Eduard Hobst; Matilda Hobstová

Carl Friedrich Gauss — zakladateľ modernej matematiky

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 52 (2007), No. 4, 296--307

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/141369`

Carl Friedrich Gauss — zakladateľ modernej matematiky

Eduard Hobst a Matilda Hobstová, Nürnberg

Anotácia. Carl Friedrich Gauss (1777–1855), „knieža matematikov", sa narodil na sklonku života Leonharda Eulera, ktorého 300. výročie narodenia v minulom roku 2007 oslávil celý svet. Gaussove „menej okrúhle" 230. narodeniny si pripomíname s menšou pompou, ale s rovnakou mierou vďačnosti a obdivu. Gauss naplnil odkaz veľkého Eulera uplatnením a rozvinutím jeho objavov a vlastným mohutným rozšírením matematického obzoru. Moderná matematika nesie Gaussovu pečať.

1. Úvod

Pozornosť, ktorú kultúrny svet a s ním PMFA venovali 300. výročiu narodenia Leonharda Eulera [1], možno zatienila spomienku na ďalšieho významného matematika, ktorý sa narodil pred 230 rokmi. Bol ním geniálny nemecký matematik a astronóm Carl Friedrich Gauss. Jeho vklad do rozvoja matematiky je tak zásadný a rozsiahly, že sa s jeho menom stretávame „na každom kroku" ako prívlastkom nespočetných formúl, viet a výpočtových algoritmov. Gauss podnikol základné bádania na mnohých poliach matematiky a fyziky, predovšetkým mechaniky nebeských telies a elektromechaniky, a položil základy modernej geodézie. Svojím dôkazom zostrojiteľnosti sedemnásťuholníka (s pomocou pravítka a kružidla) si Gauss ako jediný matematik nového veku vydobyl čestné miesto v chýrnej galérii antických geometrov.

2. Gaussov životopis v stručnom prehľade

Carl Friedrich Gauss sa narodil 30. apríla 1777 v nemeckom Braunschweigu ako jediné dieťa Gerharda Dietricha a Dorothey (rod. Benz) Gaussových. Matka, dcéra kamenára, bola takmer analfabetka, ale vie sa o nej, že bola mimoriadne inteligentná. Gaussov otec vykonával veľa jednoduchých povolaní; nakoniec pracoval ako pokladník

Ing. Eduard Hobst, Ph. D. (1947), a RNDr. Matilda Hobstová (1946), Ingenieurbüro Dr. Hobst für Statik + Dynamik & Software-Entwicklung, Development Partner & Product Engineer (Concrete) SCIA Group n. v., Heideloffstraße 14, D – 90478 Nürnberg, Nemecko, e-mail: hobst@t-online.de

v poisťovni. Jedna z typických anekdót, aké sprevádzajú azda všetkých velikánov ducha, hovorí o Gaussovi, že už ako trojročný opravoval svojho otca pri vyúčtovaní miezd. Gauss vraj sám o sebe tvrdil, že sa naučil počítať skôr ako hovoriť; netreba však veriť všetkému, iba keď o veľa nejde, ako v tomto prípade.

Najznámejšia historka o Gaussovi ako zázračnom dieťati pochádza z jednotriedky základnej školy v rodnom Braunschweigu. Učiteľ zadal úlohu, o ktorej sa domnieval, že ňou zamestná žiačikov na dlhý čas: „Sčítajte všetky prirodzené čísla od 1 do 100.“ Malý Gauss sa však za okamih prihlásil so správnym výsledkom. Všimol si, že rad $1 + 2 + \cdots + 99 + 100$ možno usporiadať na 50 čiastkových súčtov rovnakej hodnoty:

$$(1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \cdots + (50 + 51) = 101 \times 50 = 5050, \qquad (1)$$

a riešenie bolo nájdené. Pravda, nemnohí deväťroční žiaci by dnes vedeli vynásobiť (bez kalkulačky) dve tak „veľké“ čísla.

Nech je pravdivostná hodnota tejto historky akákoľvek — napríklad údaj o počte čísiel prirodzenej postupnosti, ktorú mal školák Gauss sčítať, sa bez overovania prepisuje zo starších publikácií ako 100, ale v internete sa objavujú názory, že sa jednalo o číslo 60, ktoré bolo v predindustriálnej dobe Gaussa frekventovanejšie ako 100; potom by bol hľadaný súčet $61 \times 30 = 1830$ — pravdou však zostáva, že Gaussov talent bol pre svet zachránený vďaka jeho učiteľom Büttnerovi a Bartelsovi. Paralela s Leonhardom Eulerom, ktorého talent podporil Johann Bernoulli [1], je zjavná.

Zdá sa, že osud Gaussa poslúži na obžalobu spoločenských zriadení, ktoré neumožňujú voľný prístup k vzdelaniu všetkým vrstvám spoločnosti. Lenže, každá minca má dve strany: Gauss, syn nemajetných rodičov, vzdelanie predsa dostal a stal sa jedným z najväčších a najproduktívnejších duchov všetkých čias; dnešné „sociálne spravodlivé“ národné spoločenstvá umožňujú neobmedzené vzdelanie všetkým, a napriek tomu napr. v Nemecku nedokončí základnú školskú dochádzku viac ako 10 % detí a v zemi je, podľa správy UNESCO z roku 2004, registrovaných 5 % (tzv. funkcionálnych) analfabetov [2]! A to sa deje za sociálnych podmienok, o ktorých sa našim predkom (a starším čitateľom) do polovice minulého storočia ani nesnívalo...

Vládcom Braunschweigského vojvodstva bol v Gaussovej dobe vojvoda Carl Wilhelm Ferdinand von Braunschweig. „Zázračné dieťa“ mu bolo predstavené vo veku 14 rokov a urobilo na osvieteného panovníka taký dojem, že sa stal jeho mecenášom na celý život. Vďaka tejto podpore mohol Gauss navštevovať vyššie učebné zariadenie Collegium Carolinum, ktoré bolo predchodcom dnešnej Technickej univerzity v Braunschweigu. V roku 1795 sa Gauss zapísal na univerzitu v Göttingene. Na začiatku ťažisko jeho záujmu ležalo v klasickej filológii.

O tom, že sa Gauss stal matematikom a nie filológom či filozofom, „rozhodol“ jeho epochálny objav zostrojiteľnosti pravidelného sedemnásťuholníka — o tom viac v ďalšej kapitole. Štúdium matematiky zakončil Gauss doktorskou prácou na Academia Julia v Helmstedte; dizertácia pojednávala o *Základnej vete algebry*: „Každý komplexný polynóm $P_n(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ stupňa $n \geqq 1$ má práve n komplexných koreňov.“ Gauss podal jej exaktný dôkaz, ktorý v priebehu svojho života doplnil aspoň ďalšími tromi nezávislými dôkazmi!

Po svojej promócii žil Gauss v Braunschweigu z platu, ktorý mu vyplácal vojvoda Carl Wilhelm, a pracoval na svojej významnej práci *Disquisitiones arithmeticae*. Nebol však so svojím sociálnym postavením spokojný, i preto, že ako „čistý“ matematik sa nepovažoval za hodného takejto veľkorysej podpory. Zameral sa teda na astronómiu, vtedy považovanú za „kráľovnú vied“, a uchádzal sa o miesto profesora na univerzite v Göttingene. V tom období odmietol ponuky profesúr na Akadémii vied v Berlíne a Petrohrade (čím by sa bol stal nasledovníkom Eulera) [1], jednak z vďačnosti k svojmu vojvodovi, ale i v nádeji, že od neho dostane sľúbené observatórium v Braunschweigu. Iróniou osudu sa funkcie profesora i svojej vytúženej hvezdárne dočkal práve v roku 1807, kedy vojvoda zomrel na následky zranenia z bitky pri Jene proti Napoleónovi I. Profesor Gauss viedol svojrázne prednášky: posadil študentov k spoločnému stolu a nedovolil im, aby si robili poznámky; chcel tým dosiahnúť ich maximálne sústredenie na svoj výklad, ktorý však viedol tak trpezlivo a dôkladne, že všetci porozumeli.

Do stavu manželského vstúpil Gauss 9. októbra 1805. Zosobášil sa s Johannou Osthoff. Z tohto manželstva sa v roku 1806 narodil prvý syn Joseph, pomenovaný po astronómovi Giuseppe Piazzim, objaviteľovi preslávenej planétky *Ceres* (pozri ďalej). Johanna zomrela v roku 1809 pri pôrode tretieho dieťaťa, syna Luisa (ktorý zomrel pol roka po matke). Gauss sa oženil znova s Friederikou Waldeck, s ktorou mal ďalšie tri deti. Friederika zomrela v roku 1831 na tuberkulózu. Zatiaľ čo jeho povolanie bola triumfálna cesta životom, osud mu v rodinnom živote nadelil nadmieru smútku, sklamaní a tragédií...

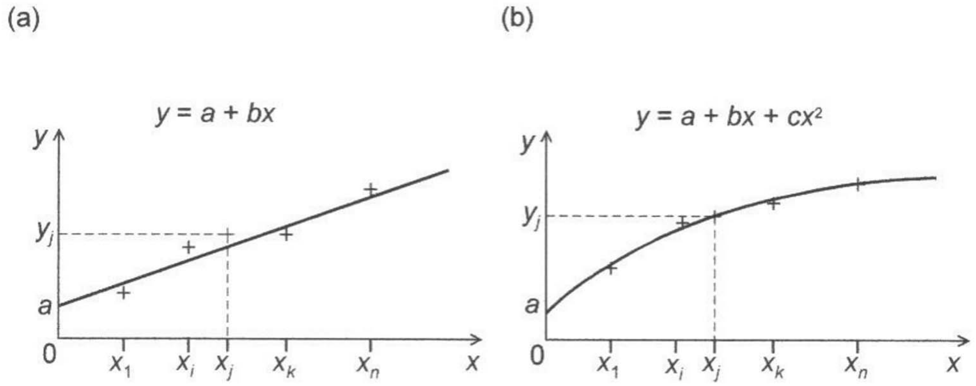
V posledných rokoch života sa Gauss úzko priatelil s Alexandrom von Humboldtom. Po celý život zostal hlboko religiózny a konzervatívny (aj preto odmietol revolúciu v roku 1848). Gauss zomrel 23. februára 1855 v Göttingene. Už za svojho života však bol populárnou a vysoko váženou osobnosťou. Na jeho počesť dal hannoverský kráľ v roku 1856 raziť pamätnú mincu s Gaussovou podobizňou a nápisom *Mathematicorum Principi* („knieža matematikov“).

3. Výber z Gaussovho matematického diela

V lexikónoch sa pripomínajú predovšetkým Gaussove práce v oblasti teórie čísiel, algebry, analýzy, teórie pravdepodobnosti a štatistiky, diferenciálnej geometrie, geodézie, hydrodynamiky, zemského magnetizmu a elektriny. Pre inžinierov má veľký význam Gaussov prínos pre numerické výpočty a mnohí z nich považujú Gaussa i za zakladateľa numerickej matematiky. Gauss sa o jej rozvoj zaslúžil predovšetkým svojimi priekopníckymi prácami v teórii chýb. Inžinierske vedy by však bez Gaussovho prispenia nedosiahli také úžasné úspechy, ktoré etablovali inžinierske povolanie ako významnú humánnu činnosť.

Gaussove zápisky prezrádzajú, že už ako 12-ročný nedôveroval dôkazom euklidovskej geometrie a v 16 rokoch tušil, že vedľa nej musí jestvovať ešte nejaká neeuklidovská geometria. Tento závažný predpoklad však prenechal svojim zápiskom a jeho prehĺbením sa ďalej nezaoberal, lebo bol presvedčený, že tento objav by bol matematickou verejnosťou odmietnutý.

V 18. roku života Gauss objavil dôležité vlastnosti rozdelenia prvočísiel na číselnej osi a formuloval *metódu najmenších štvorcov*, ktorá sa stala klasickým nástrojom teórie chýb. Ide v nej o minimalizáciu súčta štvorcov jednotlivých odchýliek pri meraní priebehu nejakej veličiny či fyzikálneho javu. Gauss dokázal, že táto metóda dáva *najpravdepodobnejší výsledok* merania, tzn. priblíži sa skutočnosti s najväčšou pravdepodobnosťou. Podstatu metódy najmenších štvorcov ukazuje (veľmi schématicky) obr. 1, ktorý i pripomína, že riešenie nie je jednoznačné [3]. Súčasná astronómia používa metódu najmenších štvorcov, rozpracovanú do najjemnejších nuancií, ako jeden zo svojich najmocnejších numerických nástrojov [4].



Obr. 1. Priblíženie výsledku metódou najmenších štvorcov: (a) priamka; (b) parabola.

Nenechajme sa zmýliť jednoduchosťou obr. 1! Metóda najmenších štvorcov je vo svojom praktickom použití komplikovaná hlavne tým, že málokedy poznáme krivku (na obr. 1 je to priamka, resp. parabola), teda funkciu sledovaného javu, ktorý množina meraných bodov (x_j, y_j) aproximuje s (náhodnou, nie systematickou!) chybou. O objaviteľskú prioritu viedol Gauss dlhé roky spor s významným analytikom a astronómom A. M. Legendrom (1752–1833), ktorý o metóde referoval v roku 1805. Tento spor zamestnal celé generácie matematikov a historikov: viedli sa rešerše Gaussovej korešpondencie, aby sa potvrdilo, že Gauss o svojom objave (aspoň v náznaku) referoval už skôr (napr. v roku 1799 astronómovi F. X. von Zachovi). Gauss sám datoval vznik tejto „svojej metódy“ („principium nostrum“) do roku 1795. Ešte v roku 1996 dospel matematik J. Dutka [3] k záveru, že „…na základe výsledkov rozsiahlych výpočtov s použitím počítača nemožno pochybovať o tom, že Gauss metódu použil na jar 1799…“ Gaussova neústupčivosť voči Legendrovi, ktorému na prvenstve záležalo určite viac ako Gaussovi, sa nám môže zdať malicherná, nehodná Gaussovho formátu. Objav tejto metódy bol zrejme taký „kolumbovský“, že Gauss, ktorý väčšinu svojich objavov nepublikoval (uspokojil sa so zápisom do denníka), sa v tomto prípade nároku na prvenstvo nechcel vzdať.

Na tomto základe Gauss neskôr vyvinul metódy *numerickej integrácie* plôch ohraničených krivkami (*Gaussova kvadratúra* — integrácia s využitím optimálnych základných integračných bodov) a dospel k tzv. Gaussovej *zvonovej krivke* $\varphi(x)$, ktorá je známa ako *funkcia štandardného normálneho rozdelenia* a nachádza široké použitie v teórii pravdepodobnosti, štatistike, geodézii a ďalších vedách, ktorých fundamentom je spracovanie nameraných veličín:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), \tag{2}$$

kde σ^2 je miera presnosti (rozptyl). Gauss dokázal originálnymi úvahami, že zvonová funkcia $\varphi(x)$ v (2) dáva pri použití metódy najmenších štvorcov najlepší pravdepodobnostný odhad presnosti („maximum-likelihood estimate“) i pre všeobecné merania v rôznych bodoch. Gaussove závery týkajúce sa teórie pravdepodobnosti neboli však tak presné ako napr. jeho objavy v teórii čísiel. Teória pravdepodobnosti bola vybudovaná až v 20. storočí, a jej dnešnými pojmami sa Gaussove úvahy a závery dajú rigorózne potvrdiť [3]. Priekopníci nemajú na ružiach ustlané…

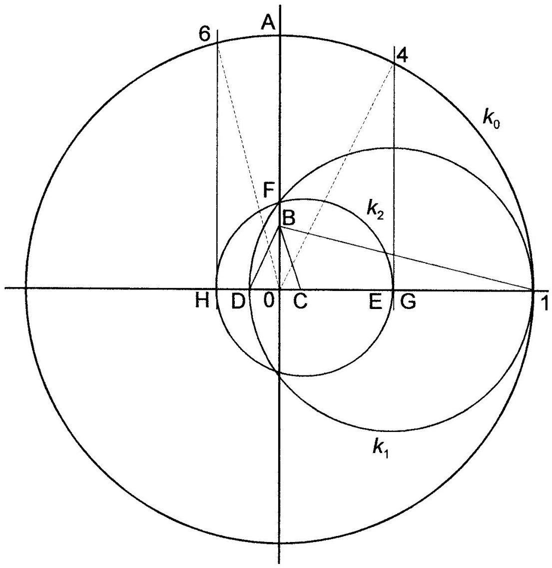
Koncom marca 1796, niekoľko týždňov pred svojimi 19. narodeninami, sa podarilo Gaussovi dokázať *zostrojiteľnosť pravidelného sedemnásťuholníka* pomocou pravítka a kružidla. Objav bol vedeckou senzáciou a etabloval Gaussa ako matematika prvej veľkosti! Viac ako 2000 rokov nepribudlo v podstate nič k objavom starovekých gréckych geometrov a všetky doposiaľ známe konštrukcie polygónov pochádzali len od nich. Starí Gréci vedeli do kružnice vpísať pravidelný päť- a šesťuholník a z týchto dvoch základných konštrukcií skladaním, resp. rozpolením uhlov vytvárali ďalšie pravidelné n-uholníky; ale cez ďalšie základné (prvočíselné) delenie $n = 17$ sa však už nedostali! [5]

Tento objav nebol náhodný ani izolovaný. Stál na začiatku niekoľkoročnej Gaussovej práce na knihe *Disquisitiones arithmeticae*, publikovanej v roku 1801. Podľa všeobecnej mienky to bol najväčší výkon ľudského ducha od publikovania Newtonovej priekopníckej práce *Principia* a považuje sa za základ teórie čísiel ako systematickej vedy. Gauss v ňom predložil *teóriu kvadratických kongruencií*, podal prvý dôkaz *zákona kvadratickej reciprocity* (počas svojho života pridal tucet ďalších, hodnotných dôkazov) a vypracoval kompletnú *teóriu delenia kruhu*. Podstatou teórie je Gaussova veta o n-uholníkoch: „Regulárny polygón je zostrojiteľný pravítkom a kružidlom vtedy a len vtedy, keď je počet jeho strán vyjadriteľný súčinom $2^m p_1 p_2 \cdots p_j$ (m je nula alebo prirodzené číslo), kde p_i sú navzájom rôzne *fermatovské prvočísla* $F_k = 2^{2^k} + 1$, $k = 0, 1, 2, \ldots$“ Sedemnásťuholník vyhovuje teda súčinu $2^0 F_2 = 17$. Pripomeňme, že nie všetky F_k sú prvočísla, ako sa domnieval Fermat [1].

Mnohých čitateľov, nematematikov, určite prekvapí, že Gaussov objav nepredstavuje *zostrojenie* sedemnásťuholníka (ako mylne uvádzajú niektoré popularizujúce publikácie), ale dôkaz jeho *zostrojiteľnosti*! Uvedomme si však, že Gaussov dôkaz je v podstate návodom na konštrukciu, ako sa ukazuje v [6]: Gauss podal vzorec pre výpočet kosínusu sedemnástiny plného kruhového oblúka:

$$\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) = \frac{1}{16} \times \left[-1 + \sqrt{17} + \sqrt{2(17-\sqrt{17})} + \right.$$
$$\left. + 2\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{2(17-\sqrt{17})} - 2\sqrt{2(17+\sqrt{17})}}\right], \quad (3)$$

a tým je dané, že uhol $360^\circ/17$, resp. jeho násobok, možno zostrojiť pravítkom a kružidlom; zrejme viacerými spôsobmi. Vlastnou konštrukciou sedemnásťuholníka sa Gauss buď nezaoberal, pretože ju považoval za „elementárnu“, alebo ju našiel a nepovažoval za nutné dokumentovať.



Obr. 2. Richmondova konštrukcia pravidelného sedemnásťuholníka.

Pre „obyčajných smrteľníkov“ je však nájdenie konštrukcie sedemnásťuholníka určite ťažká úloha! Na obr. 2 uvádzame elegantnú konštrukciu H. W. Richmonda z roku 1893 a pripájame jej verbálny opis: (1) volíme prvý vrchol sedemnásťuholníka 1 na vodorovnom (hlavnom) priemere a pomocný bod A na zvislom priemere základnej kružnice k_0 so stredom v bode 0; (2) bod B založíme v štvrtine polomeru $[0A]$; (3) zostrojíme rameno štvrtinového uhlu z $\sphericalangle 0B1$ (dvojnásobným delením na polovicu). Bod C je jeho priesečník s polomerom [01]; (4) nad $[BC]$ zostrojíme v B rameno uhlu 45°, ktoré pretína polomer odvrátený k [01] v bode D; (5) zostrojíme kružnicu k_1 nad priemerom $[D1]$ (bod E je jej stredom); (6) bod F vznikne ako priesečník k_1 s polomerom $[0A]$; (7) zostrojíme kružnicu k_2 so stredom v bode C, prechádzajúcu bodom F; jej priesečníky G a H s hlavným priemerom kružnice k_0 sú kolmé priemety vrcholov 4, 6 sedemnásťuholníka na hlavný priemer. Poznamenajme, že na konštrukciu by stačili dva *ľubovoľné* vrcholy (17 je prvočíslo!).

Gaussova eliminačná metóda riešenia sústav lineárnych algebraických rovníc je známa každému inžinierovi — zo štúdia i z praxe. Gauss ju uverejnil v súvislosti s metódou najmenších štvorcov, a s jej pomocou riešil rovnice vyrovnávacieho počtu svojich astronomických a geodetických meraní. Jeho metóda je svojím praktickým prínosom taká epochálna ako jeho iné „teoretickejšie“ objavy, a na tom nič nemení fakt, že dnešné programy metódy konečných prvkov používajú odvodené, prepracovanejšie algoritmy.

Jedna z Gaussových viet (prisudzuje sa spolu Ostrogradskému) sa týka súvisu medzi krivkovými a plošnými, resp. plošnými a objemovými integrálmi. Pripomeňme si aspoň posledný vzťah, v pravdepodobne najznámejšom tvare:

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_S (P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y). \tag{4}$$

V (4) sú P, Q, $R(x, y, z)$ spojité funkcie, vrátane svojich prvých derivácií, v priestore V, ohraničenom po častiach hladkou plochou S. Podintegrálny výraz na ľavej strane je tzv. *divergencia* vektorového poľa v objeme V, na pravej strane je *tok* vektorového poľa hraničnou plochou S. Vzťah (4) prevádza prekvapivo jednoduchým a elegantným spôsobom objemový integrál na integrál plošný, teda znižuje rozmer integrálu o jednotku; na prvý pohľad pôsobí priam „zázračne“, lebo umožňuje opísať vlastnosti telesa na základe stavu na jeho plošnej hranici. Gauss a Ostrogradskij ukázali, že sa nejedná o „zázrak“: uvedené podmienky spojitosti funkcií (až na konečnú či spočítateľnú množinu nespojitostí) a hladkosti okraja sú oným „mostom“ medzi hranicou a vnútrajškom telesa. Táto veta z roku 1835 (zverejnená až 1867) našla použitie vo fyzike v teórii elektrického potenciálu a v hydrodynamike, kde sa s jej pomocou opisujú stavy prúdenia, žriedla, odtoky atď. V stavebnej mechanike veta opísaná vzťahom (4) dlho nenachádzala priame použitie. Prekvapivo sa objavilo až v 70. rokoch minulého storočia v tzv. *metóde hraničných prvkov* (pôvodne: *okrajových* [7]), ktorá s jej pomocou opisuje stav napätia vo vnútri telesa, vychádzajúc zo stavu na jeho povrchu, resp. okraji. Najmä v problémoch interakcie stavieb so základom sa dosiahli kombináciou metódy hraničných prvkov (*model* pružného podložia) a *metódy konečných prvkov* (model stavby) hodnotné praktické riešenia. Najprogresívnejším rozpracovaním objavnej ídey Gaussa a Ostrogradského v stavebníctve sa javí metóda *efektívneho modelu podložia* [8], ktorý *kondenzuje* vlastnosti nehomogénneho, mnohovrstevnatého podložia do základovej škáry (objektu zloženého z rovinných obrazcov) a umožňuje tak interaktívne numerické riešenia stavba-základ s doposiaľ nepoznanou výstižnosťou. Tento výdobytok československej stavebnej mechaniky dosiahol vďaka statickému software firmy SCIA International medzinárodné uplatnenie; Gauss neprestáva inšpirovať.

Gauss prispel dôležitými poznatkami a impulzmi aj do diferenciálnej geometrie, ktorá sa zaoberá analytickým vyšetrovaním vlastností kriviek a plôch. Jeho prínos diferenciálnej geometrii je zhrnutý v diele *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (1827). Pripomeňme niekoľko základných pojmov, viet a definícií. Vlastnosti („hladkej“) plochy danej parametrickým výrazom $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ v okolí jej ľubovoľného bodu sa opíšu diferenciálnymi vzťahmi, nazývanými *1. a 2. základná,* resp. *kvadratická forma plochy*:

$$\mathrm{d}s^2 = E\,\mathrm{d}u^2 + 2F\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + G\,\mathrm{d}v^2, \tag{5}$$

$$-\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{n} = L\,\mathrm{d}u^2 + 2M\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + N\,\mathrm{d}v^2, \tag{6}$$

kde $\mathrm{d}s^2$ je štvorec diferenciálu dĺžky (resp. diferenciál plochy); $\mathrm{d}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{n}$ je skalárny súčin diferenciálu sprievodného vektoru bodu $\boldsymbol{r}$ a diferenciálu normálového vektoru plochy $\boldsymbol{n}$; E, F, G sú skalárne súčiny dotyčnicových vektorov $\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{r}_v$ parametrických kriviek $u = u(t)$ a $v = v(t)$; L, M, N obsahujú skalárne súčiny $\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{r}_v$ s deriváciami normálového vektora $\boldsymbol{n}_u$, $\boldsymbol{n}_v$. Gauss zaviedol definíciu *totálnej krivosti* (alebo *Gaussovej miery krivosti*) K:

$$K = \pm\frac{1}{K_1K_2} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \tag{7}$$

a postuloval *Gaussov teorém* (*theorema egregium*), vyjadrujúci Gaussovu krivosť K výlučne prostredníctvom koeficientov 1. kvadratickej formy E, F, G a ich parciálnych derivácií prvého a druhého rádu [9].

Bez diferenciálnej geometrie by sa v teórii pružnosti nerozvinula teória „škrupín dvojitej krivosti“, ktorá dosiahla rozkvet v druhej polovici minulého storočia. Na tomto poli slávila veľké úspechy predovšetkým sovietska stavebná mechanika [10].

Gauss vyprodukoval pri svojich bádaniach, a zdá sa, že často i z „dlhej chvíle“, tak ako dnešný človek „relaxuje“ pri pozeraní televízie, množstvo užitočných formúl, ktoré omračujú svojou produktívnosťou a kompaktnosťou. Nadšenie vyvolávajú jeho vzorce pre výpočet dňa týždňa z dátumu, resp. pre stanovenie dátumu Veľkej noci z letopočtu. Kladieme si otázku: „Ako na to Gauss prišiel?“. Veru, mozgy géniov pracujú podľa zvláštnych schém! Programátorom sa pri pohľade na Gaussove formule natíska označenie „malý modrý trpaslík“, ktorým sa označujú nerozšifrovateľne hutné, ale korektné, výkonné kódované algoritmy.

V článku o Eulerovi [1] sa hovorí o približnom výpočte čísla π pomocou čiastočných súčtov nekonečných (mocninových) radov. V Gaussových zobraných spisoch z roku 1863 je uvedený vzťah:

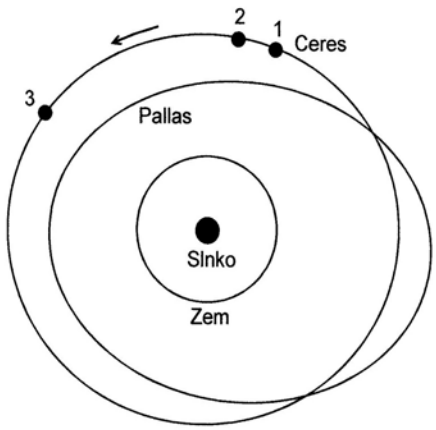
$$\frac{\pi}{4} = 12\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{18} + 8\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{57} - 5\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{239}\,, \tag{8}$$

nad ktorým opäť stojíme v nemom (či hlasitom) úžase. Tento *Gaussov vzorec* bol opakovane použitý na rekordné výpočty čísla π na počítačoch [11]. Pred Gaussom ho zostavil londýnsky astronóm John Machin.

4. Výber z Gaussovho astronomického diela

Gaussov (vraj študentom prednášaný) výrok: „Čísla sú dušou výpočtu“, vyjadruje jeho úctu pred „solídnym číselným údajom“, ktorého dosiahnutie je cieľom každého prírodovedeckého a inžinierskeho projektu. Fyzici, astronómovia a inžinieri poznajú, akú hodnotu má korektný číselný výsledok! Gauss pre svoje zložité výpočty pohybu nebeských telies v navzájom interferujúcich gravitačných poliach musel vyvinúť spoľahlivý numerický aparát. Britský fyzik W. Thomson (1824–1907), známy skôr ako lord Kelvin (autor *Kelvinovej teplotnej stupnice* začínajúcej na absolútnom bode mrazu), raz prehlásil: „Keď môžeme zmerať to, čím sa zaoberáme, a nájsť vyjadrenie rečou čísiel, čosi vieme; keď sa však nevieme o veci vyjadriť v číselnom tvare, naše vedomosti sú pochybné.“ [3]

Po dokončení svojich *Disquisitiones arithmeticae* sa Gauss začal venovať astronómii. Jeho záujem podnietilo objavenie planétky *Ceres* 1. januára 1801 talianskym astronómom G. Piazzim. Obr. 3 približuje situáciu schémou, ktorá reprodukuje dobový záznam uverejnený v [3]; bod 1 na ňom symbolizuje pozíciu Ceresa pri jeho objavení. Ceres však po 40 dňoch prestal byť pozorovateľný kvôli narastajúcemu slnečnému svitu (obr. 3, bod 2). Dvadsaťštyriročnému Gaussovi sa podarilo na základe svojej *nepriamej metódy určenia dráhy planét*, s pomocou svojho *vyrovnávacieho počtu* a *metódy najmenších štvorcov* dráhu Ceresa vypočítať. H. Olbers presne 1 rok po objave Piazziho znova objavil Ceres na oblohe, temer presne v tom mieste, ktoré vypočítal Gauss (obr. 3, bod 3).



Obr. 3. Schématická ilustrácia objavenia a znovuobjavenia planétky Ceres. (1) miesto objavenia Ceresa 1. 1. 1801 G. Piazzim; (2) miesto posledného pozorovania Ceresa 10. 2. 1801; (3) miesto znovuobjavenia Ceresa 1. 1. 1802 H. Olbersom.

Pripomeňme, že dráhy planétiek nie sú presne eliptické, nakoľko sú pod vplyvom *Jupitera* (obria planéta s hmotnosťou 318-krát väčšou ako Zem), ktorého gravitačné pole interferuje s príťažlivosťou Slnka! Tým sa komplikuje určenie ich pohybu, lebo Jupiter sa sám pohybuje po svojom orbite okolo Slnka.

Gauss sa ďalej zamestnával výpočtom veľmi nepravidelnej, excentrickej dráhy planétky *Pallas* (čo bola úloha vypísaná Francúzskou akadémiou vied). Jeho poznatky a skúsenosti vyústili v roku 1809 do knihy *Theoria motus corporum coelesticum...* („Teória pohybu nebeských telies...“), ktorá ho urobila razom presláveným po celej Európe. Stalo sa z nej fundamentálne dielo numerickej astronómie. Za tento epochálny výkon dostal v roku 1810 tzv. Lalandovu cenu Francúzskej akadémie vied [5].

5. Gaussov prínos aplikovaným vedám

Už ako študent bol Gauss konzultovaný ohľadne trigonometrického zamerania Westfálska, a tak získal svoje prvé skúsenosti s geodéziou. V roku 1818 bol poverený osobne vykonať trianguláciu hannoverského kráľovstva a neskôr celého dánskeho kráľovstva. Tieto úlohy ho zamestnávali intenzívne v období 1821–26 a do istej miery až do roku 1848. Niektorí Gaussovi súčasníci lamentovali, že Gaussov vzácny čas je vraj stratený pre práce, ktoré by mohol vykonať niekto iný, menej učený. Faktom však je, že práve vďaka jeho práci v teréne, pri ktorej mu asistovali jeho syn Joseph a istý major Müller, sa geodetická veda pozdvihla na vedeckú úroveň. Praktickým výsledkom Gaussovho neúnavného bádania v každej životnej situácii bol aj vynález geodetického prístroja *heliotropu*, ktorého princíp skrsol Gaussovi v hlave pri jednej večernej prechádzke v roku 1821 so svojím synom Eugenom, keď ho oslnil odraz zapadajúceho slnka v okne vzdialeného domu. Už v júli 1821 Gauss týmto prístrojom zameral klasický geodetický trojuholník medzi horami Hohenhagen, Brocken a Inselsberg. Dnes stojí na vrchole Hohenhagenu pamätná Gaussova veža s jeho mramorovou bustou. Jeho geodetické dielo je zhrnuté v *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (1827) a vo dvoch *Pojednaniach o vyššej geodézii* (1843/46), ktoré sa stali fundamentom modernej geodézie [5]. O triangulácii podrobne pojednáva v československej literatúre napr. učebnica [12].

Roku 1810 sa Gauss začal zaoberať optikou. Prácu však prerušil a na tomto poli pokračoval oveľa neskôr. V roku 1840 publikoval svoje *Dioptrické výskumy* a o tri roky neskôr *Dioptrické štúdie*.

V lete roku 1831 začal Gauss študovať kryštalografiu. Čoskoro ju však opustil, napriek tomu, že ju obohatil niekoľkými významnými objavmi. Od roku 1831 spolupracoval s fyzikom E. Weberom. Výsledkom ich spolupráce bol vynález prvého elektrického telegrafu (1832/33), ktorý Kelvin okamžite aplikoval na zaoceánsku telegrafiu. V rokoch 1838/39 predložil Gauss *Všeobecnú teóriu zemského magnetizmu* s výpočtom polohy zemských magnetických pólov. O rok neskôr uverejnil Gauss s Weberom *Atlas zemského magnetizmu*. Ich ďalšie spoločné dielo, *Absolútny systém fyzikálnych mier* z roku 1832, sa používal desaťročia bez zmien [5]. Po Gaussovi bola pomenovaná fyzikálna jednotka magnetickej indukcie; dnes je nahradená jednotkou *Tesla*: 1 [Gauss] $= 10^{-4}$ [Tesla].

6. Záver

Článok pripomenul len zlomok Gaussových objavov a tých bolo toľko, že väčšina z nich sa „znovuobjavila“ až po nájdení jeho osobného denníka v roku 1898, lebo Gauss z nich za svojho života zverejnil len malú časť. Zdá sa, že osud Eulerových prác [1] sa zopakoval; nebol však rovnaký! Euler bol tak plodný autor, že by jeho tempu asi nebolo stačilo ani zjednotené úsilie všetkých európskych tlačiarní. Gauss však úmyselne obmedzil svoju publikačnú činnosť! Bol to on, kto vyzdvihol matematické bádanie na kvalitatívne vyšší stupeň svojou dôsledne uplatňovanou požiadavkou matematického dôkazu. Ako v gréckej antike sa stal *dôkaz* znovu *nonplusultra* matematiky. Na základe Eulerovho diela sa matematika vyvíjala veľmi rýchlo, ale formuláciám objavov chýbala strohosť. Matematici, uchvátení krásou a významom nových ídeí a súvislostí, sa nezdržiavali ich dôkazmi; s obľubou sa obmedzovali na vyslovovanie tzv. „predpokladov“ či „hypotéz“. Gauss však odkladal svoje priekopnícke objavy do denníka „na neskoršie“, keď nenašiel v primeranom čase ich korektný dôkaz. Podľa jeho názoru sa patrili uverejniť len a len pravdivé (teda dokázané) vety. Tento svoj striktný postoj k matematickej pravde raz komentoval svojským, ale výstižným prirovnaním: „Ani staviteľ nenechá pri svojej dokončenej stavbe stáť lešenie.“ [13] Niektorí nasledovníci mu preto vyčítali, že týmito vysokými nárokmi vlastne pôsobil „proti pokroku“, lebo matematický svet sa dostal k jeho vedomostiam o desaťročia neskôr. My však vieme a oceňujeme, že práve touto svojou dôslednosťou ukázal Gauss matematike cestu, po ktorej sa dostala do dnešných výšin! Dodajme osobný postreh: matematika je dnes asi posledné „nejazykové“ povolanie, ktoré dôsledne dbá na čistotu jazyka, vrátane pravopisu. Keby sa matematici podvolili všadeprítomnej tendencii vulgarizácie jazykového prejavu, prehrešili by sa proti odkazu Gaussa a matematika by prestala byť exaktnou vedou!

Gauss si svoj prvý objav, dôkaz zostrojiteľnosti sedemnásťuholníka, cenil najväčšmi! Bol ním taký nadšený, že si vraj želal jeho symbolické zobrazenie na svojom hrobe. Z toho sa vyvinula legenda, s ktorou sa autori príspevku zoznámili už v detstve [14]: vraj náhrobný kameň Gaussovej hrobky v Göttingene má pôdorys pravidelného sedemnásťuholníka. Nie je to pravda, ako ubezpečujú Gaussovi obdivovatelia v internete, ktorí po takom obrazci pátrali. Našli ho predsa len — ako „pozlátenú“ sedemnásťcípu hviezdu na Gaussovom monumente v Braunschweigu, neďaleko jeho rodného domu. Fotografia náhrobku a detailu hviezdice je uvedená v [6].

O Gaussovi „ako človeku“ sa v príspevku hovorí málo. Napravme teda aspoň nepriaznivo vyznievajúci dojem z jeho prioritného sporu s A. M. Legendrom (kap. 3) pripomenutím [5], že Gauss bol starostlivým otcom, ktorý zaznamenával všetko, čo sa udialo v jeho rodine, ako napr. prvé zúbky svojich detí atď. Sympatickým ho pre mnohých z nás činí i to, že zásadne nenosil vyznamenania, ktorými ho zasypávali rôzni vládcovia a potentáti.

Pravda, objavená Gaussom pre ľudstvo, pretrvá všetky jeho pamätníky; je večná, lebo jestvuje nezávisle na hmote a čase. Veru, matematika a prírodné vedy sú receptom na nesmrteľnosť; len ho treba trpezlivo, vytrvalo a cieľavedome používať!

L i t e r a t ú r a

[1] Hobst, E., Hobstová, M.: *300. výročie narodenia Leonharda Eulera.* PMFA *52* (2007), 89–99.

[2] Kolektív autorov: *Harenberg — Aktuell 2005.* Meyers Lexikonverlag, Mannheim-Leipzig--Köln-Zürich 2004, s. 75, 164.

[3] Krengel, U.: *Von der Bestimmung von Planetenbahnen zur modernen Statistik.* Mathematische Semesterberichte *53* (2006), Berlin-Köln-Frankfurt, 1–16.

[4] Mikulášek, Z.: *The benefits of the orthogonal LSM models.* Institute for Theoretical Physics and Astrophysics, Masaryk University, Brno 2007, publikácia Odesského observatória, `http://arxiv.org`

[5] Dunnington, G. W.: *The Sesquicentennial of the Birth of Gauss.* The Scientific Monthly, Vol. XXIV, Washington and Lee University 1927, 402–414.

[6] Křížek, M., Luca, F., Somer, L.: *17 Lectures on Fermat Numbers.* Springer-Verlag, New York, Inc. 2001, s. 196, 198.

[7] Brož, P., Procházka, P.: *Metoda okrajových prvků v inženýrské praxi.* Teoretická knižnice inženýra, SNTL, Praha 1987, s. 22.

[8] Kolář, V., Němec, I.: *Modelling of Soil-Structure Interaction.* Academia, Praha 1989.

[9] Rektorys, K. et al.: *Přehled užité matematiky.* SNTL, 1. vydanie, Praha 1963.

[10] Nazarov, A. A.: *Osnovy teorii i metody rasčota pologich oboloček.* Izdateľstvo literatury po strojiteľstvu, Leningrad-Moskva 1966.

[11] Kolektív autorov: *Lexikon der Mathematik 2001.* Spektrum, Akademischer Verlag Heidelberg-Berlin 2001, s. 249.

[12] Višňovský, P., Fausek, L., Šteiner, F.: *Geodézie.* Vysokoškolská učebnice, Státní zemědělské nakladatelství, Praha 1963.

[13] Fröba, S., Wassermann, A.: *Die bedeutendsten Mathematiker.* Marix Verlag, Wiesbaden 2007, s. 95.

[14] Dobrovolný, B.: *Matematické rekreace.* Technický výběr do kapsy (37), nakladatelství Práce, Praha 1961, s. 32.

Matematika a život

Štefan Schwarz, Bratislava

Matematika nám neslúži len na poznávanie prírody,
ale je tiež mohutným nástrojom na jej ovládnutie.

Štefan Schwarz

Matematika v b mol, str. 30
ed. K. Nemoga, B. Riečan

Milí poslucháči,[1])

pri slove „matematika“ vynorí sa v mysli mnohých z Vás spomienka na bezsenné noci strávené pred hrôzou vzbudzujúcimi sextánskymi školskými úlohami... Mali ste vtedy

[1]) *Poznámka redakce:* Přepis rozhlasového projevu ze dne 20. října 1945. Redakční rada se rozhodla publikovat tento projev, protože řada myšlenek Štefana Schwarze je dnes stejně tak aktuální jako před více než šedesáti lety.

Prof. RNDr. Štefan Schwarz, DrSc. (1914–1996), akademik SAV a ČSAV, byl jedním ze zakladatelů Slovenské akademie věd a ředitelem Matematického ústavu SAV. V letech 1965–1970 zastával funkci předsedy SAV.