Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Jiří Veselý

Jedno fourierovské výročí

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 52 (2007), No. 4, 282–295

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/141368

Jedno fourierovské výročí

Jiří Veselý, Praha

Nejedna knížka o Fourierových řadách připomíná, že 21. prosince 1807 Jean Baptist Joseph de Fourier (1768–1830) předložil v *Institut de France* práci [11], v níž mj. tvrdil, že lze *každou funkci* definovanou na omezeném intervalu vyjádřit jako součet nekonečné řady v sinech a kosinech; srov. [4] či [19]. Jistá neobvyklost uvedení tohoto data v ryze matematických knížkách svědčí o mimořádném významu práce: Ač vyšla v modifikované podobě tiskem až roku 1822 (viz [13]), znamenala ve vývoji matematiky významný předěl.

O životě. Fourier se narodil 21. března 1768 ve starém francouzském městě Auxerre. Rodina žila na venkově, kde byl Fourierův otec krejčím. Měl tři děti z prvního manželství a třináct z druhého manželství, mezi nimiž Joseph byl druhým v pořadí. Joseph v deseti letech osiřel, avšak naštěstí pro něj bylo včas objeveno jeho velké a všestranné nadání.

Navštěvoval vojenskou školu v Auxerre vedenou benediktiny, kde se učil živým jazykům i latině a také, jak zacházet s mapami. Prošel i solidním fyzickým tréninkem. Z knih Bezoutových a Clairautových se učil matematiku a byl nejen nadaný, ale i mimořádně pilný. Školu ukončil jako čtrnáctiletý. Vzděláním byl předurčen k vojenské či církevní kariéře, ale cestu k té vojenské mu neumožňoval prostý původ. Proto vstoupil mezi benediktiny do opatství Saint-Benoit ve Fleury jako novic a učitel matematiky.

Po dvouletém pobytu v řádu, kde žil v relativní izolaci, opustil Fleury v souladu s dekretem Národního shromáždění a vrátil se jako učitel na vojenskou školu v Auxerre. V prosinci roku 1789 předložil ve svých 21 letech Akademii věd pojednání o algebraických rovnicích, který posuzovali Monge, Legendre a Cousin. Prožíval bouřlivý čas revolučního období, kdy byl postupně několikrát uvězněn a osvobozen. V prosinci roku 1794 byl vybrán pro další vzdělávání na nově vzniklé *École Normale*, kde o 1500 studentů pečovala hrstka vybraných učitelů, mezi nimiž byli např. vynikající matematici Lagrange, Laplace a Monge.

Fourier prožil velice pestrý život. Zúčastnil se Napoleonova tažení do Egypta a v Napoleonem založeném *Institut d'Egypt* zastával funkci stálého sekretáře. Později pracoval jako prefekt kraje Isère se sídlem v Grenoblu. V té době psal svoji nejznámější matematickou práci, současně však obsáhle psal o Egyptě. Byl uznávaným egyptologem, ale i úspěšným politikem a kompetentním úředníkem dohlížejícím na stavbu silnic, na doly, vzdělávání, zdravotní péči i zemědělství. V době politických zvratů byl zbaven funkce, ale vzápětí byl ustanoven prefektem kraje Rhône v Lyonu, tedy na místě mnohem důležitějším. Od roku 1817 byl členem *Académie Française* a také

Doc. RNDr. Jiří Veselý, CSc. (1940), Matematický ústav UK, Matematicko-fyzikální fakulta UK, Sokolovská 83, 186 75 Praha 8, e-mail: Jiri.Vesely@mff.cuni.cz

Podporováno výzkumným záměrem MSM 0021620839.

Académie des Sciences, jejímž stálým sekretářem se stal roku 1822. Zemřel roku 1830 v Paříži.

Pro většinu matematiků je poněkud nepochopitelné, že Joseph Fourier byl ve Francii po dlouhou dobu méně znám než utopický socialista Charles Fourier (1772 až 1837). Joseph není zmíněn ani v *šestém* vydání francouzské *Encyclopaedia Universalis*, situace se mění teprve v poslední době; srov. [17][1]).

Fourierův významný přínos k matematice spadá do oblasti vyjádření funkcí pomocí rozvoje v trigonometrické řady. Budeme se jím zabývat a s malými odbočkami budeme postupovat chronologicky, avšak zcela důsledně to vzhledem k velkému počtu souvisejících problémů není možné.

Předchůdci. Pokusme se Fourierovu již zmíněnou práci popsat podrobněji. V části 417 v [13] píše: „*Obecně funkce $f(x)$ reprezentuje pořadí hodnot či souřadnic, každá z nich je libovolná… Nepředpokládáme, že tyto hodnoty jsou řízeny nějakým společným zákonem; následují jedna po druhé jakýmkoli způsobem a každá z nich je dána jedinečným způsobem.*“ Takové obecné pojetí funkce se sice sporadicky objevovalo i před Fourierem, mnohem častěji však šlo o *funkci definovanou nějakým analytickým výrazem.* Prakticky tomu tak bylo i u Fouriera, ač to kontrastuje s předchozím citátem. O kus dále v části 418 pak Fourier píše: „*A tak neexistuje funkce $f(x)$ nebo její část, kterou by nebylo možno vyjádřit nějakou trigonometrickou řadou*“; srov. [8]. V této obecnosti Fourierovo tvrzení samozřejmě není pravdivé.

Roku 1747 Jean d'Alembert (1717–1783) popsal řešení rovnice kmitající struny. Funkce, s nimiž pracoval, musely vyhovovat různým podmínkám, ale mj. musely mít ve všech bodech intervalu až na konečný počet výjimek n-tou derivaci pro každé $n \in \mathbb{N}$. Byla-li funkce definována „jediným vzorcem“, užíval pro ni termín *spojitá funkce.* Roku 1750 řešil rovnici pro kmitání struny Leonhard Euler (1707–1783) a dospěl k analogickým výsledkům, ukazuje se však, že pod funkcí si představoval něco jiného: Z dnešního hlediska bychom patrně popsali jím užívané funkce jako po částech reálně analytické; mluví ovšem o spojitých, nespojitých a smíšených funkcích. V takovém pojetí je např. funkce $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, nespojitá v bodě 0, protože se předpis $f(x) = -x$, $x \in (-\infty, 0]$, v bodě 0 *mění* na předpis $f(x) = x$, $x \in [0, \infty)$.

Zde však jsme na velmi tenkém ledě, neboť se v našich úvahách mísí naše *představy* o tom, jak tehdy byl pojem funkce chápán, se současným stavem našich znalostí tohoto pojmu. Pohled na funkce se u jednotlivých autorů měnil i během jejich života a to je patrné i u Eulera. Ač např. často zacházel i s divergentními řadami, když Daniel Bernoulli (1700–1782) popsal roku 1753 řešení problému kmitající struny ve tvaru trigonometrické řady, Euler tento výsledek zpochybnil: nemohl se smířit s představou, že (zhruba řečeno) *libovolná funkce* může být součtem takové řady.

Velmi vágní chápání pojmu funkce působilo matematikům značné obtíže. Není tedy divu, že v souvislosti s vyjadřováním funkcí pomocí součtů trigonometrických řad vznikly mezi předními matematiky té doby diskuse a spory. Podrobněji je to rozebráno např. v článku [23] nebo v knize [3].

---

[1]) V českém *Encyklopedickém slovníku* z roku 1993 je to naopak, Charles zmíněn není, Josephovi jsou věnována kromě životopisného ještě další dvě hesla.

Trigonometrické řady jsou obecně tvaru

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kt + b_k \sin kt)\,.$$

K prvnímu výskytu řad tohoto typu došlo dávno před Fourierem. Používané postupy byly však velmi často z dnešního hlediska nekorektní a nalezená vyjádření se z hlediska konvergence ani nezkoumala.

Euler dosáhl v manipulaci s řadami skutečné virtuozity. U něj pak již nacházíme zárodky toho, co dalo směr pozdějšímu bádání mnoha matematiků, a to jak v oblasti mocninných řad, tak i u řad *trigonometrických*. Pokusíme se čtenáře přesvědčit, že vývoj znalostí o trigonometrických řadách ovlivnil nebývalým způsobem vývoj *mnoha partií matematiky*.

Euler *chtěl sčítat* řady i mimo oblast jejich konvergence ještě dávno před užíváním sčítacích metod. Podrobněji: i když pro geometrickou řadu je pro $|x| < 1$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots\,,$$

odvodil odtud dosazením $x = 2$ vztah $-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots$; pracoval tedy i s řadami, které jsou divergentní. Pokud však s nimi on a případně jeho vrstevníci zacházeli, intuitivně se většinou vyhýbali chybným závěrům. Trvalo však ještě řadu let, nežli se podařilo tyto podněty rigorózně podložit matematickými poznatky. Situace s mocninnými řadami však byla velmi speciální: funkce, které jsou součtem mocninných řad s reálnými koeficienty a jsou definovány na nějakém intervalu (a, b), jsou *„nejcivilizovanějšími příslušníky matematického společenství, majícími derivace všech řádů“* (E. B. van Vleck, 1914). Trigonometrické řady naopak umožňují vyjádřit *patologické členy* tohoto společenství, jakými jsou např. spojité funkce nemající v žádném bodě derivaci. Poznamenejme již zde, že první dostatečně korektně prezentovaný příklad takové funkce podal Karl Weierstrass (1815–1897) roku 1872 (publikoval ho Du Bois-Reymond roku 1875) a že takovou funkci sestrojil jako součet trigonometrické řady. Tento příklad je mj. dobrou ilustrací odlišnosti od mocninných řad, taková funkce nepatří k těm „civilizovaným“ ...

Vyšetřování konvergence trigonometrických řad bylo mnohem těžší než u mocninných řad, neboť trigonometrické řady nemusí konvergovat *absolutně*. Připomeňme často citovaný názor Nielse Abela (1802–1829), který roku 1826 psal svému učiteli: *„... s výjimkou geometrické řady neexistuje v celé matematice snad jiná řada, jejíž součet by byl určen korektně. Jinak řečeno, v matematice mají nejdůležitější věci ty nejhorší základy. Je pravda, že výsledky jsou většinou správné, to je na tom nejdivnější.“* Dlužno říci, že to bylo právě v době, kdy se konvergence řad intenzivně zkoumala: Většinu standardních kritérií pro *absolutní konvergenci*, která známe ze základních kurzů analýzy, dokázal již roku 1821 Louis Augustin Cauchy (1789–1857), avšak pro neabsolutní konvergenci bylo známo pouze Leibnizovo kritérium pro „řady se střídavými znaménky“. Cauchy v učebnici [7] podal z dnešního hlediska přesné definice potřebných pojmů a dokázal základní konvergenční kritéria, která se v úvodním kurzu analýzy s drobnými změnami vykládají dodnes.

V [5] uvádí Heinrich Burkhardt (1861–1914) řadu myšlenkových zdrojů pro trigonometrické řady; výčet je velmi podrobný a je doveden cca do roku 1850. My se omezíme jen na několik nejdůležitějších momentů vývoje.

U Eulera se objevuje poprvé vyjádření funkce trigonometrickou řadou

$$\frac{\pi - t}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kt}{k}\,, \tag{1}$$

konvergenci této řady a obor platnosti (1) však Euler nezkoumal. Na jiném místě u něj nalezneme i vzorce

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(v)\cos kv\,\mathrm{d}v\,, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(v)\sin kv\,\mathrm{d}v\,, \tag{2}$$

a dokonce i vyjádření tzv. Dirichletova jádra. Jde však spíše o náhodně se vyskytující vzorec nežli popis něčeho, co hraje roli ve vyjádření částečných součtů Fourierovy řady. Vyjádření koeficientů a_k a b_k integrály v (2) se však vyskytují ještě dříve roku 1754 u Alexise Clairauta (1713–1765), a tak jistá „pověra“, že jejich autorem je Fourier, není na místě. Máme-li trigonometrickou řadu, jejíž koeficienty a_{k-1}, b_k jsou pro všechna $k \in \mathbb{N}$ dány vzorci (2), tj. trigonometrickou řadu

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kt + b_k \sin kt),$$

nazýváme tuto řadu *Fourierovou řadou* funkce f. Řada v (1) se někdy uvádí jako první historicky známá Fourierova řada, i když byla odvozena zcela jiným způsobem.

Fourierovu práci [11] z roku 1807 zmíněnou na začátku posuzovala komise, jejímiž členy byli přední matematici Lagrange, Laplace, Monge a Lacroix. Zamítavé stanovisko komise pak formuloval Poisson.

Vrátíme se k ní a všimneme si některých v ní obsažených příkladů z hlediska tehdejších znalostí. Pro funkci $f(t) = 1$, $t \in [-1, 1]$, nalezl Fourier vyjádření

$$\cos\frac{\pi t}{2} - \frac{1}{3}\cos\frac{3\pi t}{2} + \frac{1}{5}\cos\frac{5\pi t}{2} - \frac{1}{7}\cos\frac{7\pi t}{2} + \cdots \tag{3}$$

a pro funkci $f(t) = -1$, $t \in (-\pi, 0)$, $f(t) = 1$, $t \in (0, \pi)$, vyjádření tvaru

$$\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)t}{2k-1}\,. \tag{4}$$

Protože v prvním případě *absolutní hodnoty* členů řady tvoří v bodech $t = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, řadu $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots$ divergentní k $+\infty$, nekonverguje řada v těchto bodech (z dnešního hlediska) absolutně; ve druhém případě je řada z koeficientů $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ dokonce divergentní. Konvergence řad (3) a (4) *nebyla v práci dokázána* a z hlediska v té době standardních představ byla více než nejasná. Je známo, že v komisi, která

Fourierovy výsledky hodnotila, bylo zvláště Lagrangeovo stanovisko zcela neochvějné a velmi negativní. Zamítavé stanovisko komise formulované Poissonem bylo z velké části poplatné tomu, že užití trigonometrických řad k řešení problému se zdálo *velmi podezřelé*.

Fourier na připomínky reagoval dopisem, který poslal Institutu a osobně i Lagrangeovi. Když byla Institutem vypsána v roce 1811 soutěž, ve které bylo úkolem *podat matematickou teorii zákonů šíření tepla a srovnat výsledky této teorie s přesnými experimenty*, Fourier se jí zúčastnil a vyhrál ji, nicméně i tato práce [12] byla předmětem značné kritiky. Vedle uznání jejího novátorského přínosu se v posudku píše, že „*... způsob, kterým autor dospívá ke svým rovnicím, není bez obtíží...* ", a rovněž že „*... jeho analýza* (...) *zůstává něco dlužna obecnosti a přesnosti*". Tato práce nebyla opět uveřejněna a vyšla prakticky beze změn teprve roku 1824, kdy Fourier již byl stálým sekretářem Akademie.

Jakkoli by se mohlo z dalšího výkladu zdát, že Fourierovy zásluhy jsou malé, není to pravda: Trochu si je přiblížíme a zvídavějšího čtenáře odkážeme na práce [3] nebo [25]. Poznamenejme na okraj, že v této práci se poprvé řeší soustavy lineárních rovnic o *nekonečném počtu neznámých*, poprvé se zavádí *Fourierova transformace* a rozvoje v trigonometrické řady vedou k řešení *obtížných problémů*.

Problémy. Všimněme si nejprve blíže éry po uveřejnění Fourierovy práce. Označme postupně symboly $\mathcal{C}_{2\pi}$, $\mathcal{R}_{2\pi}$ a $\mathcal{L}_{2\pi}$ lineární prostory všech 2π-periodických spojitých, resp. lokálně *riemannovsky* integrovatelných, popř. lokálně *lebesgueovsky* integrovatelných funkcí. Každé funkci f z těchto prostorů lze přiřadit v závislosti na užívaném integrálu její Fourierovu řadu (F-řadu). U spojitých funkcí se spokojíme s tímto termínem, avšak v případě obecnějších funkcí budeme mluvit o Riemannově-Fourierově řadě (RF-řadě) nebo Lebesgueově-Fourierově řadě (LF-řadě), aby bylo jasné, který integrál ve vzorcích (2) užíváme. Získáme tak řadu, se kterou se vynoří široký okruh přirozených otázek (O):

(1) Konverguje tento rozvoj (tj. má takto vzniklá řada součet)? Pokud ano, je tento součet roven f?

(2) Pokud konverguje všude k funkci g, co lze v tom případě říci o velikosti množiny $\{t \in \mathbb{R} : g(t) \neq f(t)\}$?

(3) Může trigonometrická řada konvergovat k nějaké funkci f a přitom nebýt jejím Fourierovým (ev. Riemannovým-Fourierovým či Lebesgueovým-Fourierovým) rozvojem?

(4) Lze nějak charakterizovat funkce f, které jsou součtem trigonometrické řady a ta není některým ze zmíněných rozvojů?

Hledání odpovědí na tyto *těžké* otázky a podobné další problémy bylo „hnacím motorem" matematiky po téměř dvě stě let.

Roku 1821 se Cauchy rozhodl publikovat sérii přednášek, které konal pro studenty *École Polytechnique*. Cauchyho kniha [7] se stala jakýmsi manifestem moderní analýzy a podstatně ovlivnila vývoj matematiky. Cauchy v ní integruje v dnešním smyslu *spojité* funkce, a i když součtová definice „jeho integrálu“ není zdaleka tak obecná jako Riemannova, dává pro spojité funkce stejné hodnoty jako integrál Riemannův.

Jak Cauchy, tak i Poisson se pokusili dokázat tvrzení o konvergenci F-řad. Dospěli k nim shodně při vyšetřování okrajové úlohy pro Laplaceovu parciální diferenciální rovnici. Poisson v práci z roku 1820 navazuje na Lagrangeovu práci o kmitání strun, nicméně v jeho důkazu konvergence F-řad je průhledná chyba („důkaz kruhem“). Cauchy publikoval nový důkaz v práci z roku 1827, avšak i v tomto důkazu byla nalezena chyba.

Zájem velkých. Pierre G. L. Dirichlet (1805–1859) se s Fourierovými myšlenkami seznámil během svého pařížského pobytu v letech 1822–1826. Problém konvergence F-řad nemohl uniknout jeho pozornosti. Roku 1829 dokázal konvergenci Fourierovy řady pro relativně širokou třídu funkcí a jeho jméno bývá často spojováno se změnou pohledu na *pojem funkce*. Zde uvedeme jen odkaz na práce [23] a [3], kde čtenář najde podrobnější a přesnější výklad, a ukázku „nové“ definice (podle [23]): říká, že *y je funkcí proměnné x, definovanou na intervalu $a < x < b$, jestliže každé hodnotě proměnné x v tomto intervalu odpovídá určitá hodnota proměnné y. Také není důležité, jakým způsobem je toto přiřazení popsáno.* V této podobě se definice v kurzech kalkulu užívá prakticky i dnes.

Nynější přístup k Dirichletově-Jordanově větě je z velké části poplatný Dirichletovu postupu. Dirichlet dokázal, že F-řada funkce 2π-periodické funkce f konverguje k f, pokud je f po částech hladká a má na každém omezeném intervalu konečný počet (lokálních) maxim a minim (to odpovídá funkci, která je po částech monotónní). Ve skutečnosti dokázal Dirichlet více: Připouštěl i funkce f s konečně mnoha body nespojitosti t prvního druhu a dokázal, že v nich F-řada konverguje k průměru limit zprava a zleva, tj. k hodnotě $\big(f(t+) + f(t-)\big)/2$.

Dirichlet věřil, že jeho předpoklady jsou *zbytečně* restriktivní a v tomto názoru ho podpořil v dopise i Carl F. Gauss (1777–1855). Obecnější tvrzení se podařilo dokázat teprve Camillu Jordanovi (1838–1922) roku 1881; při této příležitosti je vhodné připomenout, že za pojem *funkce s konečnou variací* vděčíme nejen Jordanovu studiu křivek, ale i studiu Fourierových řad (viz [14]). Každá funkce s konečnou variací na intervalu $[0, 2\pi]$ je rozdílem dvou funkcí monotónních na tomto intervalu, nejde tedy o hluboký výsledek.

Fourier nespecifikoval integrál, který užíval. Jeho představám odpovídá pojetí integrálu jako „plochy pod grafem“. Toto pojetí bylo však neudržitelné: jiné chápání funkce vyžadovalo *zpřesnění pojmu integrálu*. Vděčíme za něj v první etapě Bernhardu Riemannovi (1826–1866) a později Henri Lebesgueovi (1821–1881). Náhled na vzorce (2) okamžitě ukazuje, jak třída funkcí, kterým lze přiřadit Fourierovu trigonometrickou řadu, závisí na integrálu, který máme k dispozici. Vývoj teorie integrálu se udál pod přímým vlivem teorie Fourierových řad: Riemann „svůj“ integrál definoval v práci [27], která je považována za *základní práci o Fourierových řadách.*

Pokud se v úvahách pohybujeme pouze v prostoru $\mathcal{C}_{2\pi}$, je základním problémem otázka, zda pro všechny $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ konverguje F-řada funkce f ve všech bodech k f. Nejenom Dirichlet, ale později i Riemann, Weierstrass a také Richard Dedekind

(1831–1916) věřili v její kladné řešení: hledal se „efektivnější“ důkaz. Překvapivé řešení problému bylo nalezeno teprve až roku 1873, kdy Du Bois-Reymond publikoval poměrně komplikovaný příklad funkce $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, jejíž F-řada diverguje v bodech husté podmnožiny $\mathbb{R}$. Příklad byl později podstatně zjednodušen. Podrobný výklad o divergenci Fourierových řad může čtenář nalézt v [28].

Z dnešního hlediska je přirozenou otázkou, co lze o množině D všech bodů, kde F-řada funkce $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ diverguje, říci. Dnes již víme, že může být hustá v $\mathbb{R}$, nemůže však obsahovat nedegenerovaný interval. Vyplývá to však z poznatků získaných podstatně později (viz dále). Pozoruhodné je, že ve smyslu baireovských kategorií je takových funkcí, jejichž F-řada nekonverguje všude v $\mathbb{R}$, v prostoru $\mathcal{C}_{2\pi}$ „většina“. Dokonce všechny funkce $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, jejichž Fourierova řada diverguje na množině 2. kategorie v intervalu $[0, 2\pi]$, tvoří v $\mathcal{C}_{2\pi}$ množinu 2. kategorie. Na druhé straně v intervalu $[0, 2\pi]$ existuje hustá podmnožina typu G_δ, že k libovolné funkci $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ existuje trigonometrická řada (a ne nutně Fourierova řada pro f), která k f na této množině konverguje. Podrobněji se lze o těchto otázkách dočíst v [16].

Obraťme nyní pozornost k nespojitým funkcím. Snadno nahlédneme, že s nimi pracoval již Dirichlet, bodů nespojitosti však bylo pouze konečně mnoho a byly to body nespojitosti prvního druhu. Neměl proto ani obtíže s jejich integrací. Navíc měl k dispozici hladkost funkce, i když jen na konečně mnoha dělicích intervalech intervalu délky 2π: můžeme se hladkosti nějak zbavit?

Z Riemannových výsledků vyplynulo, že lze přiřadit FR-řadu všem *omezeným* 2π-periodickým funkcím, které jsou ve smyslu Lebesgueovy míry spojité skoro všude; to je známá nutná a postačující podmínka existence Riemannova integrálu. Pro tyto funkce jsou však otázky analogické otázkám (O) složitější. V každém případě je nutno zacházet se složitějšími množinami, a tak není divu, že teorie trigonometrických řad souvisí se vznikem *teorie množin*.

Znalosti o množinách, jejichž teorie nebyla ještě konstituována, byly velmi omezené. Tak např. Rudolf Lipschitz (1832–1903) se domníval, že pro řídké množiny $A \subset \mathbb{R}$ platí, že jejich derivace A' (množina hromadných bodů A) je konečná. Na druhé straně dospěl k cennému výsledku: zhruba řečeno, nahradil roku 1864 ve své doktorské práci Dirichletem použitou podmínku „po částech monotónní“ podmínkou „po částech lipschitzovská“. Uvažoval i o možnostech zobecnění integrálu, neznal však Riemannovu zásadní práci [27], která byla vydána později, až po Riemannově smrti; byla to Riemannova habilitační přednáška z roku 1854.

Některé složité otázky pro trigonometrické řady Riemann úspěšně vyřešil. Ukázal například, že konvergence FR-řady funkce f v bodě $t \in \mathbb{R}$ závisí pouze na chování f v okolí bodu t, což je *princip lokalizace*. Uvědomoval si také, že trigonometrická řada s omezenou posloupností koeficientů po integraci „člen po členu“ konverguje. Dnes víme, že se konvergence řady zlepšuje: Po dvojí integraci člen po členu vznikne řada, která je zřejmě stejnoměrně konvergentní. A tak trigonometrické řady přispěly podstatně i ke studiu *stejnoměrné konvergence*.

Jedním z Weierstrassových žáků, který se hodně zasloužil o prozkoumání stejnoměrné konvergence, byl Eduard Heine (1821–1881). Jemu náleží mj. i výsledek, že F-řada funkce $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, která je na každém omezeném intervalu po částech monotónní, konverguje k f stejnoměrně. Tento poznatek je z roku 1870 z práce [15] o trigonometrických řadách. Pro tyto a i pro poněkud obecnější funkce (takové, které jsou součtem *po částech* stejnoměrně konvergentní trigonometrické řady na $[0, 2\pi]$) dokazoval jednoznačnost vyjádření trigonometrickou řadou. Jde o problém, kdy z rovnosti

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kt + b_k \sin kt) = 0 \tag{5}$$

vyplývá $a_0 = a_k = b_k = 0$, $k \in \mathbb{N}$. Pokud rovnost (5) platí všude v $[0, 2\pi]$ s výjimkou konečné množiny P a konvergence je na $[0, 2\pi] \setminus P$ stejnoměrná, Heine jednoznačnost dokázal. Heine poznamenává, že k předpokladům užitým při řešení problému ho přivedl Georg Cantor (1845–1918). Ten se ve stejné době intenzivně zabýval problémy jednoznačnosti vyjádření funkce trigonometrickými řadami (srov. [6]).

Fourier se svou prací nepřímo postaral o nastolení problémů dvojího typu. Šlo o pravdivost následujících dvou tvrzení:

(1) Je-li funkce f omezená 2π-periodická funkce, která je součtem trigonometrické řady, pak je tato řada její Fourierovou řadou.

(2) Řadu funkcí lze integrovat „člen po členu", tj. obecně platí rovnost

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(t)\, \mathrm{d}t. \tag{6}$$

Později s příchodem exaktních definic integrálů (např. Riemannova či Lebesgueova) bylo nutno tyto problémy studovat i s ohledem na používaný integrál. Fourier věřil v platnost vztahů v (2) a užíval rovnost (6) k důkazu tvrzení (1). Teprve však na konci 19. stol. bylo známo, že např. $f(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(t)$ nemusí být riemannovsky integrovatelná funkce, i když jsou částečné součty řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(t)$ vesměs stejně omezené. Ukázalo se však, že „závada leží v použitém integrálu": Jsou-li u_n, $n \in \mathbb{N}$, a f stejně omezené lebesgueovsky integrovatelné funkce, rovnost (6) platí, chápeme-li integrály v Lebesgueově smyslu. V dnešní době se často používá při integraci řad spojitých funkcí člen po členu stejnoměrná konvergence, např. při odvozování vzorců pro Fourierovy koeficienty; na této úrovni vystačíme s jakýmkoli integrálem. A tak vstup stejnoměrné konvergence do širšího povědomí byl ovlivněn i Fourierovými řadami. Poznamenejme v této souvislosti, že např. spojitá nikde diferencovatelná funkce, kterou Weierstrass sestrojil, má tvar součtu *stejnoměrně konvergentní* F*-řady*.

Vraťme se k Jordanovu výsledku o bodové konvergenci FR-řady. Zavedením funkcí s konečnou variací se dokázal elegantně zbavit u vyšetřované funkce monotonie po částech: Funkce mohla mít již nekonečně mnoho lokálních maxim a minim. Na druhé straně je taková funkce *rozdílem dvou nezáporných neklesajících funkcí*, má tedy „automaticky" pouze spočetně mnoho nespojitostí prvního druhu a má také skoro všude v Lebesgueově smyslu (vlastní) derivaci. Za zmínku stojí i fakt, že stále stačí pracovat s Riemannovým integrálem; důkaz existence Riemannova integrálu z funkce monotónní na $[a, b]$ je mimochodem lehký. Přesto se již v 19. století objevovaly pokusy o zobecnění integrálu (např. u Lipschitze nebo Weierstrasse). Skutečným řešením však byl úspěšný pokus, vedoucí k dnes patrně nejpoužívanějšímu integrálu, za který vděčíme Lebesgueovi. Z hlediska Fourierových řad je na něm zajímavé to, že jím lze integrovat i neomezené a „hodně nespojité“ funkce.

Dvacáté století. Je-li $f \in \mathcal{L}_{2\pi}$, lze pro ni *Lebesgueovým* integrálem pomocí vzorců (2) spočíst Fourierovy koeficienty a vytvořit FL-řadu funkce f. Její koeficienty závisejí na f, a tak je vhodné si uvědomit, co můžeme očekávat. Liší-li se funkce $f, g \in \mathcal{C}_{2\pi}$ v jediném bodě, liší se nutně i na nějakém intervalu a lze intuitivně očekávat, že se budou lišit i jejich koeficienty Fourierova rozvoje dané vzorci (2). Jakmile však začneme pracovat s funkcemi z $f, g \in \mathcal{R}_{2\pi}$, dávají tyto funkce stejné hodnoty koeficientů v (2) např. pro každou *konečnou* množinu $M = \{f(t) \neq g(t) \colon t \in [-\pi, \pi]\}$; Riemannův integrál z každé charakteristické funkce konečné množiny je roven 0. To však nastane i pro *některé* nekonečné spočetné množiny M, ale může se i stát, že liší-li se dvě funkce na *spočetné* podmnožině intervalu, Riemannův integrál z jedné na tomto intervalu bude existovat a z druhé nikoli. Zatímco tedy Riemannův integrál v popsaném smyslu „necítí“ konečné množiny, obecnější Lebesgueův integrál funkce $f \in \mathcal{L}_{2\pi}$ „necítí“ i nekonečné spočetné množiny a obecněji jakoukoli množinu $M \subset [-\pi, \pi]$, která má Lebesgueovu míru 0.

Z tohoto hlediska není překvapivé, že F-řady měly obrovský vliv na rozvoj *teorie integrálu* a také že Lebesgue brzy po publikaci zásadní práce o integrálu [20] obrátil svoji pozornost k trigonometrickým řadám. K některým výsledkům, ke kterým dospěl, se dostaneme později.

Sčítací metody. Již zmíněný výsledek Du Bois-Reymondův, ukazující že F-řada funkce $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ může v některých bodech divergovat, ovlivnil podstatně náhled na práci s divergentními řadami. Pohlédněme trochu nazpět: Podstatně dříve byla známa vlastnost limity aritmetických průměrů členů posloupnosti, tj. že pro posloupnost $\{d_k\}_{k=0}^{\infty}$ platí implikace

$$\lim_{k\to\infty} d_k = D \in \mathbb{R} \implies \lim_{n\to\infty} \frac{d_0 + d_1 + \cdots + d_n}{n+1} = D. \tag{7}$$

Dokázal ji Cauchy roku 1821, sahá však až k pracím d'Alemberta z roku 1768 a Daniela Bernoulliho (1700–1782) z roku 1771. Vlivem Cauchyho však divergentní řady na čas z matematiky zcela vymizely. V [7] píše: *„Musel jsem vyjít z předpokladů zdánlivě trochu tvrdých, např. že divergentní řady nemají součet.“*

První podstatná aplikace sčítací metody založené na (7) se objevuje u Ernesta Cesàra (1859–1906) roku 1890. Jestliže konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$ a řada $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$, pak jejich *Cauchyho součin*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k\,, \quad \text{kde} \quad c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0,$$

nemusí konvergovat. Cesàro mj. dokázal, že i když částečné součty $s_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$ tvoří divergentní posloupnost, limita jejich aritmetických průměrů existuje a je rovna AB.

Takový výsledek by patrně sám o sobě k rehabilitaci práce s divergentními řadami pomocí sčítacích metod nestačil. Později, roku 1900, Lipót Fejér (1880–1959) dokázal, že částečné součty F-řady funkce $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ v bodě t mají analogickou vlastnost: jejich průměry konvergují *vždy* k funkční hodnotě $f(t)$. Popsaná metoda se nazývá Cesàrova sčítací metoda. Cesàrova sčítací metoda tak dává pro $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ *cesàrovskou sčitatelnost její Fourierovy řady* k f. Vzhledem ke stejnoměrnosti konvergence aritmetických průměrů částečných součtů Fourierovy řady, což jsou trigonometrické polynomy, vede tudy cesta k důkazu trigonometrické verze Weierstrassovy aproximační věty, ukazující na úzký vztah k *teorii aproximace*; viz též [26].

Je přirozené se ptát, zda dostaneme analogické výsledky pro případ, kdy budeme pracovat s Lebesgueovým integrálem: Je-li $f \in \mathcal{L}_{2\pi}$, musí její FL-řada v nějakém bodě t konvergovat? A pokud ano, musí pak konvergovat k $f(t)$? První otázku zodpověděl roku 1922 Andrej N. Kolmogorov (1903–1987), když sestrojil takovou funkci $f \in \mathcal{L}_{2\pi}$, jejíž rozvoj *skoro všude diverguje*. Později roku 1936 sestrojil Józef Marcinkiewicz (1910–1940) dokonce takovou funkci, pro kterou byly částečné součty FL-řady omezené, ale řada přesto divergovala skoro všude v $\mathbb{R}$; viz [28]. Očekávalo se, kdy se podaří sestrojit spojitou funkci, tj. z $\mathcal{C}_{2\pi}$, s touto vlastností.

To se však nezdařilo ze zásadního důvodu: Lennart Carleson (* 1928) v roku 1966 dokázal, že *FL-řada funkce $f \in \mathcal{L}^2_{2\pi}$ konverguje skoro všude v $\mathbb{R}$*; větu později zobecnil Richard Hunt (* 1937). Protože $\mathcal{C}_{2\pi} \subset \mathcal{L}^2_{2\pi}$, i v případě spojité funkce z $\mathcal{C}_{2\pi}$ má tato *špatná množina* nulovou Lebesgueovu míru. Roku 1966 Jean-Pierre Kahane (* 1926) a Yitzhak Katznelson (* 1934) dokázali, že ke *každé* množině $M \subset [0, 2\pi]$ nulové Lebesgueovy míry existuje dokonce $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, jejíž Fourierova řada diverguje ve všech bodech M.

Je přirozené se ptát po možnostech „vylepšení“ pomocí sčítacích metod. Opět vystačíme s cesàrovskou sčitatelností: Je-li $f \in \mathcal{L}_{2\pi}$, pak ve všech bodech t, v nichž existují vlastní limity $f(t+)$ a $f(t-)$, je Fourierova řada funkce f sčitatelná k hodnotě $\big(f(t+) + f(t-)\big)/2$. I tato věta pochází od Fejéra. Není bez zajímavosti, že stejného výsledku lze dosáhnout komplikovanější sčítací metodou, kterou lze stopovat až k Riemannovi; o ní se ještě zmíníme. Speciálně pro každou 2π-periodickou funkci f s lokálně konečnou variací FR-řada pro f konverguje v každém bodě $t \in \mathbb{R}$ k $\big(f(t+) + f(t-)\big)/2$. Z hlediska Fejérova výsledku bylo žádoucí zjistit, jak je to se sčitatelností FL-řad funkcí z $\mathcal{L}_{2\pi}$. Možná trochu překvapivý výsledek říká, že ač taková FL-řada funkce f může divergovat *všude v* $\mathbb{R}$, lze ji pomocí Cesàrovy sčítací metody *skoro všude*, tj. s výjimkou množiny Lebesgueovy míry 0 v $\mathbb{R}$, sečíst k funkci f: již roku 1905 totiž Lebesgue dokázal, že cesàrovské průměry $\sigma(f, t)$ FL-řady funkce $f \in \mathcal{L}_{2\pi}$ konvergují k f v tzv. *Lebesgueových bodech* f. S ohledem na necitlivost Lebesgueova integrálu vzhledem ke změnám integrované funkce na množině míry 0 lepší výsledek v tomto případě nelze očekávat.

Ještě nazpět. Obraťme se k vlivu teorie trigonometrických řad na rozvoj *teorie množin*. Začneme opět v 19. století. Množinu $E \subset (0, 2\pi)$ nazveme U-množinou (*množina jednoznačnosti*), pokud platí: Konverguje-li trigonometrická řada mimo množinu E k 0, má všechny koeficienty rovny 0. Podobně množinu $E \subset (0, 2\pi)$ nazveme *M-mno-*

žinou (*množina nejednoznačnosti*), pokud platí: Existuje trigonometrická řada, která má součet 0 všude mimo E a která *nemá* všechny koeficienty rovny 0.

Již Cantor dokázal, že pokud trigonometrická řada konverguje k 0 všude nebo všude až na (lokálně) konečnou množinu, jsou její koeficienty vesměs rovny 0. Dokázal dokonce ještě více: Každá *redukovatelná* množina, tj. množina, jejíž uzávěr je spočetný, je U-množina. William Young (1863–1942) a Felix Bernstein (1878–1956) v letech 1908–9 dospěli k částečnému objasnění situace: Každá *spočetná množina je U-množina* a každá U-množina *má míru* 0; každá M-množina má *kladnou míru.* To vedlo k domněnce, že snad množiny míry 0 jsou vždy U-množinami, ale ta se ukázala nesprávná. Roku 1916 Dimitrij E. Menšov (1892–1988) sestrojil rafinovaný protipříklad. Odtud vedla cesta k dalším hlubokým problémům teorie funkcí.

Označíme-li n-tý částečný součet Fourierovy řady funkce f v bodě t symbolem $s_n(f,t)$ a

$$\sigma_n(f,t) = \frac{s_0(f,t) + s_1(f,t) + \cdots + s_n(f,t)}{n+1},$$

lze snadno vyjádřit tyto součty pomocí *Dirichletova jádra* D_n a *Fejérova jádra* F_n

$$s_n(f,t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)D_n(x-t)\,\mathrm{d}x, \quad \sigma_n(f,t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)F_n(x-t)\,\mathrm{d}x,$$

kde je

$$D_n(x) = \frac{\sin(n+1/2)t}{2\sin(t/2)}, \quad F_n(x) = \frac{2}{n+1}\left(\frac{\sin(n+1)t/2}{2\sin(t/2)}\right)^2.$$

Obě tato jádra mají některé podobné vlastnosti, v jedné se však podstatně liší: Fejérovo jádro je *nezáporné.* To umožňuje dokazovat v dnešní době Fejérovu větu pro funkce z $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ jednoduše přes zobecnění Korovkinovy věty o třech funkcích[2]); srov. [23].

Poměrně brzo bylo známo, že trigonometrická řada o součtu f nemusí být F-řadou této funkce. Dnes se sice každý student v základním kurzu analýzy dozví, že k tomu, aby to nastalo, stačí stejnoměrná konvergence výchozí trigonometrické řady, ale to je triviální výsledek. Roku 1906 dokázal Pierre Fatou (1878–1929), že ač řada

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin kt}{\log k} \tag{8}$$

konverguje *stejnoměrně* na intervalu $[a, 2\pi - a]$ pro každé $a \in (0,\pi)$, *není* F-řadou svého součtu. Dodnes však neexistuje způsob, jak z koeficientů trigonometrické řady obecně poznat, zda je FL-řadou. V této souvislosti je třeba zajímavé (srov. s (8)), že řada

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos kt}{\log k}$$

[2]) Jde o tuto větu: *Jsou-li L_n, $n \in \mathbb{N}$, nezáporná lineární zobrazení prostoru všech spojitých funkcí $\mathcal{C}([a,b])$ do $\mathcal{C}([a,b])$ a jestliže posloupnost funkcí $L_n f_j$ konverguje stejnoměrně na $[a,b]$ k f_j pro $f_j(x) = x^j$, $x \in [a,b]$, $j = 0,1,2$, potom posloupnost funkcí $L_n f$ konverguje stejnoměrně na $[a,b]$ k f pro každou $f \in \mathcal{C}([a,b])$.*

FL-řadou je! V roce 1912 Charles de la Vallée Poussin (1866–1962) dokázal, že pokud trigonometrická řada konverguje *všude ke konečné funkci* $f \in \mathcal{L}_{2\pi}$, *je* FL*-řadou funkce* f. Tvrzení je s ohledem na předpoklad konvergence *všude* poněkud nepřirozené. To vedlo k hledání dalších speciálních integrálů, které by se s tímto problémem vyrovnaly lépe. Jedním z nich je tzv. A-integrál (viz např. [2]). Platí zde však jistá vyváženost: Získá-li takový nový integrál lepší vztah k Fourierovým řadám, ztratí některé jiné typické vlastnosti integrálu. Podrobněji tuto otázku probírat nebudeme, viz např. [2].

Již víme, že pokud trigonometrická řada konverguje k funkci f stejnoměrně, je také Fourierovou řadou f. Má-li trigonometrická řada standardní tvar

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{9}$$

stačí pro její stejnoměrnou konvergenci splnění podmínky

$$\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k| + |b_k|) < \infty, \tag{10}$$

avšak ne všechny FL-řady mají absolutně konvergentní řady koeficientů, a tudíž i spojitý součet. Bylo by hezké, kdyby např. každá všude konvergentní trigonometrická řada byla FL-řadou svého součtu. To však *neplatí*! Bez důkazu uveďme, že trigonometrická řada (9) splňuje podmínku (10), jestliže konverguje *absolutně* na množině $M \subset \mathbb{R}$ *kladné* Lebesgueovy míry. Toto tvrzení dokázali roku 1912 Arnaud Denjoy (1884–1974) a Nikolaj N. Luzin (1883–1950).

A dále... Již jsme poukázali na vliv Fourierových řad na chápání pojmu funkce, na vyšetřování konvergence řad, na užívání sčítacích metod, na budování teorie integrálu, teorie množin a teorie reálných funkcí. Kdybychom chtěli zcela vyčerpat vazby teorie trigonometrických řad na jiná odvětví matematiky, byl by to v rámci článku nedosažitelný cíl. Je však na místě se o některých dalších vlivech alespoň krátce zmínit. Začněme např. s *teorií aproximace*. Aproximace funkcí pomocí ortogonálních polynomů různých typů má kořeny v teorii Fourierových řad (Hermitovy polynomy, Laguerrovy polynomy apod.). Weierstrassovy věty o aproximaci klasickými polynomy a trigonometrickými polynomy z roku 1885 spolu úzce souvisejí a jednu lze dokázat z druhé. Všechny ingredience možného jednoduchého důkazu její „trigonometrické verze“ byly — jak již bylo řečeno — známy Heinemu už v roce 1870, avšak na tento alternativní důkaz pomocí Fourierových řad upozornil teprve roku 1892 Matyáš Lerch (1860–1922); srov. [22].

Mnoho výsledků, které jsou v dnešní době součástí *funkcionální analýzy*, má svůj předobraz v tvrzeních o trigonometrických nebo FL-řadách. Sahá to od důležitých jednotlivých vět, jakou je např. Rieszova-Fischerova věta z roku 1907, přes nekonečné báze (Schauderova báze) až po celé části funkcionální analýzy, jako je např. teorie Hilbertových prostorů. Naopak funkcionální analýza ovlivnila F-řady, např. již dnes standardní důkaz existence spojité funkce s divergentní Fourierovou řadou je z roku 1906 a pochází od Lebesguea. Původně byl záležitostí „hard analysis“ a byl veden přes „metodu klouzavého hrbu“. V dnešní době se k důkazu této věty velmi často užívá Banachova-Steinhausova věta. Někteří autoři dokonce historii „obracejí“ a začínají výklad o Fourierových řadách po probrání jejich abstraktní verze v Hilbertově separabilním prostoru.

Úzký vztah k parciálním diferenciálním rovnicím by měl být zřejmý již při pohledu na název práce [13]. Ve druhé kapitole je studována rovnice pro vedení tepla a ve třetí je pak řešena Dirichletova úloha pro nekonečný pás. Fourier dospěl poněkud krkolomným postupem k analytickému vyjádření jejího řešení ve speciálním případě, přičemž *„užitá metoda je mnohem důležitější nežli výsledek“* (viz [18]). Byl totiž první, kdo dospěl k řešení parciální diferenciální rovnice použitím všech ingrediencí metody separace proměnných. Vyjádřil řešení rovnice ve tvaru součinu $F(x)f(y)$ funkcí *jedné proměnné* a po dosazení do Laplaceovy rovnice obdržel dvojici rovnic

$$F''(x) = m^2F(x), \quad f''(y) = -m^2f(y).$$

Po vyřešení problém opustil a obsáhle se věnoval *vyjádření libovolné funkce součtem trigonometrické řady.*

V již letmo zmíněné Riemannově sčítací metodě, úzce svázané s trigonometrickými řadami, spatřují někteří matematici zárodek *teorie distribucí*; je z Riemannovy habilitační přednášky. Dnes je původní podoba metody překryta dalšími pojmy: užívá se např. Schwarzova symetrická derivace, která se zrodila z vyšetřování konvergence trigonometrických řad.

Dosud uvedené příklady by neměly čtenáře svést k domněnce, že jsou vesměs „teoretické“: zde je vhodné zmínit např. využití v digitálních fotoaparátech, užívajících obrazový formát `*.jpg`, nebo *rychlou Fourierovu transformaci* (běžná zkratka *FFT* je z anglického názvu *fast Fourier transform*) a *wavelety.* Uveďme krátký citát *„Rychlá Fourierova transformace je nejcennějším numerickým algoritmem naší doby“* (G. Strang, 1993), který přiléhavě charakterizuje význam *FFT.* Bez ní se dnes neobejde počítačová tomografie. Užitečnost waveletů je mnohostranná a sahá od aplikací ve statistice k využití při analýze signálů, přes astronomii k ekonomickým aplikacím až po kompresi dat. O efektivitě svědčí jejich využití ke skladování obrovských databází otisků prstů v F. B. I. nebo při filtraci rušivých signálů a při rozeznávání lidské řeči. Často se zdůrazňuje, že wavelety přinesly s sebou jiný a nový způsob myšlení. Doufám, že čtenář bude na základě vybraných ukázek z historie souhlasit, že z hlediska dlouhodobého vývoje matematiky to *mnohonásobně platí o Fourierových řadách.*

L i t e r a t u r a

[1] BACHMAN, G., NARICI, L., BECKENSTEIN, E.: *Fourier and Wavelet Analysis.* Springer, New York 2000.

[2] BARI, N. K.: *Trigonometričeskije rjady.* GIFML, Moskva 1961.

[3] BOTTAZZINI, U.: *The higher calculus: Real and complex analysis from Euler to Weierstrass.* Springer, New York 1986.

[4] BRESSOUD, D.: *A radical approach to real analysis.* The Mathematical Association of America, Washington 1994.

[5] Burkhardt, H.: *Trigonometrische Reihen und Integrale.* Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen, Bd. II A 12, Teubner, Leipzig 1904.

[6] Cantor, G.: *Beweis, das eine für jeden reellen Wert von x durch eine trigonometrische Reihe gegebene Funktion $f(x)$ sich nur auf eine einzige Weise in dieser Form darstellen lässt.* J. Reine Angew. Math. *72* (1870), 139–142.

[7] Cauchy, A. L.: *Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique.* Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy (1882–1974), Paris 1921.

[8] Coppel, W. A.: *J. B. Fourier — On the occasion of his two hundredth birthday.* Amer. Math. Monthly *76* (1969), 468–483.

[9] Dirichlet, P. G. L.: *Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre les limites données.* Werke 1, Berlin, J. Reine Angew. Math. (1829), 117–132.

[10] Fejér, L.: *Untersuchungen über Fourierische Reihen.* Math. Ann. *58* (1904), 51–69.

[11] Fourier, J. B. J.: *Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides* (nepublikováno) pro *Institute de France.* Paris, podáno 21. prosince 1807.

[12] Fourier, J. B. J.: *Mémoire sur la propagation de la chaleur.* Paris 1824 (revidovaná verze *Mémoiru* (1807) přihlášená do soutěže o *Grand prix de mathématique* pro rok 1812; byla podána již roku 1811).

[13] Fourier, J. B. J.: *Théorie analytique de la chaleur.* Didot, Paris 1822.

[14] Hawkins, T.: *Lebesgue's theory of integration. Its origins and development.* University of Wisconsin Press, Madison 1970.

[15] Heine, E.: *Über trigonometrische Reihen.* J. Reine Angew. Math. *71* (1870), 353–365.

[16] Kahane, J.-P.: *Baire's category theorem and trigonometric series.* Journal d'Analyse Mathématique *80* (2000), 143–182.

[17] Kahane, J.-P.: *The heritage of Fourier.* Perspectives in analysis, *5*, Math. Phys. Stud., *27*, 83–95, Springer, Berlin 2005.

[18] Kahane, J.-P., Lemarié-Rieusset, P.-G.: *Fourier series and wavelets.* Gordon and Breach Publ., London 1996.

[19] Lasser, R.: *Introduction to Fourier series.* Marcel Dekker, Inc., New York 1996.

[20] Lebesgue, H.: *Intégrale, longuer, aire* (Thèse). Annali Mat. Pura e Appl. (3) *7* (1902), 231–259.

[21] Lebesgue, H.: *Sur les séries trigonométriques.* Ann. Scient. l'École Norm. (3) *20* (1903).

[22] Lerch, M.: *Sur un point de la théorie des fonctions génératrices d'Abel.* Acta Math. *27* (1903), 339–351.

[23] Lomelí, H. E., García, C. L.: *Variations on a Theorem of Korovkin.* Amer. Math. Monthly *113* (2006), 744–750.

[24] Lützen, J.: *The solution of partial differential equations by separation of variables: a historical survey.* Studies in mathematics 26, MAA, Washington 1987, 242–277.

[25] Paplauskas, A. B.: *Trigonometričeskije rjady.* Nauka, Moskva 1966.

[26] Pinkus, A.: *Weierstrass and approximation theory.* J. Approx. Theory *107* (2000), 1–66.

[27] Riemann, B.: *Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe* (Gesammelte Werke). Göttingen *13* (1867), 47 str., Göttingenský bibliografický server.

[28] Štěpánek, F.: *130 let divergentních trigonometrických Fourierových řad.* PMFA *49* (2004), 53–60, 122–128.

[29] Veselý, J.: *Weierstrassova věta o aproximaci.* PMFA *47* (2002), 181–190.

[30] Weierstrass, K.: *Über continuirliche Funktionen eines reellen Arguments, die für keinen Werth des letzteren einen bestimmten Differentialquotienten besitzen (Gelesen Akad. Wiss. 18. Juli 1872).* Berlin 1872 (na základě Weierstrassova dopisu publikoval roku 1875 tento příklad P. D. Du Bois-Reymond).

[31] Zygmund, A.: *Notes on the history of Fourier series.* Studies in Mathematics 13, MAA, Washington 1976, 1–19.