Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Světlana Tomiczková

Minkowského množinové operace a jejich aplikace

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 52 (2007), No. 4, 311–322

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/141371`

Minkowského množinové operace a jejich aplikace

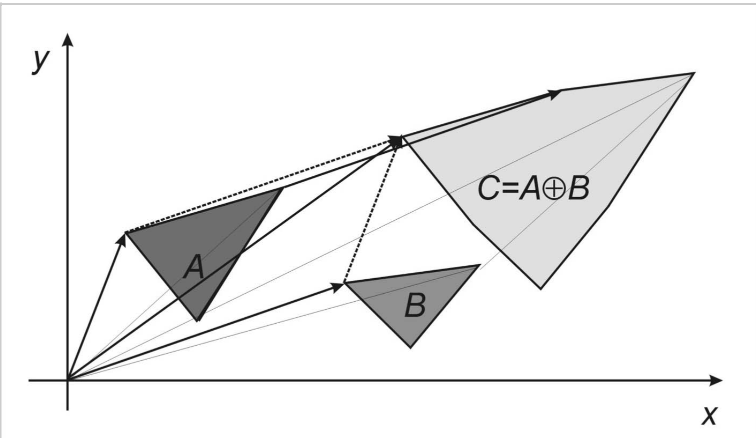
Světlana Tomiczková, Plzeň

1. Úvod

Minkowského sumu dvou množin $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ v rovině zavedl Hermann Minkowski (1864 až 1909) v roce 1903 vztahem

$$\mathcal{A} \oplus \mathcal{B} = \{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \colon \boldsymbol{a} \in \mathcal{A} \wedge \boldsymbol{b} \in \mathcal{B}\}. \tag{1}$$

Množinová operace (1) našla široké uplatnění v teorii geometrické pravděpodobnosti a integrální geometrii [7], v teorii náhodných množin [5] a v analýze obrazu [8]. V současnosti prožívá teorie Minkowského operací nebývalý rozkvět v souvislosti s potřebami praxe. Hledají se geometrické algoritmy pro nejrůznější oblasti průmyslu, počítačové grafiky a dalších oborů. Minkowského suma se například používá při rozmisťování objektů či jejich umisťování do kontejneru tak, aby se vzájemně nepřekrývaly, při plánování pohybu robota mezi překážkami nebo při hledání offsetu, tj. určování ekvidistantních hranic.



Obr. 1. Minkowského suma.

RNDr. Světlana Tomiczková, Ph. D. (1964), katedra matematiky ZČU v Plzni, Fakulta aplikovaných věd, Univerzitní 8, 301 00 Plzeň, e-mail: `svetlana@kma.zcu.cz`

Operace Minkowského rozdíl byla matematiky zavedena jako analogie Minkowského sumy později. Pomocí Minkowského rozdílu můžeme určit, zda je možné umístit jeden objekt do druhého, a výsledek určuje množinu všech posunutí, kterými je možné toto umístění realizovat. Operace Minkowského rozdíl je za určitých podmínek zprava inverzní (neboli vratná) k operaci Minkowského suma.

Operace Minkowského suma a Minkowského rozdíl mohou být snadno zobecněny do n-rozměrného eukleidovského prostoru $\mathbb{E}_n$, protože tyto operace jsou založeny na vektorových operacích. Nejprve se podívejme na oblasti, ve kterých jsou tyto dvě operace využívány.

Rozmisťování objektů

V průmyslu, zejména ve strojírenském, obuvnickém a oděvním, se setkáváme s úkolem, kdy na předem daný kus materiálu (pruh látky, plech, kus kůže) je třeba rozmístit díly polotovarů a vystřihnout či vyříznout je. Zkušený dělník v daném oboru umí rozmístit díly optimálně a rychle (vzhledem k nějakému kritériu), ale přechodem na automatizaci výroby a výrobu velkých sérií je vhodné i tuto činnost automatizovat či počítačově podporovat. Ukazuje se, že vhodným nástrojem pro tuto činnost je **Minkowského suma**.

V problémech s rozmisťováním se můžeme setkat s některými anglickými pojmy:

- **Containment problem:** Je dána oblast (omezená část roviny) — říkejme jí kontejner a množina objektů — dílů (také omezené části roviny). Úkolem je umístit díly do kontejneru tak, aby se nepřekrývaly. To znamená najít příslušné transformace (posunutí, otočení, souměrnost) pro každý díl tak, aby ležel uvnitř kontejneru a aby se nepřekrýval s ostatními díly. Může být omezeno nebo zakázáno použití některých transformací (např. při pokládání dílů na látku je nutné zohlednit směr vzoru).
- **Packing problem:** Je rozšířením předchozího problému. Hledáme transformace, které umístí díly do kontejneru tak, aby se nepřekrývaly, ale které navíc optimalizují některá kritéria aplikovaná na kontejner nebo na díly. Příkladem takového kritéria je například najít nejmenší kontejner, do kterého se vejdou dané díly, nebo nalézt maximální kolekci dílů, které se dají umístit do daného kontejneru.
- **Nesting problem:** Je používán ve stejném smyslu jako packing, ale pro „nepěkné“ díly nebo kontejnery. Pod pojmem „nepěkné“ myslíme např. nekonvexní části roviny nebo díly, zejména kontejnery tvořené vícenásobně souvislými oblastmi.
- **Cutting plan:** Nástřihový (polohový, výrobní) plán rozmístění dílů. Jde i o nalezení strategie řezání dílů s minimalizací délky řezné dráhy nebo počtu „propalů“. Při stanovení strategie řezání může být sledován i problém „rozpadu desky“ apod.
- **Compaction** (zhuštění)**:** V hotovém výrobním plánu, který byl vytvořen buď automaticky, nebo člověkem, mohou být provedeny další úpravy, např. malé natočení a následné posunutí dílů, a tím docílíme lepších výsledků.

- **„Pálicí programy“:** Hledání trajektorií pro řezací nástroj. V hotovém výrobním plánu hledáme optimální dráhu pro řezací nástroj, která splňuje požadovaná kritéria z hlediska technologie (např. je vhodné, aby při řezání zůstal plech vcelku, aby nedocházelo k přílišnému zahřívání a tím k deformaci dílů apod.)

Samostatnou oblast rozmisťování tvoří pokrývání rovinné oblasti kruhy se stejnými, popř. různými poloměry, v $\mathbb{E}_3$ potom vyplňování oblasti kulovými plochami. Pomocí rozmisťování kruhů lze dokonce řešit dělení oblasti na čtyřúhelníky (*Voronoi quadrilateralization*).

Pohyb robota — Robot Motion Planning

Jedním z důležitých úkolů robotiky je naprogramování pohybu robota mezi překážkami. Na začátku zadáme informace o začátku a konci cesty a o umístění překážek, které je nutno obejít, případně je robot určí sám pomocí senzorů. Očekáváme splnění úkolu, tj. robot najde cestu a vyhne se překážkám, je-li to možné.

Pro zjednodušení situace budeme pracovat pouze s půdorysem celé situace, neboli řešíme úlohu v $\mathbb{E}_2$. Dále můžeme tuto úlohu rozdělit podle tvaru robota a překážek (konvexní, nekonvexní, aproximace polygonem apod.) nebo podle způsobu pohybu (jestli bude pohyb realizován pouze pomocí posunutí, nebo je možné přidat i otočení). Oblast v $\mathbb{E}_2$, kde se robot pohybuje, nazýváme *pracovní prostor* (angl. *work space*).

Poloha robota je specifikována počtem parametrů, který koresponduje s počtem stupňů volnosti robota. Pro pohyb v rovině, realizovaný pouze pomocí posunutí, jsou to dva stupně volnosti, pokud přidáme otočení, jsou to tři stupně volnosti. (Pokud bychom přešli do $\mathbb{E}_3$, pak pro posunutí máme tři stupně volnosti, ale robot, který smí používat libovolné posunutí i libovolnou rotaci, má šest stupňů volnosti.)

Parametrický prostor robota nazýváme *konfigurační prostor* (angl. *configuration space*). Tedy např. pro robota, který má povolenou translaci a rotaci v rovině, je dimenze konfiguračního prostoru rovna 3.

Část konfiguračního prostoru, kam robot nesmí (protože by došlo ke kolizi s překážkou), se nazývá *zakázaný prostor* (angl. *forbidden space*), zbytek konfiguračního prostoru je *volný prostor* (angl. *free space*). Zakázaný prostor lze určit pomocí **Minkowského sumy** (viz např. [1]).

Offset

Důležitým požadavkem na CAD systémy je schopnost vypočítat *offset* A_d rovinné oblasti A neboli *ekvidistantu* hraniční křivky této oblasti ve vzdálenosti d.

Rovnoběžné neboli Bertrandovy křivky jsou takové křivky, které mají společné hlavní normály. Je-li $c(t)$ jedna křivka tohoto páru, pak druhá má rovnici $c_d(t) = c(t) + d\boldsymbol{n}(t)$, kde d je konstanta a $\boldsymbol{n}(t)$ jednotkový vektor hlavní normály.

Nechť $s(u,v)$ je plocha v $\mathbb{E}_3$, pak její offset $s_d(u,v)$ ve vzdálenosti d definujeme předpisem $s_d(u,v) = s(u,v) + d\boldsymbol{n}(u,v)$, kde $\boldsymbol{n}(u,v)$ je jednotkový normálový vektor plochy $s(u,v)$.

Podívejme se blíže např. na offset paraboly ve vzdálenosti d (viz obr. 2). Offsetem paraboly může být křivka, která sama sebe protíná (má singulární body) a vzdálenost některých jejích bodů od původní křivky je menší než d.

Offset můžeme také definovat jako obálku soustavy kružnic s poloměrem d, jejichž střed se pohybuje po křivce $c(t)$. Opět ale mohou vzniknout na výsledné křivce singulární body a body, jejichž vzdálenost od původní křivky je menší než d. Podobně je tomu u ploch. Tyto části offsetu (křivek i ploch) můžeme nazvat singulární.

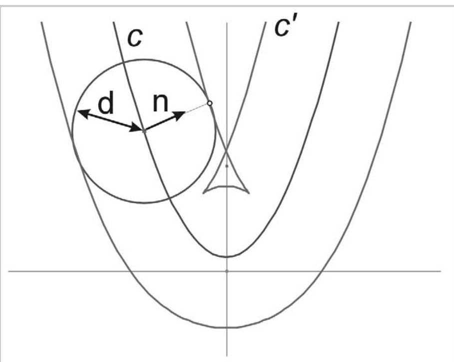
V technické praxi, např. při obrábění, určuje offset dráhu referenčního bodu nástroje. Musíme však určit a odstranit singulární části offsetu, protože v těchto částech dráhy nástroje by docházelo k poškození obráběné plochy, tzv. podříznutí. Velká pozornost je tedy věnována určování samoprůniků offsetu křivky nebo plochy.

Složitost výpočtu offsetu je dána také tím, že ekvidistanta racionální křivky nemusí být vždy racionální křivkou.

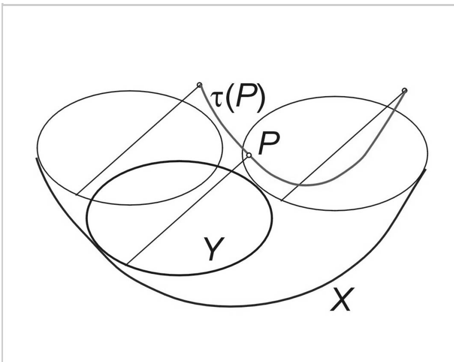
Offset rovinné křivky lze vyjádřit pomocí Minkowského sumy oblasti A (ohraničené křivkou c) a kruhu S^d se středem v počátku a poloměrem d ($A^d = A \oplus S^d$). Podobně offset plochy lze vyjádřit pomocí Minkowského sumy plochy A a kulové plochy S^d se středem v počátku a poloměrem d ($A^d = A \oplus S^d$). V obou případech už dostáváme offset bez singulárních částí.

Při obrábění nemusí mít nutně nástroj tvar kulové plochy, a proto např. E. Brechner v [2] nebo H. Pottmann v [6] definují **zobecněný offset**. Nechť X je pevná křivka (resp. plocha), Σ pohybující se soustava, ve které je dána křivka (resp. plocha) Y a referenční bod P a τ množina všech posunutí takových, že $\tau(Y)$ se dotýká křivky (resp. plochy) X. Pak množinu všech bodů $\tau(P)$ nazýváme zobecněným offsetem křivky (viz obr. 3) (resp. plochy) X vzhledem k soustavě Σ.

Zobecněný offset může mít opět singulární části, které je třeba při hledání dráhy nástroje odstranit. Pomocí Minkowského sumy dvou křivek (resp. ploch) můžeme zobecněný offset bez singulárních částí vyjádřit (viz [11]).



Obr. 2. Offset.



Obr. 3. Zobecněný offset.

Volba soustavy souřadnic

Výsledek Minkowského operací záleží do určité míry na volbě soustavy souřadnic. U Minkowského sumy a rozdílu se při volbě jiné soustavy mění pouze poloha výsledné množiny. V aplikacích nás zajímá zejména tvar Minkowského sumy, resp. rozdílu. V případě Minkowského rozdílu také, zda je, či není výsledkem prázdná množina.

2. Minkowského suma

Minkowského suma je vhodným nástrojem pro určování zakázaného prostoru při hledání dráhy robota, stejně jako prostoru, kam nesmíme umístit další díl při rozmisťování. Pomocí Minkowského sumy lze hledat nebo i definovat offset.

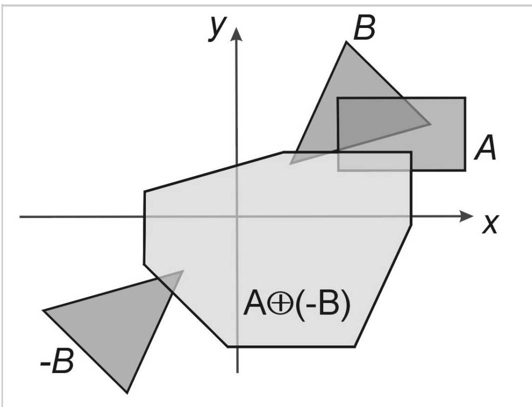
Uvažujme množiny bodů $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ v $\mathbb{E}_n$. **Minkowského sumou** $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ množin $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ rozumíme

$$\mathcal{A} \oplus \mathcal{B} = \bigcup_{\boldsymbol{b} \in \mathcal{B}} \mathcal{A}^{\boldsymbol{b}}, \tag{2}$$

kde množina $\mathcal{A}^{\boldsymbol{b}} = \{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \colon \boldsymbol{a} \in \mathcal{A}\} = \mathcal{A} + \boldsymbol{b}$ je množina $\mathcal{A}$ posunutá o vektor $\boldsymbol{b}$ (viz obr. 1). Lze dokázat, že tato definice je ekvivalentní s definicí (1).

Vlastnosti Minkowského sumy

Protože je Minkowského suma založena na sčítání vektorů, platí pro ni komutativní a asociativní zákon, tj. $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B} = \mathcal{B} \oplus \mathcal{A}$ a $(\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}) \oplus \mathcal{C} = \mathcal{A} \oplus (\mathcal{B} \oplus \mathcal{C})$.



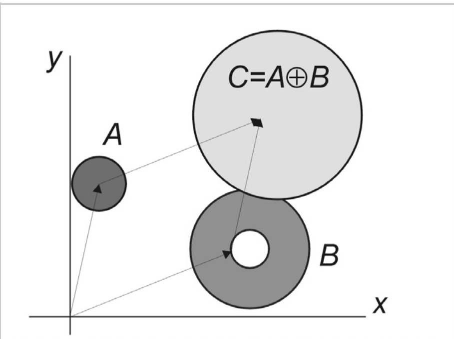
Obr. 4. Společný bod množin $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ v $\mathbb{E}_2$.

Pro sjednocení Minkowského sum platí $(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \oplus (\mathcal{C} \cup \mathcal{D}) = (\mathcal{A} \oplus \mathcal{C}) \cup (\mathcal{A} \oplus \mathcal{D}) \cup$ $\cup\, (\mathcal{B} \oplus \mathcal{C}) \cup (\mathcal{B} \oplus \mathcal{D})$, což dává nástroj pro hledání Minkowského sumy nekonvexních množin. Existují algoritmy pro určení Minkowského sumy konvexních mnohoúhelníků v rovině, jejichž výpočetní složitost je $O(m + k)$ (v prostoru vyšší dimenze je samozřejmě větší), kde m, k jsou počty vrcholů mnohoúhelníků $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$. Tyto algoritmy lze ale použít pro nekonvexní množiny pouze tak, že rozložíme původní množiny na sjednocení nepřekrývajících se konvexních množin a převedeme úlohu na hledání Minkowského sumy konvexních množin. Výsledek dostaneme jako sjednocení Minkowského sum konvexních množin.

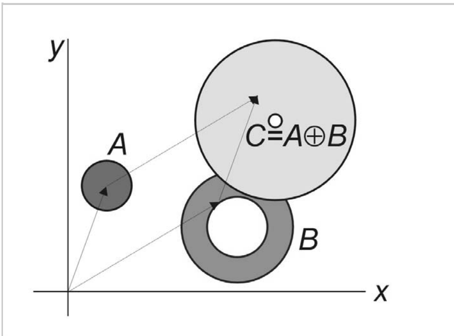
Posunutí množin $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ nemá vliv na tvar a velikost Minkowského sumy. Posuneme-li množiny $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ o vektory $\boldsymbol{s}$ a $\boldsymbol{t}$, pak Minkowského suma $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ bude posunutá o součet vektorů $\boldsymbol{s} + \boldsymbol{t}$, neboli $\mathcal{A}^{\boldsymbol{s}} \oplus \mathcal{B}^{\boldsymbol{t}} = (\mathcal{A} \oplus \mathcal{B})^{\boldsymbol{s}+\boldsymbol{t}}$.

Při rozmisťování útvarů nebo při detekci kolize robota s překážkou je nutné umístit útvar tak, aby se s původně umístěným nepřekrýval. Pro dvě bodové množiny $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ v $\mathbb{E}_n$ a libovolný bod $\boldsymbol{x}$ platí $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}^{\boldsymbol{x}} \neq \emptyset \iff \boldsymbol{x} \in \mathcal{A} \oplus (-\mathcal{B})$, kde $-\mathcal{B} = \{-\boldsymbol{b} \colon \boldsymbol{b} \in \mathcal{B}\}$.

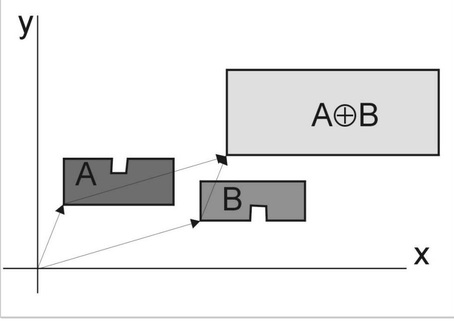
Můžeme tedy určit tzv. *zakázaný prostor* (angl. *forbidden space*), kam robot nesmí, popř. kam nemůžeme umístit další díl, aby se s původně umístěným nepřekrýval, tak, že vytvoříme množinu $\mathcal{A} \oplus (-\mathcal{B})$. Tato množina určuje vektory všech posunutí množiny $\mathcal{B}$ (koncové body polohových vektorů) takových, že platí $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}^{\boldsymbol{x}} \neq \emptyset$, tj. při posunutí množiny $\mathcal{B}$ o vektor $\boldsymbol{x}$ by došlo ke kolizi robota $\mathcal{B}$ s překážkou $\mathcal{A}$, popř. k překrytí (či dotyku) útvarů $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$.



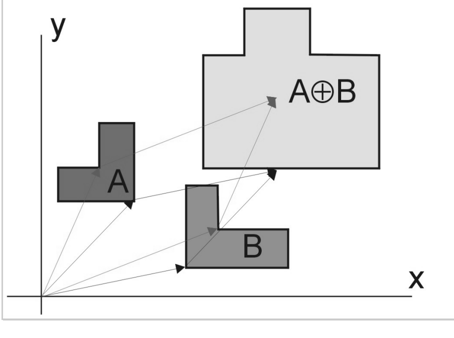
Obr. 5. Minkowského suma konvexní a nekonvexní množiny 1.



Obr. 6. Minkowského suma konvexní a nekonvexní množiny 2.



Obr. 7. Minkowského suma nekonvexních mnohoúhelníků 1.



Obr. 8. Minkowského suma nekonvexních mnohoúhelníků 2.

Minkowského suma $\mathcal{C} = \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ konvexních množin $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ je opět konvexní množina. Jak ale vypadá Minkowského suma množin, které nejsou konvexní?

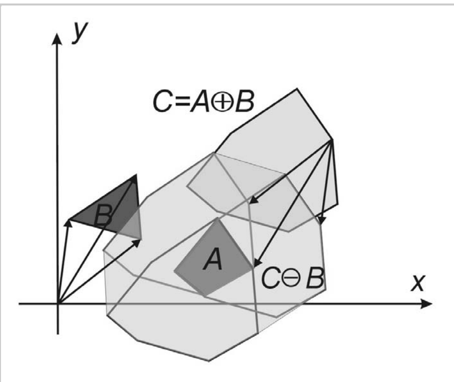
Minkowského suma $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ množin, kdy jedna z nich je konvexní a druhá nekonvexní, může být konvexní (obr. 5) i nekonvexní množina (obr. 6), a dokonce i Minkowského suma $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ množin, které nejsou konvexní, může být konvexní (obr. 7) i nekonvexní množina (obr. 8).

3. Minkowského rozdíl

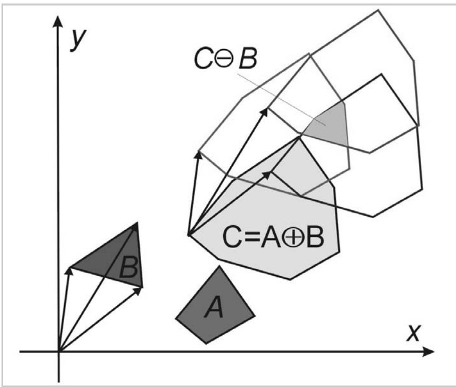
Minkowského rozdíl je v literatuře definován různě. Tyto různé způsoby zavedení nejsou ekvivalentní, a tedy dávají různé výsledky. Některá pojetí vycházejí z potřeb aplikací, ale pak zase rozdíl nemá obvyklé aritmetické vlastnosti. Otázkou je, zda je možné definovat Minkowského rozdíl tak, aby byl operací inverzní k operaci Minkowského suma.

Autoři R. Farouki, H. P. Moon a B. Ravani definují Minkowského rozdíl předpisem $\{\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \colon \boldsymbol{a} \in \mathcal{A} \wedge \boldsymbol{b} \in \mathcal{B}\}$ (viz [3]). Ale operace $\{\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \colon \boldsymbol{a} \in \mathcal{A} \wedge \boldsymbol{b} \in \mathcal{B}\}$ nemá (ani podle autorů) žádný další význam, neboť se dá vyjádřit pomocí Minkowského sumy jako $\mathcal{A} \oplus (-\mathcal{B})$ a není to operace inverzní k operaci $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ (viz obr. 9).

Jiný autor Zhenyu Li (viz [13]) definuje Minkowského rozdíl jako průnik $\bigcap_{\boldsymbol{b} \in \mathcal{B}} \mathcal{A}^{\boldsymbol{b}}$. Takto definovaný rozdíl využívá v rozmisťování (konkrétně pomocí takto definovaného rozdílu vyjadřuje podmínku umístění jedné množiny do jiné), ale opět to není operace inverzní k operaci $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ (viz obr. 10).



Obr. 9. Minkowského rozdíl podle R. Faroukiho, H. P. Moona a B. Ravaniho.



Obr. 10. Minkowského rozdíl podle Zhenyu Li.

Operace Minkowského suma je využívána v různých aplikacích a je proto vhodné, aby bylo možné provést „vratnou operaci“ (v grafických systémech označovanou jako „*undo*“).

Třetí a poslední způsob (viz [10]) dává jak z pohledu vratnosti operace, tak i z pohledu využití nejlepší výsledky. Takto definovaný rozdíl je pro konvexní, omezené a uzavřené množiny operací vratnou (zprava inverzní) k operaci $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ a také ho lze využít k rozmisťování.

Pro množiny bodů $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ v $\mathbb{E}_n$ rozumíme **Minkowského rozdílem** $\mathcal{A} \ominus \mathcal{B}$ množin $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ množinu

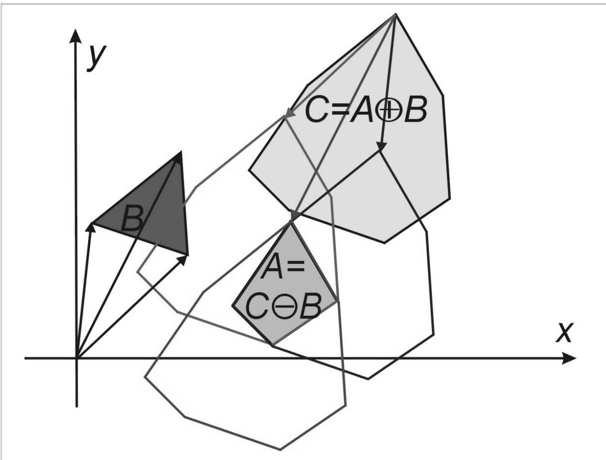
$$\mathcal{A} \ominus \mathcal{B} = \bigcap_{\boldsymbol{b} \in \mathcal{B}} \mathcal{A}^{-\boldsymbol{b}}, \tag{3}$$

kde množina $\mathcal{A}^{-\boldsymbol{b}} = \{\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \colon \boldsymbol{a} \in \mathcal{A}\} = \mathcal{A} - \boldsymbol{b}$ je množina, která vznikne posunutím množiny $\mathcal{A}$ o vektor $-\boldsymbol{b}$.

Takto definovaný Minkowského rozdíl je i vhodným nástrojem při rozmisťování, zejména pro *packing problem*, neboli umisťování jednoho objektu do jiného. Dovoluje určit, zda objekt lze do jiného umístit, popřípadě zda jeden objekt (množina, mnohoúhelník) leží uvnitř jiného.

Vlastnosti Minkowského rozdílu

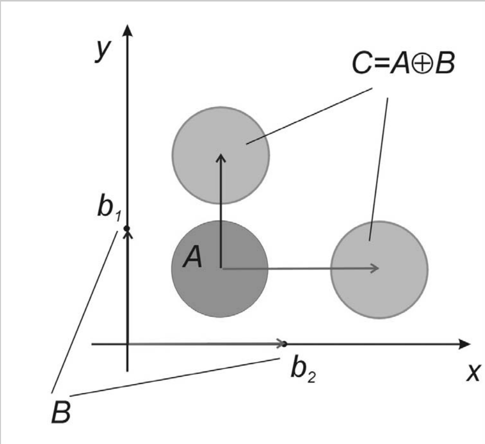
Pro konvexní, uzavřené a omezené množiny je operace $\mathcal{A} \ominus \mathcal{B}$ vratná (zprava inverzní) k operaci $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$, neboli $(\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}) \ominus \mathcal{B} = \mathcal{A}$ (viz obr. 11). Důkaz tohoto tvrzení lze najít např. v [10].



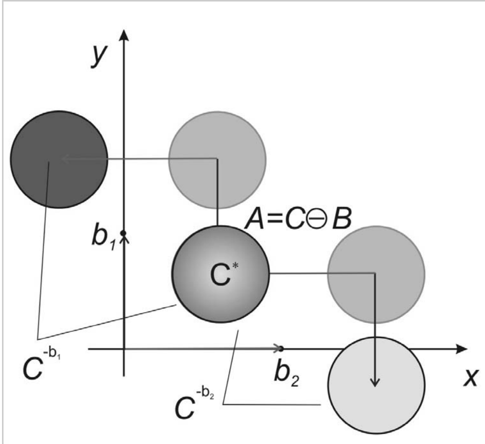
Obr. 11. $(\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}) \ominus \mathcal{B} = \mathcal{A}$.

Minkowského rozdíl ale může být zprava inverzní operací i v některých případech, kdy předpoklady splněny nejsou. Nechť množinou $\mathcal{A}$ je kruh a množina $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2\}$ obsahuje dva body. Minkowského sumou $\mathcal{C} = \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ jsou dva kruhy. Minkowského rozdílem $\mathcal{C}^* = \mathcal{C} \ominus \mathcal{B}$ je průnik dvou množin, z nichž každá obsahuje dva kruhy, tj. výsledkem je původní množina $\mathcal{A}$ (viz obr. 12, 13).

Obráceně ovšem nelze říci, že operace Minkowského suma je operací inverzní k operaci Minkowského rozdíl. Pouze platí, že pro konvexní, uzavřené a omezené množiny v $\mathbb{E}_n$ je $(\mathcal{C} \ominus \mathcal{B}) \oplus \mathcal{B} \subset \mathcal{C}$. Rovnost $(\mathcal{C} \ominus \mathcal{B}) \oplus \mathcal{B} = \mathcal{C}$ ale pro Minkowského rozdíl obecně neplatí.

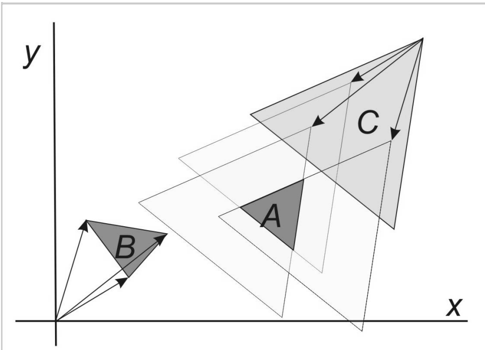


Obr. 12. Minkowského suma $\mathcal{C} = \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$.

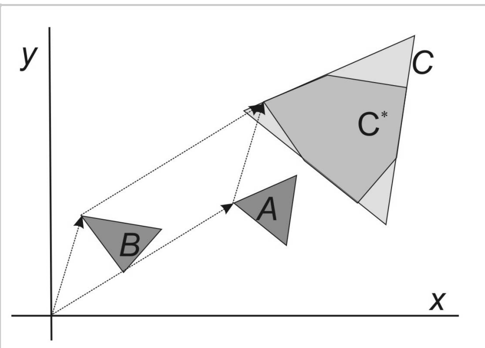


Obr. 13. Minkowského rozdíl $\mathcal{C}^* = \mathcal{C} \ominus \mathcal{B} = \mathcal{A}$.

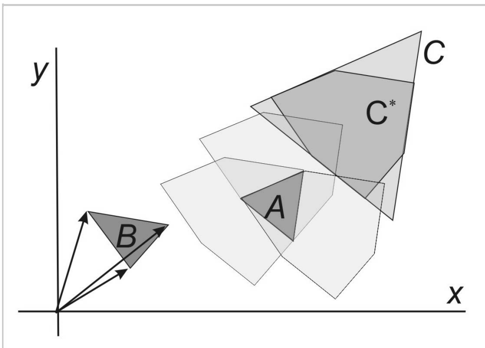
Na obr. 14 je Minkowského rozdíl $\mathcal{A} = \mathcal{C} \ominus \mathcal{B}$. Další obr. 15 ukazuje množinu $\mathcal{C}^* = \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$, která je podmnožinou množiny $\mathcal{C}$. Minkowského rozdílem množin $\mathcal{C}^*$ a $\mathcal{B}$ je opět množina $\mathcal{A}$ (viz obr. 16).



Obr. 14. Minkowského rozdíl $\mathcal{A} = \mathcal{C} \ominus \mathcal{B}$.



Obr. 15. Minkowského suma $\mathcal{C}^* = \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$.



Obr. 16. Minkowského rozdíl $\mathcal{C}^* \ominus \mathcal{B} = \mathcal{A}$.

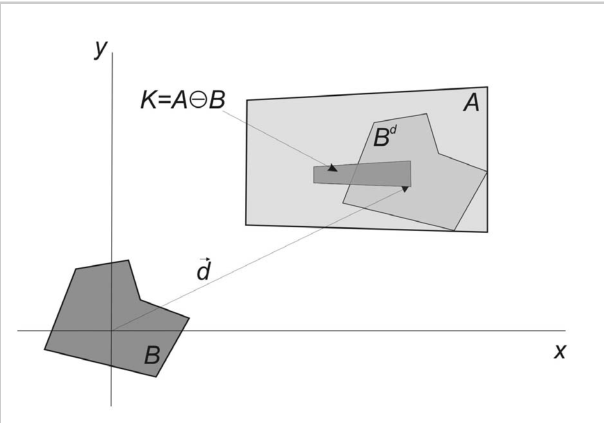
Také pro Minkowského rozdíl nemá posunutí množin $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ vliv na tvar a velikost výsledné množiny. Posuneme-li tedy množiny $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ o vektory $\boldsymbol{s}$ a $\boldsymbol{t}$, pak Minkowského rozdíl $\mathcal{A} \ominus \mathcal{B}$ bude posunutý o rozdíl vektorů $\boldsymbol{s} - \boldsymbol{t}$, neboli $\mathcal{A}^{\boldsymbol{s}} \ominus \mathcal{B}^{\boldsymbol{t}} = (\mathcal{A} \ominus \mathcal{B})^{\boldsymbol{s}-\boldsymbol{t}}$.

Vztah mezi Minkowského sumou a Minkowského rozdílem lze vyjádřit pomocí doplňků množin dvěma vzorci $\mathcal{A} \ominus \mathcal{B} = \bigl(\mathcal{A}' \oplus (-\mathcal{B})\bigr)'$ a $\mathcal{A} \oplus B = \bigl(\mathcal{A}' \ominus (-\mathcal{B})\bigr)'$.

Vrátíme se zpět k rozmisťování, popř. k pohybu robota. Umístíme-li objekt (díl, překážku) $\mathcal{A}$, tak pomocí operace $\mathcal{A} \oplus (-\mathcal{B})$ dostaneme tu část roviny, kam nesmíme umístit díl $\mathcal{B}$, popř. kam robot $\mathcal{B}$ nesmí, neboli dostáváme všechny vektory posunutí, které znamenají překrytí dvou dílů nebo kolizi robota s překážkou.

Naopak doplněk $\bigl(\mathcal{A} \oplus (-\mathcal{B})\bigr)'$ v $\mathbb{E}_2$ určuje část roviny, kam díl, popř. robot $\mathcal{B}$ smí být umístěn, neboli určuje všechny vektory posunutí $\mathcal{B}$, pro které nedojde k překrývání dílu $\mathcal{A}$, popř. ke kolizi robota. Podmínky pro nepřekrývání dvou množin můžeme modifikovat pro problém „umístění jedné množiny do jiné“, to je tzv. *containment problem*. Množina $\mathcal{B}$ leží v množině $\mathcal{A}$, právě když $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$. Máme množinu $\mathcal{A}$ a množinu $\mathcal{B}^{\boldsymbol{x}}$, kde $\boldsymbol{x}$ je vektor posunutí množiny B. Označme $\mathcal{A}'$ doplněk množiny $\mathcal{A}$ v $\mathbb{E}_2$.

Množina $\mathcal{B}^{\boldsymbol{x}}$ je uvnitř $\mathcal{A}$, právě když $\mathcal{B}^{\boldsymbol{x}} \cap \mathcal{A}' = \emptyset$, to znamená, že $\boldsymbol{x} \notin \mathcal{A}' \oplus (-\mathcal{B}) \iff \iff \boldsymbol{x} \in \bigl(\mathcal{A}' \oplus (-\mathcal{B})\bigr)' \iff \boldsymbol{x} \in \mathcal{A} \ominus \mathcal{B}$. Množina $\mathcal{B}^{\boldsymbol{x}}$ je tedy podmnožinou množiny $\mathcal{A}$ právě tehdy, když $\boldsymbol{x} \in \mathcal{A} \ominus \mathcal{B}$.



Obr. 17. Minkowského rozdíl a umístění jednoho objektu do jiného.

Minkowského rozdíl tedy určuje všechna posunutí, kterými můžeme přemístit množinu $\mathcal{B}$ tak, aby ležela uvnitř množiny $\mathcal{A}$ (viz obr. 17). Pokud je $\mathcal{A} \ominus \mathcal{B}$ prázdná množina, pak $\mathcal{B}$ do $\mathcal{A}$ pomocí posunutí umístit nelze. Jestliže bod $[0, 0] \in \mathcal{A} \ominus \mathcal{B}$, pak $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$.

Místo závěru Minkowského součin

Podívejme se, zda je možné definovat další operaci, pracující s množinami bodů, která by nahrazovala součin a která by přinesla jiný typ transformace s „rozumnými“ vlastnostmi. Minkowského součin v rovině je založen na násobení komplexních čísel.

Vzhledem k tomu, že bod v rovině je možné reprezentovat jak jeho polohovým vektorem, tak komplexním číslem (Gaussova rovina), můžeme dokonce studovat vztahy mezi operacemi Minkowského suma a Minkowského součin. Násobení komplexních čísel vyjadřuje rotaci, a tedy přidává další transformaci k již používanému posunutí. **Minkowského součinem** rozumíme množinu

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \{\mathsf{a} \times \mathsf{b} \colon \mathsf{a} \in \mathcal{A} \wedge \mathsf{b} \in \mathcal{B}\}, \tag{4}$$

kde $\mathsf{a} \times \mathsf{b}$ je součin komplexních čísel. Minkowského součin má význam zejména v optice, můžeme ho využít při hledání křivky nebo plochy, která se nazývá *anticaustika* (viz např. [3], [4]).

Problém nastává s rozšířením Minkowského operací do vyšších dimenzí. Pro Minkowského sumu a Minkowského rozdíl zde nejsou žádné překážky, protože jsou založeny na množinových operacích, popř. operacích s vektory. Minkowského součin je ale definován pomocí komplexních čísel. Víme ale, že těleso hyperkomplexních čísel se třemi jednotkami sestrojit nelze. Nejbližší těleso, které je možné vytvořit podobným způsobem jako komplexní čísla, je těleso kvaternionů. Minkowského sumu i rozdíl můžeme jednoduše definovat i pro množiny kvaternionů. I když pomocí násobení kvaternionů můžeme vyjádřit rotaci, je práce s množinami kvaternionů poměrně obtížná, protože jejich násobení není komutativní. Zjednoduší se pouze tehdy, jestliže používáme speciální symetrické množiny. Abychom mohli množiny rotovat o předem zvolený úhel, je nutné násobit zleva i zprava, a proto lze definovat operaci *Akce* (viz [9], [12]), která je zobecněním Minkowského součinu kvaternionů, lépe nám dovoluje pracovat s množinami kvaternionů a při vhodné volbě množin dokonce umožňuje vytvářet objekty v $\mathbb{E}_3$.

Poděkování. Práce na tomto článku byla podpořena výzkumným záměrem MSM 4977751301.

L i t e r a t u r a

[1] de Berg, M., van Kreveld, M., Overmars, M., Schwarzkopf, O.: *Computational geometry. Algorithms and applications.* Springer Verlag, Berlin 1997.

[2] Brechner, E. L.: *General offset Curves and Surfaces.* In: Geometry Processing for Design and Manufacturing, ed. Barnhill, R. E., SIAM, Philadelphia 1992, 101–121.

[3] Farouki, R. T., Moon, H. P., Ravani, B.: *Minkowski geometric algebra of complex sets.* Geometriae Dedicata *85* (2001), 283–315.

[4] Farouki, R. T., Chastang, J.-C. A.: *Curves and surfaces in Geometrical Optics.* Mathematical Methods in Computer Aided Geometric Design II. Academic Press 1992.

[5] Matheron, G.: *Random sets and integral geometry.* J. Wiley & Sons, New York 1975.

[6] Pottmann, H.: *General offset surfaces.* Neural, Parallel & Scientific Computations *5* (1997), 55–80.

[7] Santalo, L. A.: *Integral Geometry and Geometric Probability.* Adison-Wesley, Massachusetts 1976.

[8] Serra, J.: *Image Analysis and Mathematical Morphology.* Acad. Press, London 1982.

[9] Smukler, M.: *Geometry, Topology and aplications of the Minkowski Product and Action.* Senior thesis, Harvey Mudd College 2003.

[10] Tomiczková, S.: *Minkowského operace a jejich aplikace.* Disertační práce, ZČU v Plzni 2006.
[11] Wallner, J., Sakkalis, T., Maekawa, T., Pottmann, H., Yu, G.: *Self-Intersection of Offset Curves and Surfaces.* March 30, 2001.
[12] Weiner, I., Gu, W.: *Minkowski geometric algebra of quaternion sets.* International Journal of Pure and Applied Mathematics, Vol. 3, No. 4 (2002), 385–411.
[13] Zhenyu, L.: *Compaction Algorithms for Non-Convex Polygons and Their Applications.* PhD. thesis, Harvard University, Massachusetts 1994.

Antonín Svoboda (1907–1980) — průkopník výpočetní techniky v Československu

Helena Durnová, Brno

V září 1957, před 50 lety, byl uveden do provozu první československý počítač SAPO (SAmočinný POčítač) a 14. října 2007 uplynulo 100 let od narození Antonína Svobody, který stál u zrodu nejen tohoto počítače, ale také Laboratoře matematických strojů, prvního pracoviště, které se v Československu zabývalo vývojem výpočetní techniky. Jeho životní příběh byl stejně barvitý jako spektrum jeho zájmů, které sahalo od výpočetní techniky přes hudbu až ke karetní hře bridge. V oblasti matematiky a výpočetní techniky se věnoval především architektuře počítačů (SAPO, M1, EPOS 1, EPOS 2), numerické analýze (vývoji metod vhodných pro číslicové počítače), aritmetickým kódům a algoritmům, teorii spínacích obvodů a kybernetice.

Antonín Svoboda se narodil v Praze v rodině profesora českého jazyka a literatury. Studium strojního a elektrotechnického inženýrství na Českém vysokém učení technickém ukončil v roce 1931, avšak ještě předtím započal studium fyziky na Karlově univerzitě, kde také potkal svou budoucí manželku Miladu Joanelli (studentku astronomie), s níž se oženil v roce 1936. V témž roce dokončil svou doktorskou práci o aplikaci tenzorového počtu na distribuci elektrické energie.

Na podzim roku 1936 byl Svoboda povolán do služby v armádě. Vzhledem ke svému vzdělání byl přidělen k jednotce, která měla testovat zařízení pro zaměřování

Helena Durnová, Ph. D. (1972), Ústav matematiky FEKT VUT v Brně, Technická 8, 616 00 Brno, e-mail: durnova@feec.vutbr.cz

Práce na publikaci podpořena grantem GA ČR č. INE/07/E008. Autorka děkuje prof. RNDr. Michalu Křížkovi, DrSc., za připomínky k dřívějším verzím článku.