Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Ján Andres

Šarkovského věta a diferenciální rovnice. II

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 56 (2011), No. 2, 143–149

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/141710`

Šarkovského věta a diferenciální rovnice, II

Jan Andres, Olomouc

Článek je pokračováním stejnojmenného příspěvku [1] z roku 2004. V něm byla uvedena varianta slavné Šarkovského věty [19] aplikovatelná na skalární diferenciální rovnice. Nové výsledky umožňují zformulovat věty Šarkovského typu, které lze aplikovat na diferenciální rovnice, a to i bez ohledu na Šarkovského uspořádání přirozených čísel. Cílem našeho příspěvku je zejména vyslovení těchto nových vět a vysvětlení, proč je třída dříve zkoumaných mnohoznačných funkcí příliš široká z hlediska aplikací na diferenciální rovnice a inkluze.

1. **Úvod** (stručná rekapitulace z [1])

Šarkovského věta [19] je založena na novém (tzv. *Šarkovského*) *uspořádání přirozených čísel:*

$$3 \rhd 5 \rhd 7 \rhd 9 \rhd \cdots \rhd 2\cdot 3 \rhd 2\cdot 5 \rhd 2\cdot 7 \rhd 2\cdot 9 \rhd \cdots \rhd 2^2\cdot 3 \rhd 2^2\cdot 5 \rhd 2^2\cdot 7 \rhd 2^2\cdot 9 \rhd \cdots$$
$$\cdots \rhd 2^n\cdot 3 \rhd 2^n\cdot 5 \rhd 2^n\cdot 7 \rhd 2^n\cdot 9 \rhd \cdots \rhd 2^n \rhd \cdots \rhd 2^2 \rhd 2 \rhd 1.$$

Zatímco $1 = 2^0$ je i zde nejmenší, existuje – na rozdíl od běžného uspořádání – největší konečné číslo 3. Množinu přirozených čísel označme standardním symbolem $\mathbb{N}$.

Nechť $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ značí množinu reálných čísel a nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce, tj. $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Definice 1. Řekneme, že číslo $a \in \mathbb{R}$ určuje *primární m-orbitu $\mathcal{O}$* vzhledem k f, jestliže $\mathcal{O} = \big\{a, f(a), \ldots, f^{m-1}(a)\big\}$, kde

$$f^m(a) = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{m\text{-krát}}(a) = \underbrace{f(f(\ldots f(a)\ldots))}_{m\text{-krát}}(a) = a.$$

Výrazem primární zdůrazňujeme vzájemnou odlišnost prvků tvořících orbitu $\mathcal{O}$.

Věta 1 (A. N. Šarkovskij, 1964). *Jestliže existuje přirozené číslo $m > 1$ takové, že funkce $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ má primární m-orbitu, pak pro každé $k \in \mathbb{N}$ s vlastností $m \rhd k$ existuje i primární k-orbita vzhledem k f.*

Nevědomi si věty 1, dokázali autoři článku [13] nezávisle její nejdůležitější speciální případ.

Prof. RNDr. dr hab. Jan Andres, DSc. (1954), katedra matematické analýzy a aplikací matematiky, PřF UP, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc, e-mail: `jan.andres@upol.cz`

Korolár 1 (T.-Y. Li, J. A. Yorke, 1975). *Má-li funkce $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ primární 3-orbitu, pak má rovněž primární k-orbity pro všechna $k \in \mathbb{N}$.*

Uvažujme nyní obyčejnou skalární diferenciální rovnici 1. řádu

$$x' = F(t, x), \qquad \text{kde } F(t, x) \equiv F(t+1, x). \tag{1}$$

Pro jednoduchost všude předpokládejme, že $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce, tj. $F \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, která je lineárně omezená v proměnné x, tj. existují nezáporné konstanty α, β takové, že $|F(t,x)| \leqq \alpha + \beta|x|$ pro všechna $(t,x) \in \mathbb{R}^2$. Dále na chvíli předpokládejme, že F splňuje (globálně) nějakou podmínku jednoznačnosti (např. Lipschitzovu, Osgoodovu, Nagumovu, Kamkeho, Kibenkovu nebo Borůvkovu).

Poněvadž jednoznačnost implikuje spojitou závislost řešení na počátečních podmínkách, a tím i totální spojitost tzv. *Poincarého translačního operátoru* $T_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, podél trajektorií rovnice (1), kde (viz např. [7])

$$T_n(x_0) := \{x(n, x_0) : x(\,\cdot\,, x_0) \text{ je řešením (1), přičemž } x(0, x_0) = x_0\}, \tag{2}$$

svádí aplikovat větu 1 prostřednictvím operátoru T_n na rovnici (1). Operátor T_n definovaný výrazem (2) je však ryze rostoucí (jinak by došlo ke sporu s předpokládanou jednoznačností), což evidentně vylučuje existenci primárních k-orbit vzhledem k T_n, a to pro jakékoliv $k > 1$. I když tedy $T_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ představuje pro každé pevně zvolené $n \in \mathbb{N}$ dokonce homeomorfismus s vlastností $T_n^m = T_{nm}$, $m \in \mathbb{N}$, vzhledem ke zřejmé vzájemné jednoznačné korespondenci mezi m-periodickými řešeními rovnice (1) (tj. hladkými funkcemi $x(t) \equiv x(t+m)$ splňujícími rovnici (1), přičemž $x(t) \not\equiv x(t+j)$, kde $j \in \{1, \dots, m-1\}$), a primárními m-orbitami vzhledem k T_1 ($n = 1$), nelze větu 1 na rovnici (1) aplikovat.

V případě nejednoznačnosti (což podle „generického" výsledku W. Orlicze z r. 1932 může nastat jen ve výjimečných případech) se operátor T_n definovaný vztahem (2) stává mnohoznačným zobrazením, což zapisujeme jako $T_n : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}} \setminus \{\emptyset\}$. Víme (viz např. [7]), že T_n je shora polospojitý, tj. takový, že pro každou otevřenou podmnožinu $U \subset \mathbb{R}$ je množina $\{x \in \mathbb{R} :\ \varphi(x) \subset U\}$ otevřená. Znamená to rovněž uzavřenost jeho grafu Γ_{T_n}, kde

$$\Gamma_{T_n} := \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in \mathbb{R},\ y \in T_n(x)\big\}\,.$$

Pro každé $x \in \mathbb{R}$ je navíc množina hodnot $\{T_n(x)\}$ buď jednobodová nebo kompaktní interval. Zobrazení s těmito vlastnostmi jsme nazvali v [1] *M-zobrazeními.*

Definice 2. Řekneme, že $\mathcal{O}$ je *m-orbitou* mnohoznačného zobrazení $\varphi : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}} \setminus \{\emptyset\}$, jestliže $\mathcal{O} = \{a_1, \dots, a_m\}$ představuje posloupnost bodů $a_i \in \mathbb{R}$ takových, že $a_{i+1} \in \varphi(a_i)$, $i = 1, \dots, m$, přičemž $a_1 = a_{m+1}$, a současně, že $\mathcal{O}$ nelze zkonstruovat p-násobným zřetězením kratších r-orbit, kde $pr = m$. Jestliže body a_i, $i = 1, 2, \dots, m$, generující m-orbitu $\mathcal{O}$ jsou navíc vzájemně různé, pak hovoříme o *primární m-orbitě.*

Vzniká přirozená otázka, zda lze vyslovit analogii věty 1 pro M-zobrazení v termínech m-orbit z definice 2. Odpověď na ni dává následující věta.

Věta 2 ([10]). *Nechť M-zobrazení $\varphi : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}} \setminus \{\emptyset\}$ má m-orbitu, $m \in \mathbb{N}$. Potom má φ, s nejvýše dvěma výjimkami, i k-orbitu, a to pro každé $k \in \mathbb{N}$ s vlastností $m \triangleright k$.*

Poznámka 1. Zmíněné případné výjimky (doložené příklady) lze vždy konkrétně specifikovat (viz např. [10]). Např. má-li M-zobrazení 3-orbitu, pak má i k-orbitu pro každé $k \in \mathbb{N} \setminus \{2\}$ nebo $k \in \mathbb{N} \setminus \{4, 6\}$, přičemž může nastat jen jedna z uvedených možností.

Větu 2 lze aplikovat např. na nejednoznačně řešitelnou rovnici (1) prostřednictvím mnohoznačných Poincarého translačních operátorů podél řešení (1), a to následovně:

Věta 3 ([10]). *Má-li rovnice (1) m-periodické řešení pro přirozené $m > 1$, pak má, s nejvýše dvěma výjimkami, také k-periodické řešení, a to pro všechna $k \in \mathbb{N}$ s vlastností $m \triangleright k$. Případné výjimky jsou determinovány výjimkami pro odpovídající Poincarého translační operátory podél trajektorií rovnice (1) jako ve větě 2.*

Věta 2 a věta 3 představují hlavní výsledky prezentované v článcích [1], [10].

2. Nová situace pro diferenciální rovnice a inkluze

Těmto výsledkům předcházela série našich prací [3], [8], [9]. Následovala i zobecnění v různých směrech (viz [11], [12]) a rozšíření na další typy zobrazení (viz [2], [5]). Např. v článku [5] byla zformována bezvýjimečná analogie věty 1 pro zdola polospojitá mnohoznačná zobrazení, tj. taková zobrazení $\varphi : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}} \setminus \{\emptyset\}$, že pro každou uzavřenou podmnožinu $U \subset \mathbb{R}$ je množina $\{x \in \mathbb{R} : \ \varphi(x) \subset U\}$ uzavřená (viz [7]). Vzhledem k doloženým protipříkladům pro M-zobrazení vedoucím ke zmíněným výjimkám ve větě 2 se nicméně zdálo, že ani větu 3 již nelze vylepšit. Následující tvrzení F. Obersnela a P. Omariho v [15] proto bylo z našeho pohledu dosti překvapivé.

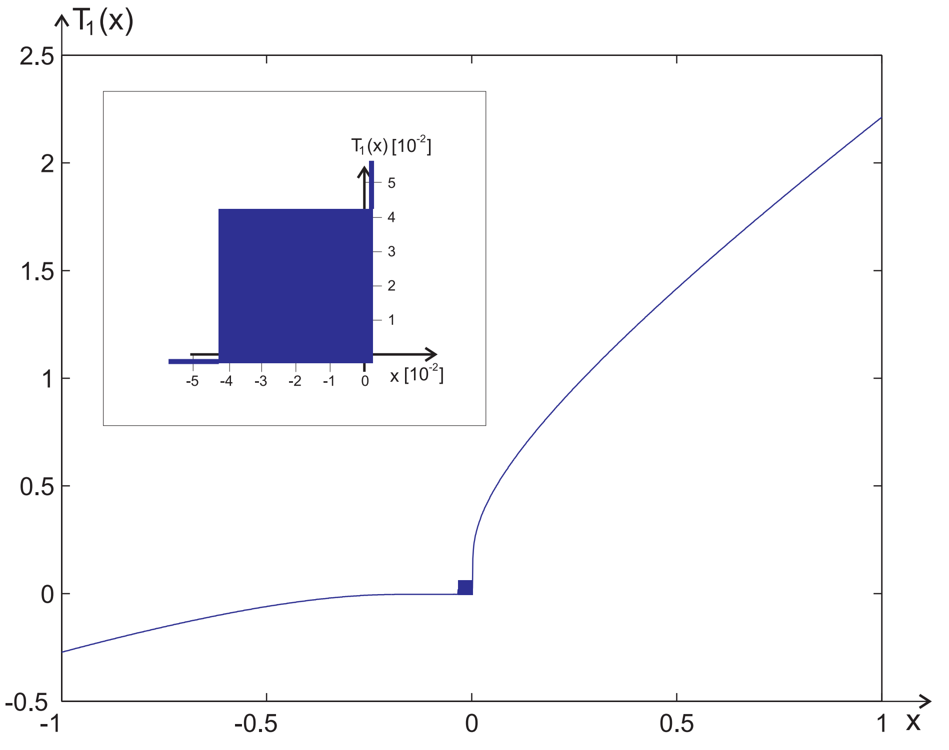
Věta 4 ([15]). *Existuje-li přirozené číslo $m > 1$ takové, že rovnice (1) má m-periodické řešení, pak pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje rovněž k-periodické řešení.*

Poznámka 2. Věta 4 je v článku [15] zformulovaná dokonce pro carathéodoryovské pravé strany F v (1). Pro její důkaz autoři použili techniku horních a dolních řešení. Není ale ani problém zformulovat analogii věty 3, při užití stejných důkazových prostředků jako v [10], pro diferenciální inkluze se shora carathéodoryovskými pravými stranami (definici lze nalézt např. v [7]). Tyto věty se však zásadně liší v tom, že na rozdíl od věty 3 (i) věta 4 nepočítá s výjimkami a (ii) neuplatňuje se u ní Šarkovského uspořádání. Např. existence 2-periodického řešení tak implikuje existenci k-periodických řešení rovnice (1) pro každé $k \in \mathbb{N}$.

Příklad 1. Příkladem rovnice mající pro každé $k \in \mathbb{N}$ k-periodické řešení je (viz [14])

$$x' = \sqrt{|x|} - \frac{1}{8\pi}|\arcsin(\sin \pi t)|. \tag{3}$$

Odpovídající Poincarého translační operátor T_1 podél trajektorií rovnice (3) je znázorněn na obr. 1 (viz [4], [6]).

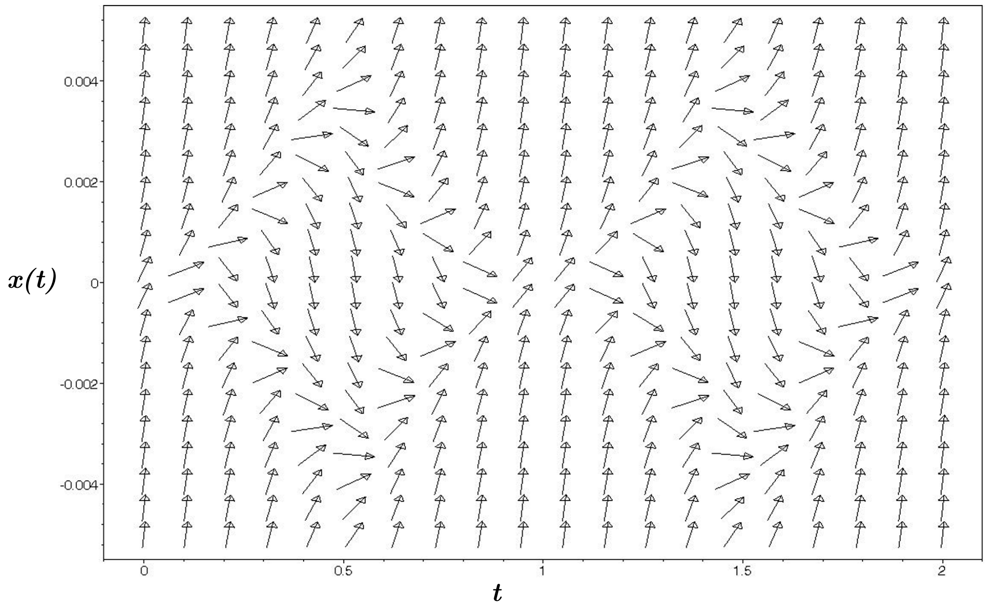


Obr. 1. Poincarého operátor T_1 pro rovnici (3).

Je zřejmé, že vše důležité se odehrává ve zvětšeném čtverci okolo počátku souřadnic (viz obr. 2 a obr. 3).

Poznámka 3. V současnosti existují čtyři alternativní důkazy věty 4. Kromě již zmíněného důkazu pomocí horních a dolních funkcí v [15] se stejnou větou zabývají ještě práce [4], [6], [17], [18]. V [4], [6] je důkaz proveden opět prostřednictvím mnohoznačných Poincarého translačních operátorů. Odpovídající větu pro mnohoznačná zobrazení, o niž se opírá náš důkaz, uvedeme v následující kapitole. V [17] je důkaz proveden v rámci teorie dynamických systémů. Konečně v [18] je důkaz založen na elementární geometrické analýze.

Poznámka 4. V pracích [6], [16] je věta 4 zobecněna i pro diferenciální inkluze se shora carathéodoryovskými pravými stranami (definici lze nalézt např. v [7]). Na rozdíl od rovnic u inkluzí nastává častá koexistence k-periodických řešení pro všechna $k \in \mathbb{N}$ (viz příklady v [6]).



Obr. 2. Směrové pole pro rovnici (3).

3. Věta Šarkovského typu bez Šarkovského uspořádání

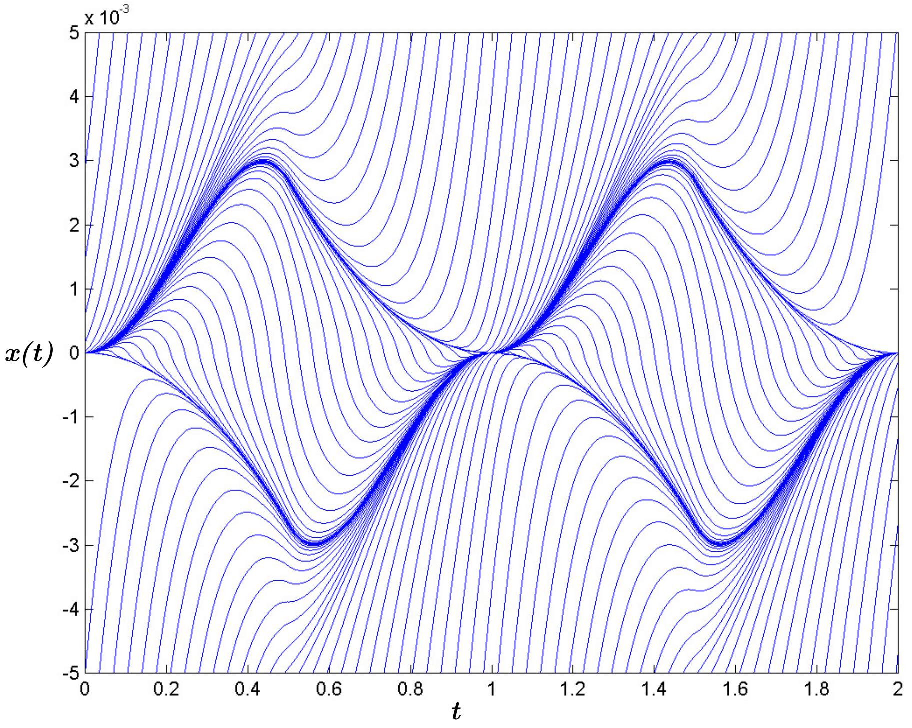
Zobrazení T_1 na obr. 1 není sice monotónní mnohoznačnou funkcí (definici lze nalézt např. v [6]), ale její horní a dolní „okraje" jsou (byť nespojité) monotónní jednoznačné funkce. Pro třídu mnohoznačných funkcí s touto vlastností můžeme vyslovit následující větu. Připomeňme, že mnohoznačné zobrazení $\varphi : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}} \setminus \{\emptyset\}$ má *monotónní okraje*, jestliže jednoznačná zobrazení („okraje") $\varphi^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ a $\varphi_* : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, kde

$$\varphi^*(x) := \sup\{y : \; y \in \varphi(x)\}, \qquad \varphi_*(x) := \inf\{y : \; y \in \varphi(x)\},$$

jsou obě buď neklesající (jako na obr. 1) nebo obě nerostoucí (viz [4], [6]).

Věta 5 ([4], [6]). *Nechť $\varphi : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}} \setminus \{\emptyset\}$ je mnohoznačné zobrazení s neprázdnými a souvislými množinami hodnot, jehož okraje jsou monotónní. Existuje-li přirozené číslo $m > 1$ takové, že φ má m-orbitu, pak má i primární k-orbitu, a to pro každé $k \in \mathbb{N}$.*

Poznámka 5. Podobně jako věta 4, kterou lze snadno dokázat pomocí věty 5 prostřednictvím Poincarého translačních operátorů podél trajektorií rovnice (1) (viz [4], [6]), platí věta 5 bezvýjimečně a nezávisí na Šarkovského uspořádání přirozených čísel. Třída M-zobrazení je proto pro Poincarého translační operátory podél trajektorií skalárních diferenciálních rovnic a inkluzí příliš široká. Na druhé straně zobrazení s monotónními okraji ve větě 5 nemusí být nutně polospojitá ani shora (tj. M-zobrazení) ani zdola.



Obr. 3. Část trajektorií rovnice (3). [Autor obr.: Jakub Šolc.]

Poznámka 6. Větu 5 lze dokonce zesílit v tom smyslu, že „okraje“ mnohoznačné funkce φ mohou být monotónní jen na husté podmnožině množiny reálných čísel $\mathbb{R}$ (viz [6, věta 4.1]). Navíc lze vyslovit i „náhodné“ verze věty 4 a věty 5 pomocí výsledků v [2] (viz [6]).

4. Závěrečné poznámky

Ověření podmínek jednoznačnosti, resp. nejednoznačnosti, u obyčejných diferenciálních rovnic může být někdy obtížné. Má-li přitom skalární rovnice (1) m-periodické řešení alespoň pro jedno přirozené číslo $m > 1$, pak je zřejmé, že rovnice (1) nemůže být jednoznačně řešitelná. Toto kritérium plyne ihned z již připomenuté ryzí monotónnosti Poincarého operátoru podél trajektorií jednoznačně řešitelné rovnice (1). Navíc podle věty 4 koexistují v takovém případě k-periodická řešení pro všechna $k \in \mathbb{N}$.

Tato skutečnost vedla – podle našeho názoru poněkud předčasně – autory článku [15] k názvu „Perioda dvě implikuje chaos pro třídu ODR“ imitujícího známý název práce [13]. Článek [15] totiž neobsahuje žádnou informaci, o jaký chaos se jedná, natož důkaz existence chaotického chování. Na druhé straně autorka článku [17], vědoma si zřejmě tohoto nedostatku, prokázala chaotické chování v nejrůznějších smyslech (např. Devaneyho, Li–Yorka, atd.) užitím tzv. Bebutovových toků.

Poněvadž z předpokladů věty 5 plyne existence množiny jako je čtverec na obr. 1, která je podmnožinou grafu Γ_φ funkce φ, lze nalézt bezpočet jednoznačných spojitých selekcí z odpovídající části funkce φ, jejichž graf je podmnožinou dané množiny. Mezi těmito selekcemi lze zřejmě vždy zvolit takovou, která vykazuje chaotické chování (např. stanové zobrazení). Jinými slovy: předpoklady věty 5 umožňují nalézt interval $I \subset \mathbb{R}$ a na něm jednoznačnou spojitou chaotickou selekci $s \subset \varphi|_I$ z $\varphi|_I$, vůči níž je interval I invariantní, tj. $s : I \to I$. Domníváme se, že tato argumentace založená na užití Poincarého translačních operátorů umožňuje snadnější náhled na chaotické chování determinované skalárními diferenciálními rovnicemi a inkluzemi.

L i t e r a t u r a

[1] Andres, J.: *Šarkovského věta a diferenciální rovnice.* PMFA *49* (2004), 151–159.

[2] Andres, J.: *Randomization of Sharkovskii-type theorems.* Proc. Amer. Math. Soc. *136* (2008), 1385–1395; Erratum: Proc. Amer. Math. Soc. *136* (2008), 3733–3734.

[3] Andres, J., Fišer, J., Jüttner, L.: *On a multivalued version of the Sharkovskii theorem and its application to differential inclusions.* Set-Valued Anal. *10* (2002), 1–14.

[4] Andres, J., Fürst, T., Pastor, K.: *Period two implies all periods for a class of ODEs: a multivalued map approach.* Proc. Amer. Math. Soc. *135* (2007), 3187–3191.

[5] Andres, J., Fürst, T., Pastor, K.: *Full analogy of Sharkovskii's theorem for lower semicontinuous maps.* J. Math. Anal. Appl. *340* (2008), 1132–1144.

[6] Andres, J., Fürst, T., Pastor, K.: *Sharkovskii's theorem, differential inclusions, and beyond.* Topol. Meth. Nonlin. Anal. *33* (2009), 149–168.

[7] Andres, J., Górniewicz, L.: *Topological Fixed Point Principles for Boundary Value Problems.* Kluwer, Dordrecht, 2003.

[8] Andres, J., Jüttner, L., Pastor, K.: *On a multivalued version of the Sharkovskii theorem and its application to differential inclusions II.* Set-Valued Anal. *13* (2005), 47–68.

[9] Andres, J., Pastor, K.: *On a multivalued version of the Sharkovskii theorem and its application to differential inclusions, III.* Topol. Meth. Nonlin. Anal. *22* (2003), 369–386.

[10] Andres, J., Pastor, K.: *A version of Sharkovskii's theorem for differential equations.* Proceed. Amer. Math. Soc. *133* (2005), 449–453.

[11] Andres, J., Pastor, K., Šnyrychová, P.: *A multivalued version of Sharkovskii's theorem holds with at most two exceptions.* J. Fixed Point Th. Appl. *2* (2007), 153–170.

[12] Andres, J., Šnyrychová, P., Szuca, P.: *Sharkovskii's theorem for connectivity G_δ-relations.* Int. J. Bifurc. Chaos *16* (2006), 2377–2393.

[13] Li, T.-Y., Yorke, J.: *Period three implies chaos.* Amer. Math. Monthly *82* (1975), 985–992.

[14] Obersnel, F., Omari, P.: *Old and new results for first order periodic ODEs without uniqueness: a comprehersive study by lower and upper solutions.* Adv. Nonlin. Stud. *4* (2004), 323–376.

[15] Obersnel, F., Omari, P.: *Period two implies chaos for a class of ODEs.* Proc. Amer. Math. Soc. *135* (2007), 2055–2058.

[16] Obersnel, F., Omari, P.: *Period two implies any period for a class of differential inclusions.* Quaderni Matematici Univ. Trieste *575* (2006), 1–3.

[17] Pireddu, M.: *Period two implies chaos for a class of ODEs: a dynamical system approach.* Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste *41* (2009), 43–54.

[18] Sędziwy, S.: *Periodic solutions of scalar differential equations without uniqueness.* Boll. Unione Mat. Ital. *2* (2009), 445–448.

[19] Šarkovskij, A. N.: *Sosuščestvovanije ciklov nepreryvnogo otobraženija prjamoj v sebja.* Ukrain. Matem. Žurn. *1* (1964), 61–71.