočty pro E_8 na *Sage*. Dvě charakteristiky odlišující velký blok grupy E_8 od jednodušších případů jsou, že počet *navzájem různých* polynomů v matici roste poměrně rychle (i když na druhé straně mnoho polynomů se objevuje extrémně často, takže Atlas ukládá jen jednu kopii každého) a že některé polynomy obsahují dosti velké koeficienty (větší než $2^{16} = 65\,536$), což znamenalo, že jsme museli rezervovat 4 bajty pro každý koeficient. Když to zkombinujeme, znamená to, že spousta ukládání je zapotřebí pouze pro registraci všech polynomů, které se vyskytnou. To zahrnuje více než 13 miliard 4bajtových koeficientů. Naše myšlenka byla, že tvar rekurzivních relací dovoluje, aby výpočty byly prováděny s modulárními koeficienty, z nichž každý může být uložen pomocí jediného bajtu, a že poté se dá použít Čínská věta o zbytcích k rekonstrukci skutečných celočíselných koeficientů.

Jelikož program Atlas je dobře strukturovaný, bylo celkem snadné jej pozměnit tak, aby ukládání polynomiálních koeficientů bylo redukováno na jeden bajt a aby všechna aritmetika v něm byla nahrazena modulární aritmetikou. Tento modifikovaný program byl hotov začátkem prosince 2007, jen několik dní poté, co jsme přijali myšlenku použít modulární aritmetiku (a méně než měsíc po Fokkově smrti). Nicméně tato modifikace, i když snížila nároky na paměť na čtvrtinu, stále ještě nedokázala vypočítat velký blok ani na počítači *Sage*, protože jiné důležité faktory ovlivňující požadavky na ukládání zůstaly neovlivněny. Například získání odpovědi z matice na otázku, kde se vyskytuje určitý polynom, struktura dat použitá k tomu, aby bylo umožněno zapsat každý polynom právě jednou a obecná režie datových struktur. Za normálních okolností důvěřujeme virtuálním knihovnám používaným k poskytnutí vhodných údajů a nepohráváme si přitom s detaily o bitech a bajtech. Nicméně pokud pracujeme s typy dat, které se opakují v řádu miliard, a paměť je pro nás jakousi prémií, musíme věnovat pozornost zlepšení i v této oblasti. Ve skutečnosti se ukázalo, že mnohé se může získat dosti přímočarými postupy, jako je nahrazení 8bajtových ukazatelů (pointerů) 4bajtovými identifikačními čísly, používání poněkud zmatených tabulek spíše než vyhledávacího stromu a řazení všech polynomiálních koeficientů do jediného pole spíše než do miliardy různých polí. S takovými metodami jsem byl obeznámen již po dlouhou dobu, když jsem studoval programy (jako je TEX) napsané Donaldem Knuthem v době, kdy počítačová paměť byla méně bohatá, než je dnes. Nakonec byly požadavky na paměť pro zapsání velkého bloku sníženy na 55 GB, což umožňovalo pokusit se zpracovat vše na počítači *Sage*.

Všechno, včetně malých obslužných programů zvedajících[1]) modulární koeficienty, bylo víceméně připraveno ke spuštění začátkem vánočních prázdnin. Výpočet potom proběhl v Seattlu a byl řízen na dálku Davidem Voganem, buďto z MIT nebo z kteréhokoliv jiného místa, kde měli internet (jako je například letištní hala) a kde se náhodou vyskytoval, a ostatní členové týmu Atlas se mu přitom „dívali přes rameno“ pomocí okna **VNC** (Virtual Network Computing). Nebudu opakovat překrásné vyprávění z Davidova článku o tom, jak vrtkavé se ukázalo být naše štěstí, když výpočet postupoval vpřed. Stačí říci, že každý první pokus provést některou část výpočtů selhal, buďto kvůli chybě v programu, kterou nebyla schopna odhalit ani předběžná kontrola, nebo kvůli mnoha haváriím různých systémů (které se ukázaly být způsobeny zcela nezávislými procesy na počítači *Sage*). Nicméně díky naší urputnosti jsme dosáhli cílové čáry 8. ledna 2008.

Moje osobní vzpomínky na toto dobrodružství jsou spojeny s nucenými krátkými přestávkami během mé dovolené, kterou jsem trávil v mém domě v Poitiers se svými dvěma dětmi – teenagery a během kterých jsem diskutoval o softwarových problémech s Davidem pomocí elektronické pošty (ve skutečnosti to byl on, kdo odhalil a vyřešil většinu z nich). Zejména si vzpomínám na poslední víkend, kdy jsem byl zpět v Holandsku a kde, poté co jsem vrátil děti zpět do jejich domova, jsem strávil večer v domě mých rodičů, přičemž jsem přemítal o poslední „mouše“, kterou mi ohlásil David. Příští den zrána, poté co jsem shledal, že celonoční pokus selhal, aniž by nalezl nějakou chybu, napsal jsem nový e-mail Davidovi, abych ho povzbudil k dalšímu pokusu (protože ta maličkost se mezitím díky náhodě vyřešila), zatímco můj otec si dělal starosti, že zmeškám vlak zpět do Francie (což se nestalo). Pro změnu potřebovaly počítače více času než vlaky. Další den jsem byl již zpět v práci a to byl den před úspěšným dokončením programu pro Čínskou větu o zbytcích.

Literatura

(*Vřele doporučujeme otevřít stránky [2] a [3], které osvětlují některé základní pojmy, obsahují pěkné obrázky a také množství informací obecnější povahy.*)

[1] David Vogan: *The character table for E_8,* Notices Amer. Math. Soc. *54* (2007), no. 9, 1122–1134.

[2] `http://www.aimath.org/E8`, beschrijving door het American Institute of Mathematics.

[3] `http://www.liegroups.org`, de website van het Atlas project.

[1]) V originále „lifting“.