

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Pavel Pokorný

Pružné kyvadlo pohledem teorie dynamických systémů

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 53 (2008), No. 4, 278–294

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/141868>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2008

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

Pružné kyvadlo pohledem teorie dynamických systémů

Pavel Pokorný, Praha

Chaos je život,
periodicita je choroba,
rovnováha je smrt

Abstrakt. *Odvodíme pohybové rovnice pro pružné kyvadlo s pružinou libovolné hmotnosti, převedeme je na tvar s jediným parametrem a najdeme podmínku stability svislých kmitů. Tuto podmínku uvedeme v přesném tvaru, najdeme přibližný explicitní tvar a určíme bifurkaci, která je za ztrátu stability zodpovědná. Dále popíšeme nová řešení, která touto bifurkací vznikají.*

Úvod

Články [1] a [2] pojednávají o jednoduchém, ale velice zajímavém a snadno experimentálně ověřitelném jevu. Závaží zavěšené na pružině může při vhodných počátečních podmínkách konat svislé kmity. Tyto kmity jsou ale při určitých hodnotách parametrů (tuhost pružiny, hmotnost závaží, amplituda kmitů) nestabilní a sebemenší odchylka od svislého směru v krátké době naroste do hodnot srovnatelných s amplitudou svislých kmitů. Závaží pak koná současně kmity nahoru a dolů i kyvy doleva a doprava.

Tento pohyb je však pouze přechodný, po určité době pravo-levé kyvy opět ustanou a kyvadlo se vrátí do svislých kmitů. Tyto dva typy pohybů se pravidelně střídají.

Nutno poznamenat, že tento jev není jen akademická hračka, ale úzce souvisí s řadou teoretických i praktických otázek ve spektroskopii, meteorologii a dynamice tekutin (viz bohatý seznam literatury v [1] a [2]). K tomuto téměř vyčerpávajícímu seznamu literatury (který zde není třeba opisovat) chceme pouze poznamenat, že práce [7] je dnes dostupná v anglickém překladu na webové stránce Petra Lynche [4].

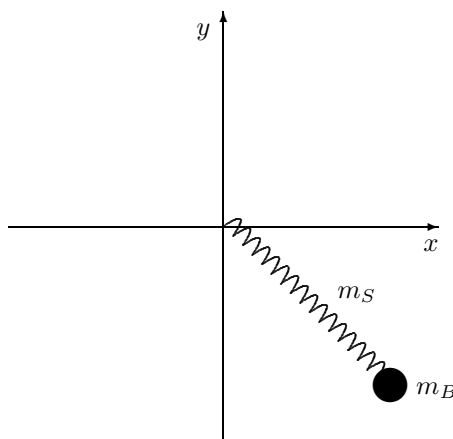
V pracích [1] a [2] byl tento jev pečlivě popsán z experimentálního hlediska a podrobně zkoumán teoreticky. Byly sestaveny pohybové rovnice ve tvaru soustavy nelineárních obyčejných diferenciálních rovnic. Pro tento typ rovnic ale nelze, až na výjimky, napsat analytické řešení. Z pouhého pohledu na rovnice není možné stanovit vlastnosti řešení, např. je-li periodické, kvazi-periodické, chaotické apod. Autoři v [1] a [2] tedy použili metodu Taylorova rozvoje a za dodatečných předpokladů o velikosti výchylky odvodili a diskutovali přibližný tvar řešení pohybových rovnic.

RNDr. PAVEL POKORNÝ, Ph.D., Ústav matematiky, Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, Technická 5, 166 28 Praha 6, e-mail: Pavel.Pokorny@vscht.cz

Cílem této práce je ukázat komplementární přístup, založený na teorii nelineárních dynamických systémů. Abychom mohli studovat závislost typu chování na parametrech systému, je vhodné nejdříve transformací souřadnic omezit počet těchto parametrů. Ukážeme, jak lze matematický model pružného kyvadla převést na tvar s jediným parametrem, a to dokonce za obecnějších předpokladů. Zatímco je pružné kyvadlo v literatuře obvykle studováno za předpokladu, že hmotnost pružiny je zanedbatelná, my odvodíme tvar rovnic pro libovolnou hmotnost pružiny. Hlavním cílem předkládané práce je objasnit podrobnosti jevu, při kterém svislé kmity ztratí stabilitu. Odvodíme přesnou podmínku pro hranici mezi oblastí stability a oblastí nestability, ukážeme, jak lze tuto hranici číselně spočítat s libovolnou přesností, odvodíme přibližné explicitní vyjádření této podmínky, vysvětlíme typ a vlastnosti bifurkace, ke které dochází, a rozebereme typy a vlastnosti řešení, které touto bifurkací vznikají.

Pohybové rovnice

V této kapitole odvodíme pohybové rovnice pružného kyvadla s těžkou pružinou a transformací souřadnic je upravíme na tvar s jediným parametrem. Výrazem těžká pružina nemyslíme, že by pružina byla nutně těžší než závaží, jen chceme zdůraznit, že nezanedbáváme její hmotnost, čímž dostaneme realističtější model.



Obr. 1. Pružné kyvadlo sestává ze závaží hmotnosti m_B zavěšeného na pružině o hmotnosti m_S , jejíž druhý konec je upevněn v počátku souřadnic.

Uvažujme tedy hmotný bod o hmotnosti m_B (index B z anglického *bob*) zavěšený na homogenní pružině (homogenní co do vlastností i protažení; neuvažujeme tedy podélné vlny, které by na hmotné pružině mohly existovat) o hmotnosti m_S (index S z anglického *spring*) a délce (bez zatížení) ℓ_0 a tuhosti k , viz obr. 1. Druhý konec pružiny je upevněn v počátku souřadnic. To vše v homogenním gravitačním poli o intenzitě $(0, -g)$. Označme souřadnice závaží X a Y (později zavedeme bezrozměrné

souřadnice x a y). Kinetická energie závaží je

$$E_{kinB} = \frac{1}{2}m_B V^2,$$

kde V je rychlost závaží. Určíme kinetickou energii pružiny. Osu pružiny lze považovat za úsečku s parametrizací $(\alpha X, \alpha Y)$, $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$. Počátek odpovídá hodnotě $\alpha = 0$ a druhý konec pružiny hodnotě $\alpha = 1$. Pak kinetická energie pružiny je

$$E_{kinS} = \int_0^1 \frac{1}{2}(\alpha V)^2 m_S d\alpha = \frac{1}{6}m_S V^2.$$

Potenciální energie závaží je

$$E_{potB} = m_B g Y$$

a potenciální energie pružiny je

$$E_{potS} = \int_0^1 g \alpha Y m_S d\alpha = \frac{1}{2}m_S g Y.$$

Energie pružnosti je

$$E_{elas} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2,$$

kde ℓ_0 je délka nezátíženého pružiny a $\ell = \sqrt{X^2 + Y^2}$ je skutečná délka pružiny. Z celkové energie (Hamiltoniánu)

$$E = E_{kinB} + E_{kinS} + E_{potB} + E_{potS} + E_{elas}$$

(při zanedbání tření) snadno určíme z podmínky $\frac{dE}{dT} = 0$ pohybové rovnice

$$\begin{aligned} \left(m_B + \frac{m_S}{3}\right) \frac{d^2 X}{dT^2} &= k \left(\frac{\ell_0}{\sqrt{X^2 + Y^2}} - 1 \right) X, \\ \left(m_B + \frac{m_S}{3}\right) \frac{d^2 Y}{dT^2} &= k \left(\frac{\ell_0}{\sqrt{X^2 + Y^2}} - 1 \right) Y - \left(m_B + \frac{m_S}{2}\right) g. \end{aligned}$$

Zavedeme-li bezrozměrné souřadnice x, y, t vztahy

$$x = \frac{X}{\ell_0}, \quad y = \frac{Y}{\ell_0}, \quad t = T \sqrt{\frac{k}{m_B + \frac{m_S}{3}}},$$

dostaneme pohybové rovnice ve tvaru

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 1 \right) x, \\ \ddot{y} &= \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 1 \right) y - p, \end{aligned} \tag{1}$$

kde tečka nad symbolem značí derivaci podle času t . Tento model obsahuje jediný parametr

$$p = \frac{(m_B + \frac{m_S}{2})g}{k\ell_0},$$

který má několik interpretací: je to bezrozměrná intenzita vnějšího pole; je to relativní prodloužení pružiny

$$p = \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0}$$

efektivní zátěží $m_B + \frac{m_S}{2}$ a také souvisí s veličinou

$$q = \frac{p}{1+p} = \frac{\ell - \ell_0}{\ell} = \left(\frac{\Omega_P}{\Omega_S}\right)^2, \quad (2)$$

kde

$$\Omega_P = \sqrt{\frac{g(m_B + \frac{m_S}{2})}{\ell(m_B + \frac{m_S}{3})}}$$

je úhlová frekvence pravo-levých kyvů a

$$\Omega_S = \sqrt{\frac{k}{m_B + \frac{m_S}{3}}}$$

je úhlová frekvence svislých kmitů.

Stabilita svislých kmitů

V této kapitole přepíšeme model do soustavy obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu, odvodíme rovnice ve variacích a použijeme je pro určení stability svislých kmitů.

Zavedeme-li čtyři proměnné

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x, \dot{x}, y, \dot{y}),$$

lze přepsat soustavu dvou rovnic druhého řádu (1) do tvaru soustavy čtyř rovnic prvního řádu

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_3^2}} - 1\right)x_1, \\ \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= \left(\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_3^2}} - 1\right)x_3 - p. \end{aligned} \quad (3)$$

Tato soustava má právě dva rovnovážné stavy: jeden je stabilní $(0, 0, -1-p, 0)$ (je to střed, angl. *center*) s bezrozměrnou energií $e = -p - \frac{p^2}{2}$ a druhý nestabilní $(0, 0, 1-p, 0)$ (je to sedlo, angl. *saddle*) s bezrozměrnou energií $e = p - \frac{p^2}{2}$ (tento má

fyzikální smysl jen pro $p < 1$). To dává další interpretaci parametru p : je to polovina rozdílů mezi bezrozměrnými energiemi rovnovážných bodů.

Naším cílem je vyšetřit stabilitu svislých kmitů

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, -1 - p + a \sin t, a \cos t) \quad (4)$$

systému (3), kde a je amplituda svislých kmitů.

Máme-li obecně dynamický systém

$$\dot{\vec{x}} = f(\vec{x}), \quad \vec{x} \in R^n \quad (5)$$

s hladkou pravou stranou f , pak stabilita řešení $\vec{x}_A(t)$ tohoto systému je dána chováním blízkých trajektorií. (Zde \vec{x} je n -rozměrný stavový vektor, nikoliv vodorovná souřadnice závaží.) Uvažujme jednu takovou blízkou trajektorii $\vec{x}_B(t)$ vycházející z počáteční podmínky $\vec{x}_B(0)$ blízké k $\vec{x}_A(0)$. Potom rozdíl $\vec{y}(t) = \vec{x}_B(t) - \vec{x}_A(t)$ se vyvíjí s časem podle

$$\begin{aligned} \dot{\vec{y}}(t) &= \dot{\vec{x}}_B(t) - \dot{\vec{x}}_A(t) = f(\vec{x}_B(t)) - f(\vec{x}_A(t)) = \\ &= f(\vec{x}_A(t) + \vec{y}(t)) - f(\vec{x}_A(t)) = f'(\vec{x}_A(t)) \cdot \vec{y}(t) + \mathcal{O}(\|\vec{y}(t)\|), \end{aligned}$$

kde

$$f'_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

je matice parciálních derivací funkce f . Zanedbáme-li členy vyšších řádů $\mathcal{O}(\|\vec{y}(t)\|)$, dostaneme variační rovnice

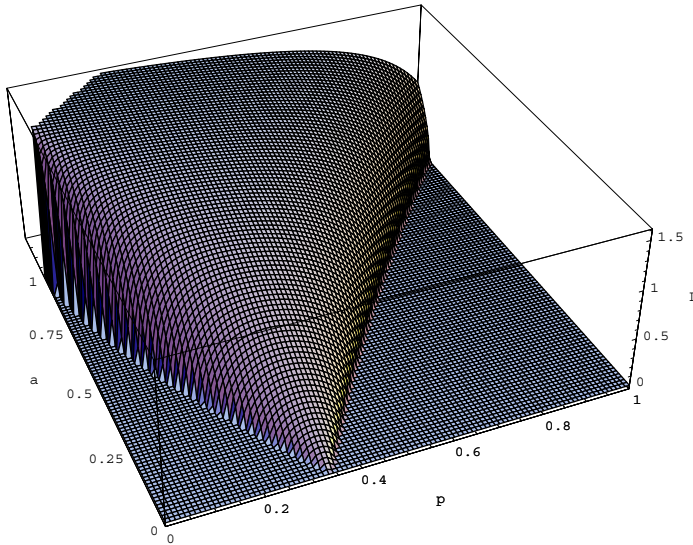
$$\dot{\vec{y}}(t) = f'(\vec{x}(t)) \cdot \vec{y}(t). \quad (6)$$

Chování blízké trajektorie $\vec{x}_B(t)$ závisí na směru počáteční odchylky $\vec{y}(0)$. Abychom dostali úplnou informaci, musíme integrovat n verzí rovnic (6) (spolu s jednou verzí rovnic (5)) s n lineárně nezávislými počátečními odchylkami. Můžeme zapsat n sloupcových vektorů do jediné matice M typu $n \times n$ a pak lze n verzí variačních rovnic zapsat jako jedinou maticovou rovnici

$$\dot{M}(t) = f'(\vec{x}(t)) \cdot M(t) \quad (7)$$

s počáteční podmínkou $M(0) = E$, kde E je jednotková matice typu $n \times n$.

Abychom zjistili stabilitu periodického řešení s periodou τ , integrujeme n rovnic (5) a n^2 rovnic (7) po dobu jedné periody τ . Tím získáme matici $M(\tau)$, která určuje vývoj malé odchylky \vec{y} takto: $\vec{y}(t + \tau) = M(\tau) \cdot \vec{y}(t)$. Odchylky $\vec{y}(k\tau)$; $k \in Z$ v celočíselných násobcích periody τ tvoří posloupnost vektorů. Je to jisté zobecnění geometrické posloupnosti, kdy prvky nejsou čísla, ale vektory, a kvocient není číslo, ale matice. Prvky geometrické posloupnosti rostou v absolutní hodnotě (pro nenulový první člen), je-li kvocient v absolutní hodnotě větší než jedna. V našem případě roli kvocientu hrají vlastní čísla matice $M(\tau)$ a určují stabilitu periodického řešení takto [3]: má-li alespoň jedno vlastní číslo absolutní hodnotu větší než 1, je periodické řešení nestabilní.



Obr. 2. Maximum absolutních hodnot vlastních čísel matice $M(2\pi)$ jako funkce síly vnějšího pole p a amplitudy periodického řešení a . Dvě plošiny představují stabilní oblast a kopec mezi nimi nestabilní oblast. Vynesli jsme hodnotu $L = \arctg(\max_i |\lambda_i| - 1)$, aby byly výsledky z rozumného intervalu.

V našem případě je f dáno pravou stranou rovnice (3). Potom matice f' v periodickém řešení (4) je

$$f' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ f'_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

kde

$$f'_{21} = \frac{1}{|-1 - p + a \sin t|} - 1.$$

Čtenář snadno zjistí, že f' neexistuje v počátku, protože potenciál tam není hladký. Tomuto bodu se vyhneme, uvažujeme-li podmínku na amplitudu a

$$|a| < 1 + p. \quad (9)$$

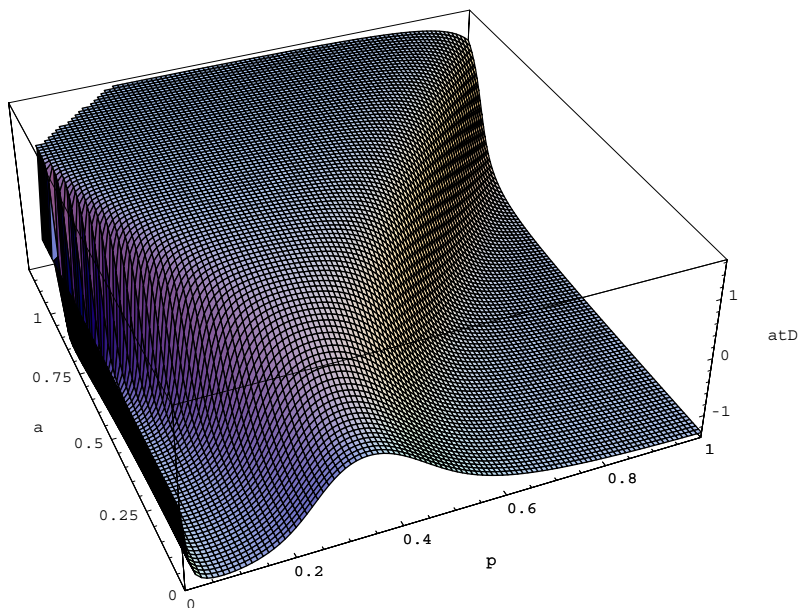
Ta je ale mnohem obecnější než podmínka $|a| \ll 1$, která se obvykle uvažuje v literatuře.

Nyní můžeme integrovat (3) a (7) po dobu jedné periody $\tau = 2\pi$, abychom získali čtyři vlastní čísla $\lambda_i(p, a)$, $i = 1, \dots, 4$, matice $M(2\pi)$. Ty představují čtyři komplexní funkce dvou reálných argumentů: síly vnějšího pole p a amplitudy periodických oscilací a .

Ve skutečnosti nemusíme integrovat rovnice (3), protože známe řešení (4), a nemusíme integrovat 16 rovnic (7), protože matice (8) se rozpadá na dva bloky 2×2 . Dolní pravý blok má vlastní čísla v absolutní hodnotě rovné jedné a ta se rovnají dvěma vlastním číslům celé matice. Stačí integrovat 4 lineární neautonomní rovnice

odpovídající hornímu levému bloku matice (8). Až na výjimečně jednoduché případy musíme integrovat numericky.

Obr. 2 ukazuje závislost $L = \arctg(\max_i |\lambda_i| - 1)$ na parametru p (síla vnějšího pole) a amplitudě svislých periodických kmitů a . Protože $\max_i |\lambda_i| \rightarrow \infty$ pro $a \rightarrow 1 + p$, použili jsme funkci $\arctg(x - 1)$ jako nelineární změnu měřítka, aby zůstaly hodnoty konečné. Na tomto obrázku lze vidět dvě plata, kde $\max_i |\lambda_i| = 1$, a mezi nimi kopec, kde $\max_i |\lambda_i| > 1$. Kopec odpovídá nestabilnímu řešení, kdy sebemenší počáteční odchylka s časem roste, zpočátku přibližně exponenciálně, protože jedno z vlastních čísel (označme je λ_1) leží vně jednotkového kruhu v komplexní rovině. Ta dvě plata odpovídají periodickému řešení, které je orbitálně stabilní s vlastními čísly $|\lambda_i| = 1$ pro $i = 1, \dots, 4$.



Obr. 3. Diskriminant D charakteristické rovnice matice $M(2\pi)$ jako funkce síly vnějšího pole p a amplitudy periodického řešení a . Toto je vhodná testovací funkce pro detekci hranice mezi stabilní a nestabilní oblastí. Vynesli jsme $atD = \arctg(D)$, aby byly hodnoty z rozumného intervalu.

Naším cílem je přesně určit hranici mezi plošinami odpovídajícími stabilnímu řešení a kopcem odpovídajícím nestabilnímu řešení. Tato hranice je křivka ve tvaru písmene V v rovině p - a . Tato křivka je grafem jisté funkce $a = |a_C(p)|$, kde $a_C(p)$ je funkce, kterou chceme určit. Pro pevné p je $|a_C|$ kritická hodnota (odtud index C) taková, že pro $|a| < |a_C|$ je periodické řešení stabilní a pro $|a| > |a_C|$ je toto řešení nestabilní. Vyšetřeme tuto funkci $a_C(p)$. Protože λ_i je sudou funkcí amplitudy a , lze volit znaménko funkce $a_C(p)$ tak, aby byla záporná pro malá p a kladná pro velká p , tedy aby byla funkce $a_C(p)$ hladká (viz obr. 4 a 6).

Podrobnou numerickou analýzou zjistíme, že když překročíme tuto hranici z oblasti stability do oblasti nestability, jedna dvojice vlastních čísel matice $M(2\pi)$ (označme je

$\lambda_{1,2}$) se změní takto: Nejdříve leží na jednotkové kružnici blízko bodu -1 . Při dosažení hranice jsou $\lambda_{1,2} = -1$ a za hranicí máme dvě různá reálná vlastní čísla, $\lambda_1 < -1$, $\lambda_2 > -1$.

Jak lze popsat hranici mezi stabilní a nestabilní oblastí? Při pohledu na obr. 2 se nabízí skutečnost, že se derivace $\max_i |\lambda_i|$ jako funkce parametru p při konstantní amplitudě a skokem změní (z nuly do nekonečna). Tato vlastnost je sice pravdivá, ale není vhodná pro zkoumání a hledání hranice. Mnohem užitečnější podmínku dostaneme, když si uvědomíme, že na hranici platí $\lambda_1 = \lambda_2$ a že kořeny kvadratické rovnice se rovnají právě tehdy, když je diskriminant rovnice nulový. Takže hranici lze popsat podmínkou

$$D(p, a) = 0, \tag{10}$$

kde

$$D = (M_{11} + M_{22})^2 - 4$$

je diskriminant charakteristické rovnice levého horního bloku $M(2\pi)$ (zde jsme využili, že determinant je roven 1, protože stopa matice f' je nulová). Rovnice hranice (10) je klíčovou rovnicí této práce. V dalším si ukážeme, jak lze tuto hranici spočítat s libovolnou přesností, jak ji lze přibližně vyjádřit explicitně a k jaké bifurkaci dochází při jejím překročení.

Diskriminant $D(p, a)$ jako funkce parametru p a amplitudy a je ukázán na obr. 3 (ve skutečnosti je zde vynesena hodnota $\arctg(D)$, aby byly výsledky z rozumného intervalu). Vyjádření hranice implicitní rovnicí (10) má dvě výhody proti naivnímu popisu založenému na pozorování obr.2. Jednak je funkce $D(p, a)$ hladká, což je výhodné pro numerické výpočty i pro analytické vyšetřování, a také implicitní rovnice dovolují popsat širší třídu křivek než podmínky v závislosti na jedné proměnné při konstantní druhé proměnné.

Graf funkce $a_C(p)$ protíná osu p někde mezi $p = 0,2$ a $p = 0,4$, viz obr. 2. Tento bod lze najít přesně. Pro $a = 0$ je

$$f'_{21} = \frac{1}{1+p} - 1 = -\frac{p}{1+p} = -q$$

nezávislé na čase t a variační rovnice

$$\dot{M} = f' \cdot M$$

s

$$f' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & 0 \end{pmatrix}$$

mají řešení

$$\begin{aligned} M(2\pi) &= \exp \left(2\pi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & 0 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \begin{pmatrix} \cos(2\pi\sqrt{q}) & \frac{1}{\sqrt{q}} \sin(2\pi\sqrt{q}) \\ -\sqrt{q} \sin(2\pi\sqrt{q}) & \cos(2\pi\sqrt{q}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pak diskriminant charakteristické rovnice je

$$D = (M_{11} + M_{22})^2 - 4 = (2 \cos(2\pi\sqrt{q}))^2 - 4 = -4 \sin^2 \left(2\pi\sqrt{\frac{p}{p+1}} \right)$$

a rovnice hranice

$$D(p, 0) = 0$$

má pro $p > 0$ jediné řešení

$$p_{res} = \frac{1}{3} \tag{11}$$

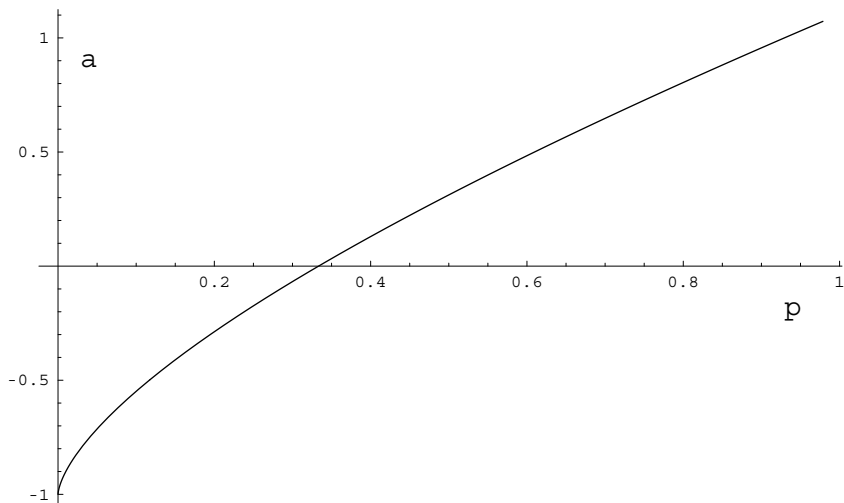
(res jako resonance) odpovídající hodnotě

$$q_{res} = \frac{1}{4}.$$

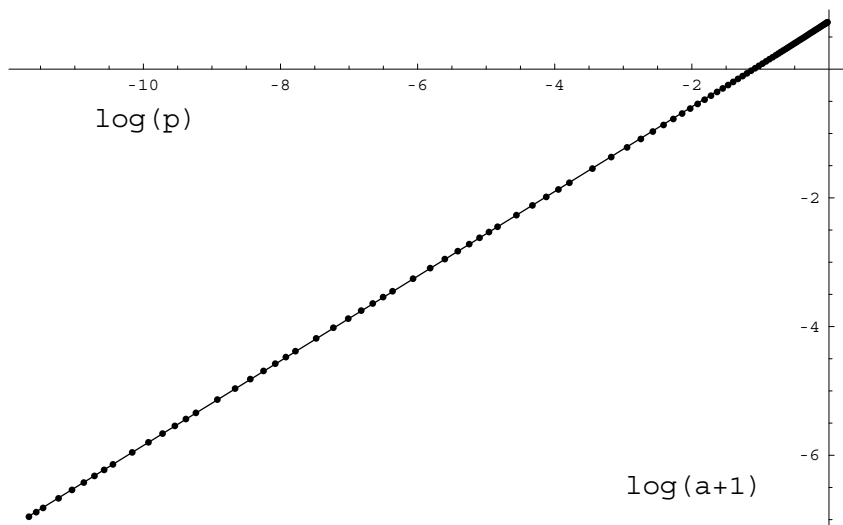
S užitím (2) to tedy znamená, že je-li poměr frekvencí

$$\frac{\Omega_P}{\Omega_S} = \frac{1}{2},$$

pak svislé kmity s libovolně malou amplitudou jsou nestabilní. Tento jev se nazývá resonance 1:2. Naproti tomu pro jiné hodnoty parametru p jsou svislé kmity s dostatečně malou amplitudou stabilní. Teprve při zvyšování amplitudy (při pevné hodnotě parametru p) dojde ke ztrátě stability. Ke změně stability může také dojít při pevné amplitudě a , měníme-li parametr p , nebo samozřejmě při současné změně p i a .



Obr. 4. Funkce udávající kritickou hodnotu $a_c(p)$ takovou, že svislé kmity s amplitudou a jsou stabilní při $|a| < |a_c(p)|$.



Obr. 5. Funkce $a_C(p)$ udávající kritickou hodnotu amplitudy jako v obr. 4 v log–log grafu (černé body) a přímka proložená těmito body metodou nejmenších čtverců. Odchylka bodů od přímky není okem vůbec patrná.

Podívejme se nyní, jak lze křivku danou rovnicí (10) spočítat s požadovanou přesností. K tomu lze s výhodou použít numerickou metodu zvanou kontinuační, např. [6]. Je to metoda typu prediktor – korektor, tedy metoda založená na kombinaci dvou kroků. V prvním kroku, zvaném predikce, předpovíme (odhadneme) další bod křivky na základě znalosti několika bodů křivky. V druhém kroku, zvaném korekce, upřesníme tento odhad. Metodu kontinuační lze obecně použít pro hledání řešení rovnice

$$F(\vec{x}) = 0,$$

kde $F : R^n \rightarrow R^{n-1}$, tedy pro řešení $n - 1$ nelineárních algebraických rovnic pro n neznámých. Řešením je, za poměrně obecných podmínek na funkci F , křivka v R^n . V našem případě rovnice (10) je $n = 2$.

Nejjednodušší prediktor, který ze dvou bodů křivky $\vec{x}_i, \vec{x}_{i-1} \in R^n$ předpoví další bod \vec{x}_P , je

$$\vec{x}_P = \vec{x}_i + (\vec{x}_i - \vec{x}_{i-1}).$$

Pro druhou část – korektor, která nám dá upřesněný nový bod \vec{x}_{i+1} , lze s výhodou použít Newtonovu metodu. Ta je vhodná pro řešení n rovnic pro n neznámých. Potřebujeme tedy přidat ještě jednu rovnici. Tou může být požadavek, aby korekce $\vec{x}_{i+1} - \vec{x}_P$ byla kolmá na predikci $\vec{x}_P - \vec{x}_i$, tedy

$$(\vec{x}_{i+1} - \vec{x}_P) \cdot (\vec{x}_P - \vec{x}_i) = 0.$$

Tento dvojkrok predikce – korekce opakujeme, a tak dostaneme posloupnost bodů, které dobře aproximují implicitně zadanou křivku. Při výpočtu je vhodné měnit délku kroku podle lokální složitosti problému. Tu lze odhadnout podle počtu iterací Newtonovy metody potřebného pro dosažení požadované přesnosti. Výhodou této metody

je, že korekci lze provést s libovolnou požadovanou přesností a že chyba z jednoho kroku se nešíří a neroste do dalších kroků (jako je tomu např. při numerickém řešení ODR). Dříve představoval kontinuační program desítky stránek zdrojového textu, např. v jazyku FORTRAN, a léta práce programátora. Dnes lze použitím moderních softwarových nástrojů, jako je např. počítačový algebraický systém *Mathematica*, napsat kontinuační program na jednu stránku.

Výsledek tohoto výpočtu je na obr. 4. Křivka protíná osu p v bodě $p = \frac{1}{3}$ v souladu s (11).

Explicitní tvar podmínky stability

Funkce $a_C(p)$ na obr.4 připomíná tvarem grafu odmocninu posunutou o 1 dolů. Abychom našli správný exponent, vyneseme $\log(a+1)$ proti $\log(p)$ v obr. 5 (plné černé body). Zdá se, že leží v přímce. Opravdu, když jimi proložíme přímkou a zakreslíme ji do stejného grafu, není odchylka vůbec okem pozorovatelná. Metoda nejmenších čtverců dá směrnici přímky v log-log grafu (a tedy exponent u proměnné p) přibližně $\frac{2}{3}$. Můžeme tedy aproximovat kritickou hodnotu $a_C(p)$ přibližnou (fitovanou) hodnotou $a_F(p)$ ve tvaru

$$a_C(p) \doteq a_F(p) = (cp)^{\frac{2}{3}} - 1,$$

kde konstantu c lze určit z podmínky, že křivka musí protínat osu p přesně v bodě $p = \frac{1}{3}$. To dá $c = 3$ a my můžeme formulovat tento závěr: Svislé kmity pružného kyvadla s relativní amplitudou a jsou stabilní pro

$$|a| < |a_C(p)|,$$

kde

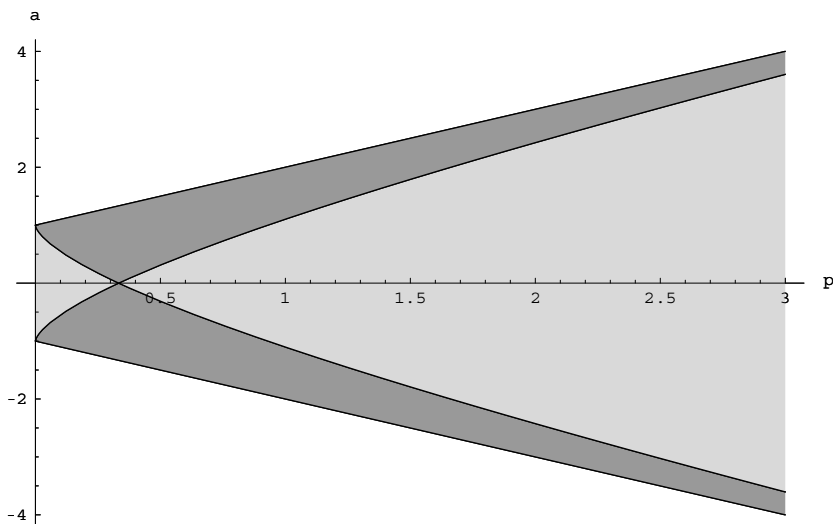
$$a_C(p) \doteq (3p)^{\frac{2}{3}} - 1 \tag{12}$$

s parametrem

$$p = \frac{(m_B + \frac{m_S}{2})g}{k\ell_0}.$$

Chyba této aproximace je menší než 0,005 pro $0 < p < 0,6$. Tato aproximace platí jen pro malá p .

Výhodou vztahu (12) je to, že jej lze užít nejen pro určení kritické hodnoty amplitudy a ze znalosti hodnoty parametru p , ale i obráceně: ze znalosti hodnoty amplitudy a lze určit interval (p_1, p_2) hodnot parametru p , ve kterém jsou svislé kmity nestabilní.



Obr. 6. Stabilní oblast (světle šedá) a nestabilní oblast (tmavě šedá) pro svislé kmity s amplitudou a a vnějším polem p pro $p > 0$ a $|a| < 1 + p$.

Obr. 6 ukazuje v rovině p - a oblast stability a oblast nestability.

Tedy, když umíme určit, kdy jsou svislé kmity stabilní a kdy nestabilní, se můžeme podrobně zabývat otázkou, jakým způsobem se stabilita ztratí a jaká nová řešení se při tom objeví.

Co nastává při ztrátě stability

Ilustrujme si nejprve použití podmínky (12) na jednoduchém příkladě. Zvolme si např. amplitudu $a = 0,1$ a hledejme nejmenší hodnotu parametru p , při které svislé kmity s touto amplitudou ztratí stabilitu. Dva kladné kořeny rovnice

$$|(3p)^{\frac{2}{3}} - 1| = 0,1$$

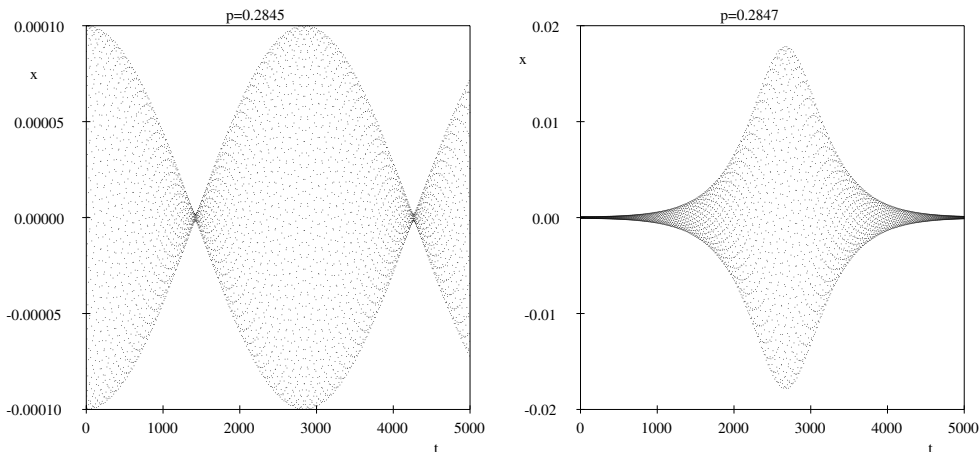
dají odhady pro dvě kritické hodnoty

$$p_1 \doteq 0,2846, \quad p_2 \doteq 0,3846.$$

Tedy svislé kmity s amplitudou $a = 0,1$ jsou stabilní pro $p < p_1 \doteq 0,2846$ a potom pro $p > p_2 \doteq 0,3846$. Co se stane, když p překročí kritickou hodnotu p_1 ?

Podívejme se na průběh $x(t)$ pro p těsně pod a těsně nad touto kritickou hodnotou. Obr. 7 vlevo ukazuje časový průběh x pro hodnotu parametru $p = 0,2845$ a počáteční podmínku $x(0) = 0,0001$, $\dot{x}(0) = 0$, $y(0) = -1 - p - a = -1,3845$, $\dot{y}(0) = 0$. Pohyb je quazi-periodický a $x(t)$ není v absolutní hodnotě nikdy větší než počáteční hodnota $x(0)$.

Malá změna parametru p způsobí jiný typ chování. Na obr. 7 vpravo jsou vyneseny stejné veličiny pro $p = 0,2847$ a počáteční podmínku $x(0) = 0,0001$, $\dot{x}(0) = 0$, $y(0) = -1 - p - a = -1,3847$, $\dot{y}(0) = 0$. Zde $x(t)$ roste zpočátku přibližně exponenciálně s časem a dosahuje amplitudy, která je více než o dva řády větší než počáteční hodnota.

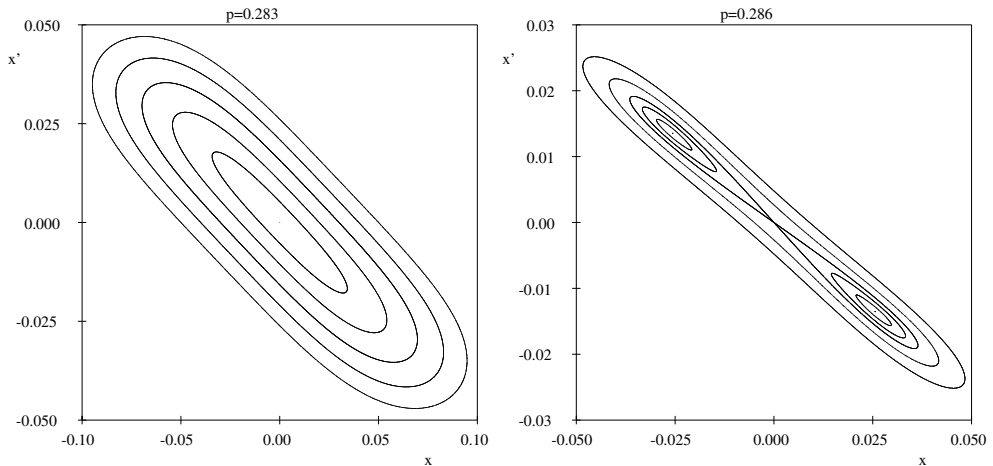


Obr. 7. Závislost boční výchylky x na čase t pro počáteční podmínky $x(0) = 0,0001$ a $\dot{x}(0) = 0$. Vlevo: pro podkritickou hodnotu parametru p jsou svislé kmity stabilní a boční výchylka nepřekročí $x(0)$. Vpravo: pro nadkritickou hodnotu parametru p jsou svislé kmity nestabilní a sebemenší odchylka roste zpočátku přibližně exponenciálně. Průběh $x(t)$ je vzorkován s krokem $\Delta t = 1$ a body nejsou spojené, aby nevznikl černý útvar.

Kvalitativní změna fázového portréту je dobře vidět na Poincarého řezu. Uvažujme ve fázovém prostoru $x-\dot{x}-y-\dot{y}$ nadrovinu $y = -1 - p$ obsahující dolní rovnovážný bod a sledujme průsečíky trajektorie s touto nadrovinou, při kterých závaží stoupá, tedy body, kde $y = -1 - p$ a $\dot{y} > 0$. Souboru těchto bodů se říká Poincarého řez. Je to užitečný nástroj, protože sníží dimenzi o jedničku. Průměty těchto bodů do roviny $x-\dot{x}$ jsou vyneseny na následujících dvou obrázcích. Na obr. 8 vlevo je vidět průmět Poincarého řezu do roviny $x-\dot{x}$ pro $a = 0,1$ a $p = 0,283$. Tyto parametry odpovídají stabilním svislým kmitům, které ve čtyřrozměrném fázovém prostoru představují uzavřenou křivku (elipsu), v Poincarého řezu představují jediný bod – v našem průmětu je to bod $(0, 0)$. Kolem tohoto bodu existuje jednoparametrická třída invariantních uzavřených křivek hustě pokrytých průsečíky trajektorie s nadrovinou. Pět z nich je zobrazeno na obr. 8 vlevo pro pět různých počátečních podmínek. Každá z těchto křivek odpovídá invariantnímu toru ve čtyřrozměrném fázovém prostoru. Trajektorie na takovém toru jej v typickém případě hustě pokryje. Ve zvláštním případě, když je rotační číslo racionální, je řešení periodické, trajektorie je uzavřená křivka a daný torus nepokryje; v Poincarého řezu pak dostaneme konečný počet bodů.

Když zvýšíme parametr p nad kritickou hodnotu $p_1 \doteq 0,2846$, svislé kmity ztratí stabilitu bifurkační zdvojení periody, tím vznikne nové periodické řešení s dvojnásobnou

periodou. Toto nové periodické řešení protne nadrovinu $y = -1 - p$ ve čtyřech bodech: ve dvou z nich je $\dot{y} > 0$ a v ostatních dvou je $\dot{y} < 0$. To je ukázáno na obr. 8 vpravo, kde vidíme Poincarého řez pro super-kritickou hodnotu parametru $p = 0,286$ a pro pět různých počátečních podmínek $(x(0), \dot{x}(0))$, totiž: $(0,009; 0)$, $(0,005; 0)$, $(0,00001; 0)$, $(0,0146; -0,00804)$, $(0,0208; -0,0112)$. Tento obrázek je důležitý a zaslouží si podrobnější rozbor.



Obr. 8. Poincarého řez trajektorie nadrovinou $y = -1 - p$. Vlevo: stabilní režim. Svislé kmity dají jediný bod $(x, \dot{x}) = (0, 0)$. Kolem tohoto periodického řešení (uzavřená křivka ve fázovém prostoru) existuje jednoparametrická třída kvaziperiodických řešení (invariantních torů ve fázovém prostoru). Ty odpovídají v Poincarého řezu jednoparametrické třídě invariantních uzavřených křivek. Pět z nich je zobrazeno. Vpravo: nestabilní režim pro nadkritickou hodnotu parametru $p = 0,286$. Počátek ztratil stabilitu bifurkací zdvojení periody a vznikla osmička – homoklinická orbita.

Z počátku $(0, 0)$ vychází křivka ve tvaru osmičky. Ta odpovídá homoklinické orbitě. Tato osmička má dvě smyčky. Uvnitř každé smyčky se nachází bod reprezentující nové periodické řešení. Tento bod je obklopen jednoparametrickou třídou uzavřených křivek odpovídajících invariantním torům, které vznikly při bifurkaci. Vně této osmičky je jednoparametrická třída uzavřených křivek, které odpovídají invariantním torům, které přežily bifurkaci. Spočteme-li vlastní čísla λ_i a odpovídající vlastní vektory v_i matice M , dostaneme $\lambda_1 \doteq -1,04651$, $\lambda_2 \doteq -0,955555$ (zbývající dvě vlastní čísla jsou rovna jedné) a jim odpovídající vlastní vektory $v_1 \doteq (1; -0,664373; 0; 0)$, $v_2 \doteq (1; -0,425928; 0; 0)$. Tyto dva vlastní vektory (jejich průměty do roviny $x-\dot{x}$) jsou tečné k osmičce v počátku na obr. 8 vpravo. Vlastní vektor v_1 (s vlastním číslem vně jednotkového kruhu) určuje nestabilní směr (je tečný k nestabilní varietě) a podobně ten druhý určuje stabilní směr.

Jak tedy vypadá typické chování pružného kyvadla v nestabilní oblasti? Předpokládejme, že závaží mírně vychýlíme z dolní rovnovážné polohy směrem dolů nebo nahoru. Pečlivě se snažíme, aby výchylka do strany byla co nejmenší. Přesto nebude přesně nulová. Kyvadlo nejprve koná svislé kmity. Trajektorie protíná nadrovinu $y = -1 - p$ v bodech blízkých počátku. Tyto body se ale od počátku vzdalují (zpočátku přibližně exponenciálně, dáno vlastním číslem λ_1) ve směru daném vektorem v_1 . Toto vzdalování probíhá tak, že se znaménka x (a také \dot{x}) střídají, tedy že body po sobě v čase následující na Poincarého řezu leží v opačných směrech od počátku. Na obr. 8 vpravo dostaneme posloupnost bodů, které leží blízko osmičky. Jak se body vzdalují od počátku, energie svislých kmitů se částečně přelévá v energii pravo–levých kyvů. Po konečné době vzdálenost těchto bodů od počátku nabude maxima a dále se body začnou k počátku opět přibližovat, stále v těsné blízkosti osmičky. Pravo–levé kyvy ustávají a energie se opět přelévá zpět do svislých kmitů. Tak se body dostanou až do těsné blízkosti k počátku, k němu se blíží ve směru daném vektorem v_2 a opět přibližně exponenciálně (dáno vlastním číslem λ_2). V okolí počátku mohou setrvat i poměrně dlouho, po konečné době se však opět začnou vzdalovat a děj se kvaziperiodicky opakuje.

Jestliže jsme při výběru počáteční podmínky méně pečliví, tedy pokud počáteční bod leží dále od počátku a dále od osmičky, tak se body na Poincarého řezu nedostávají tak blízko počátku a závaží koná stále pohyb jak ve svislém, tak i v bočním směru, v typickém případě jde o kvaziperiodický pohyb po toru. Zvláštním případem je stabilní periodické řešení, které odpovídá v Poincarého řezu bodu, který leží uvnitř všech těch malinkých uzavřených křivek ve smyčce osmičky.

Pro úplnost se musíme zmínit ještě o jednom, experimentálně neuskutečnitelném, ale z teoretického hlediska velice zajímavém řešení. Pokud počáteční podmínky odpovídají bodu, který leží přesně na osmičce, pak i všechny ostatní body této orbity leží na osmičce. Po případném maximu vzdálenosti od počátku se dále body monotónně blíží k počátku ve směru daném vektorem v_2 . Osmička sama je invariantní množina v Poincarého řezu. A tak jako invariantní kružnice v Poincarého řezu odpovídá invariantnímu toru ve čtyřrozměrném fázovém prostoru, tak invariantní osmička odpovídá tzv. přiskřípnutému invariantnímu toru (anglicky *pinched torus*), viz monodromie. Jak jsme již předeslali, toto chování je experimentálně neuskutečnitelné, protože sebemenší odchylka od osmičky způsobí, že se k počátku budeme blížit jen konečnou dobu, a pak se opět začneme vzdalovat. Počátek je tedy z dynamického hlediska sedlo.

Z experimentálního pohledu je ještě zajímavé, že pokud uvažujeme posloupnost počátečních podmínek stále se blížících k počátku, tak doba mezi dvěma maximy vzdálenosti od počátku roste do nekonečna. A také poměr maximální a minimální boční výchylky roste do nekonečna, i když maximální výchylka je omezená, ale minimální odchylka se blíží k nule.

Rovněž považuji za důležité zdůraznit, že maximum vzdálenosti od počátku (a s tím související maximální boční výchylka) je spojitou, i když ne hladkou funkcí parametru p . Podrobnější rozbor této otázky bude předmětem další publikace.

Prostorový případ

Dosud jsme uvažovali pohyb závaží pouze v jedné pevné svislé rovině. Podívejme se nyní stručně, co se změní, pokud dovolíme pohyb v třírozměrném prostoru. Je-li potenciál invariantní vůči otočení okolo osy z , což je náš případ, pak se z -složka L_z momentu hybnosti v čase zachová konstantní a je dána počáteční podmínkou. Pokud bude $L_z = 0$, pohybuje se závaží ve svislé rovině. Pokud bude L_z nenulové, dostaneme obdobu druhého Keplerova zákona: plošná rychlost průmětu průvodiče závaží do vodorovné roviny bude konstantní.

Matice M (řešení variačních rovnic) nebude 4×4 , ale 6×6 . Opět se rozpadne na bloky 2×2 tak, že pravý dolní blok zůstane zachován a původní horní levý blok se vyskytne dvakrát. Ke ztrátě stability dochází, když vlastní čísla levého horního bloku opustí jednotkový kruh. Protože nový blok 2×2 je roven původnímu hornímu levému bloku, jeho vlastní čísla opustí jednotkový kruh pro přesně stejné hodnoty parametru.

Můžeme tedy konstatovat, že podmínka stability se rozšířením na třírozměrný prostor nezmění. To ale neznamená, že by nový systém neměl nové typy chování. Jako nejjednodušší ukázkou nového řešení lze uvést pohyb závaží po vodorovné kružnici se stálou úhlovou rychlostí.

Model není skutečnost

Je nutné připomenout, že pružné kyvadlo je zde zkoumáno tak, že jsme je za jistých zjednodušujících předpokladů popsali soustavou obyčejných diferenciálních rovnic, tedy jistým modelem, a dále jsme pečlivě vyšetřovali tento model. Nelze však ztotožňovat model se skutečností. Mezi ony zjednodušující předpoklady patří zejména zanedbání ztrát energie třením a použití kvadratické funkce pro vyjádření energie pružnosti.

Při uvažování ztrát energie dostaneme systém, který se pro skoro všechny počáteční podmínky blíží k jedinému stabilnímu rovnovážnému stavu. Pro dosažení neutuchajících řešení by bylo nutné dodávat systému energii.

Energii pružnosti lze popsat kvadratickou funkcí pouze přibližně a pouze v jistém rozsahu výchylek. V případě pružného kyvadla s kovovou pružinou dochází k rychlému nárůstu energie, a tedy i síly, jak při rostoucí výchylce od počátku, kdy se pružina natáhne téměř do rovného drátu, tak při rostoucí výchylce směrem k počátku, kdy se pružina smrští do pevného válce, když se její závity dotknou. V případě pružného kyvadla realizovaného mikroskopickým systémem, by bylo možné uvažovat např. Lennard-Jonesův potenciál, kdy síla také rychle roste v blízkosti počátku, ale naopak klesá k nule pro velké vzdálenosti. Další zajímavou možností by bylo uvažovat kvantový systém s potenciálem pružného kyvadla. Těmito otázkami se budeme podrobněji zabývat v navazujících publikacích.

Závěr

Pružné kyvadlo je fyzikální systém bohatě diskutovaný v odborné literatuře, dovoluje nenákladné experimentální zkoumání a jeho chování zahrnuje širokou škálu dynamických režimů.

Systém lze popsat soustavou nelineárních obyčejných diferenciálních rovnic. Vzhledem k jejich nelinearitě nedovolují napsat řešení v analytickém tvaru.

V literatuře se tento systém obvykle zkoumá za podmínky malých amplitud a pro parametry blízké k rezonanci 1:2. Cílem této práce bylo ukázat obecnější přístup z pohledu teorie nelineárních dynamických modelů. Kombinací analytických a numerických metod se podařilo odvodit přesnou podmínku stability svislých kmitů pro malé i velké amplitudy a pro široký rozsah hodnot parametru. Dále jsme ukázali, jak lze nalézt hranici mezi stabilní a nestabilní oblastí s libovolnou přesností a jak lze tuto podmínku stability vyjádřit přibližným explicitním vztahem vhodným pro praktické použití v experimentální praxi. Ilustrovali jsme chování pružného kyvadla těsně před a těsně za změnou stability. K této ztrátě stability dochází bifurkací zdvojení periody, kdy jedna dvojice vlastních čísel opustí jednotkovou kružnici v bodě -1 .

Tato práce je podporována projektem MSM 6046137306 a vznikla díky přístupu k výpočetním zdrojům METACentrum v rámci MSM 6383917201.

L i t e r a t u r a

- [1] DVOŘÁK, L.: *Pružné kyvadlo: od teoretické mechaniky k pokusům a zase zpátky*. PMFA 51 (2006), 312–327.
- [2] HAVRÁNEK, A., ČERTÍK, O.: *Pružné kyvadlo*. PMFA 51 (2006), 198–216.
- [3] HIRSCH, M. W., SMALE, S., DEVANEY, R. L.: *Differential Equations, Dynamical Systems and an Introduction to Chaos*. Elsevier, 2004.
- [4] <http://mathsci.ucd.ie/~plynch/>
- [5] POKORNÝ, P.: *Stability Condition for Vertical Oscillation of 3-dim Heavy Spring Elastic Pendulum*. Regular and Chaotic Dynamics 13 (2008), 155–165.
- [6] SEYDEL, R.: *Tutorial on Continuation*. Int. J. Bif. Chaos 1 (1991), 3–11.
- [7] VITT, A., GORELIK, G.: *Oscillations of an Elastic Pendulum as an Example of the Oscillations of Two Parametrically Coupled Linear Systems*. J. of Technical Physics, 3 (1933), 294–307.