Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Vojtěch Pravda

Maticové Lieovy grupy a Lieovy algebry

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 52 (2007), No. 3, 219–230

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/141361`

Maticové Lieovy grupy a Lieovy algebry

Vojtěch Pravda, Praha

1. Úvod

Mnoho systémů studovaných ve fyzice má nějakou symetrii, tj. nezmění se při provedení určité transformace. Například (idealizovaná) sněhová vločka vypadá stejně v zrcadle nebo po pootočení o 60°, koule se nezmění při otočení kolem libovolné osy procházející jejím středem. Můžeme také složit dvě různé operace, při kterých se systém nezmění, a stav systému stále zůstává stejný — množina všech symetrií daného systému je tedy grupou, která může mít podle povahy systému konečný počet prvků, může být spočetná nebo může spojitě záviset na několika parametrech. V tomto článku se zaměříme na Lieovy grupy odpovídající spojitým grupám symetrií.

U zrodu teorie Lieových grup a Lieových algeber stál v sedmdesátých letech devatenáctého století norský matematik Sophus Lie (1842–1899), který je objevil při studiu vlastností řešení diferenciálních rovnic. Lieovy algebry též nezávisle nalezl německý matematik Wilhelm Killing při studiu neeuklidovských geometrií. Později k této teorii významně přispěli zejména francouzský matematik Élie Cartan a německý matematik Hermann Weyl, který byl motivován problémy teorie relativity. Z toho je patrné, že Lieovy grupy v sobě spojují prvky z několika matematických oblastí — analýzy, algebry a geometrie. Více o zajímavé historii vzniku a rozvoje teorie Lieových grup a Lieových algeber lze nalézt např. v [1, 2].

V dnešní době se Lieovy grupy a Lieovy algebry používají např. při řešení diferenciálních rovnic [3], v diferenciální a algebraické geometrii, klasické a kvantové mechanice, při popisu interakcí elementárních částic, v teorii relativity, teorii strun atd. Při těchto aplikacích Lieovy grupy často vystupují jako grupy symetrií studovaného objektu.

Cílem tohoto článku je umožnit čtenáři první částečné, avšak přístupné seznámení s Lieovými grupami. K obvyklému zavedení Lieových grup je nutné ovládat některé partie diferenciální geometrie. My se proto budeme zabývat pouze tzv. *maticovými Lieovými grupami.* Tuto speciální třídu Lieových grup lze totiž zavést jednodušším způsobem, snáze lze pro ni dokázat některé věty, které platí pro všechny Lieovy grupy, a navíc zahrnuje většinu zajímavých a praktických příkladů Lieových grup.

Poté, co si v úvodu připomeneme definici grupy, dostaneme se ve druhé kapitole k maticovým Lieovým grupám, ve třetí kapitole se budeme věnovat exponenciále matice, ve čtvrté kapitole Lieovým algebrám a na závěr si uvedeme několik jednoduchých příkladů. Zájemcům o podrobnější informace o Lieových grupách doporučujeme např.

Mgr. Vojtěch Pravda, Ph. D. (1971), Matematický ústav AV ČR, v. v. i., Žitná 25, 115 67 Praha 1, e-mail: `pravda@math.cas.cz`

úvodní práce [4]–[8], o které se mimo jiné v tomto článku opíráme. Tam lze také nalézt důkazy vět, které zde až na výjimky neuvádíme.

Připomeňme si definici grupy:

Definice 1. *Grupa* je množina G se zobrazením z $G \times G$ do G (značíme $g * h$), které splňuje následující vlastnosti:

i) *Asociativita:* Pro všechna $g, h, k \in G$ platí $g * (h * k) = (g * h) * k$.

ii) Existuje *jednotkový prvek* $e \in G$ takový, že pro všechna $g \in G$ platí $g * e = e * g = g$.

iii) Ke každému $g \in G$ existuje *inverzní prvek* $g^{-1} \in G$, pro který $g^{-1} * g = g * g^{-1} = e$.

Uveďme si několik příkladů grup, další lze nalézt např. v popularizačních článcích [9]:

- Celá čísla s operací sčítání ($e = 0$, $n^{-1} = -n$).
- Reálná čísla s operací sčítání, či nenulová reálná (komplexní) čísla s operací násobení ($e = 1$, $x^{-1} = 1/x$).
- Obecná lineární grupa $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$: reálné (komplexní) regulární matice $n \times n$ s operací násobení matic. (Jednotkovým prvkem je jednotková matice, inverzním prvkem je inverzní matice.)
- Příkladem grupy je též množina všech rotací ve třírozměrném prostoru, kterou jsme již zmiňovali a která úzce souvisí s grupou $\mathrm{SO}(3)$ (viz níže). Důležitou vlastností této grupy je, že můžeme říci, zda si jsou dvě rotace v určitém smyslu blízké, a navíc můžeme rotace i spojitě parametrizovat pomocí vhodně zvolených úhlů. Tyto vlastnosti úzce souvisí s tím, že grupa rotací je Lieova grupa.

Na závěr úvodní části si ještě připomeňme pojem podgrupy.

Definice 2. *Podgrupa* grupy G je podmnožina $H \subset G$, pro kterou platí

i) $e \in H$,

ii) $h \in H \implies h^{-1} \in H$,

iii) $h_1, h_2 \in H \implies h_1 * h_2 \in H$.

Příklady podgrup:

- Množina všech sudých čísel je podgrupou celých čísel s operací sčítání.
- $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ – množina všech reálných matic s determinantem 1 je podgrupou $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.

2. Maticové Lieovy grupy

Před zavedením maticových Lieových grup si řekněme, že prostor všech komplexních matic $n \times n$ budeme značit $M_n(\mathbb{C})$, a uveďme si dvě potřebné definice.

Definice 3. Nechť A_m je posloupnost matic z $M_n(C)$. Říkáme, že A_m *konverguje* k nějaké matici A, pokud prvek matice $(A_m)_{kl}$ konverguje k A_{kl} pro všechna celá k, l v intervalu $\langle 1, n\rangle$.

Definice 4. *Maticová Lieova grupa* G je libovolná podgrupa grupy $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, pro kterou platí: Nechť A_m je libovolná posloupnost matic z G. Pokud A_m konverguje k nějaké matici A z $M_n(\mathbb{C})$, potom $A \in G$ nebo A je singulární.

Maticová Lieova grupa G je tedy uzavřená v $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$.

Protipříklad: Grupa regulárních matic s racionálními prvky je sice podgrupou $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, není však uzavřená — snadno v této grupě najdeme posloupnost konvergující k nějaké reálné matici, jejíž alespoň jeden prvek je iracionální.

Uveďme si několik příkladů maticových Lieových grup:

- *Obecné lineární grupy* $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ a $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ jsou maticové Lieovy grupy. Pro $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ je tvrzení triviální. Pro $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ si stačí uvědomit, že konvergentní posloupnost reálných matic má reálnou limitu a ta je buď singulární, nebo patří do $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.
- *Speciální lineární grupy* $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ a $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ jsou maticové Lieovy grupy — jsou to podgrupy grupy $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ a konvergentní posloupnost matic s determinantem 1 má limitu rovněž s determinantem 1, a tudíž z $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ nebo $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$.
- *Ortogonální grupa* $\mathrm{O}(n)$ je grupa lineárních transformací (matic) na reálném vektorovém prostoru V, které zachovávají skalární součin, tj.

$$A \in \mathrm{O}(n) \iff \langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle \quad \forall x, y \in V.$$

To lze ve složkovém zápisu zapsat jako

$$A_{li}x_iA_{lj}y_j = \delta_{ij}x_iy_j \implies (A_{li}A_{lj} - \delta_{ij})x_iy_j = 0,$$

kde δ_{ij} je tzv. Kroneckerovo delta, které nabývá hodnot 1 pro $i = j$ a 0 pro $i \neq j$. Výše jsme použili tzv. Einsteinovu sumační konvenci[1]). V maticovém tvaru lze pak předchozí vztah zapsat jako

$$(A^\top A - I)xy = 0,$$

kde I je jednotková matice. Protože tato rovnost platí pro libovolná x, y, platí i

$$A^\top A = I, \quad \text{neboli} \quad A_{li}A_{lj} = \delta_{ij}.$$

Sloupcové vektory tvořící A jsou tedy jednotkové a vzájemně kolmé. Dále platí

$$\det(A^\top A) = (\det A^\top)(\det A) = (\det A)^2 = 1 \implies \det A = \pm 1.$$

[1]) To znamená, že sčítáme od 1 do n přes všechny indexy, které se ve výrazu vyskytují dvakrát. Např. výraz $A_{li}x_iA_{lj}y_j$ je tedy zkráceným zápisem pro $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} A_{li}x_iA_{lj}y_j$.

Grupa $\mathrm{O}(n)$ se tedy skládá ze dvou částí (komponent — viz níže): matic s determinantem $+1$ a -1.

- *Speciální ortogonální grupa* $\mathrm{SO}(n)$, komponenta grupy $\mathrm{O}(n)$ s determinantem rovným jedné, je podgrupou grupy $\mathrm{O}(n)$ a je též maticovou Lieovou grupou. Podobně jako $\mathrm{O}(n)$ lze definovat i $\mathrm{O}(n, \mathbb{C})$ jako množinu matic zachovávajících bilineární formu $x_i y_i$, která ovšem nyní není skalárním součinem. Matice A patří do $\mathrm{O}(n, \mathbb{C})$ tehdy a jen tehdy, když $A^\top A = I$.
- *Unitární grupa* $\mathrm{U}(n)$ je grupa lineárních transformací (matic) na komplexním vektorovém prostoru V, které zachovávají skalární součin $\langle x, y\rangle = \overline{x}_k y_k$, tj.

$$A \in \mathrm{U}(n) \iff \langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle \quad \forall x, y \in V.$$

To platí právě tehdy, když

$$A^* A = I \iff A^* = A^{-1},$$

kde A^* je matice adjungovaná k matici A ($A^*_{jk} = \overline{A}_{kj}$). Protože $\det A^* = \overline{\det A}$, platí

$$|\det A| = 1.$$

Stejně jako v předchozím případě lze též zavést speciální podgrupu $\mathrm{U}(n)$ s jednotkovým determinantem — $\mathrm{SU}(n)$. Všimněme si, že zatímco grupy $\mathrm{O}(n)$ a $\mathrm{SO}(n)$ mají stejnou dimenzi, $\mathrm{SU}(n)$ má dimenzi o jedničku nižší než $\mathrm{U}(n)$. To souvisí s tím, že z jednorozměrné množiny determinantů $|\det A| = 1$ vybíráme pouze jeden prvek.
- *Zobecněná ortogonální grupa a Lorentzova grupa:* Definujme symetrickou bilineární formu $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]_{n,k}$ na $\mathbb{R}^{n+k}$

$$[x, y]_{n,k} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n - x_{n+1} y_{n+1} - \cdots - x_{n+k} y_{n+k}.$$

Zobecněná ortogonální grupa $\mathrm{O}(n, k)$ je grupa matic zachovávajících tuto formu

$$A \in \mathrm{O}(n, k) \iff [Ax, Ay]_{n,k} = [x, y]_{n,k} \quad \forall x, y \in V.$$

Nechť g je diagonální matice s jedničkami v prvních n členech a -1 v ostatních k členech. Potom

$$A \in \mathrm{O}(n, k) \iff A^\top g A = g.$$

Grupa $\mathrm{O}(3, 1)$ bývá často označována jako *Lorentzova grupa.*

Nyní si uveďme důležité definice kompaktních a souvislých grup.

Definice 5. Maticovou Lieovu grupu G nazýváme *kompaktní*, pokud splňuje následující dvě vlastnosti:

i) Konvergentní posloupnost prvků z grupy G má limitu v G (uzavřenost).
ii) Existuje konstanta C taková, že pro všechna $A \in G$ platí

$$|A_{ij}| \leqq C \quad \forall i, j \in \{1, \ldots, n\} \quad \text{(omezenost)}.$$

- Příklady kompaktních grup: $\mathrm{O}(n)$ — sloupcové vektory jsou ortonormální a tudíž $|A_{kl}| \leqq 1$. Dále též $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$.
- Příklady nekompaktních grup: $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ a $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ nesplňují podmínku i) — limitou posloupnosti regulárních matic může totiž být i singulární matice. Dále též $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$, $\mathrm{O}(n,k)$ — nesplňují podmínku ii).

Definice 6. Maticová Lieova grupa G je *souvislá*, pokud každé dva její prvky A, B lze spojit spojitou křivkou $A(t) \subset G$, $a \leqq t \leqq b$, $A(a) = A$, $A(b) = B$. Pokud lze navíc každou uzavřenou křivku spojitě deformovat do bodu, řekneme, že grupa G je *jednoduše souvislá*.

Maticovou Lieovu grupu, která není souvislá, lze zapsat jako sjednocení souvislých *komponent*.

Věta 1. *Komponenta Lieovy maticové grupy G, která obsahuje identitu e, je podgrupou G.*

- Příklady souvislých grup: $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$, $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$. Z těchto grup jsou pouze $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ a $\mathrm{SU}(n)$ jednoduše souvislé.
- Příklady nesouvislých grup: $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ (2 komponenty), $\mathrm{O}(n)$ (2 komponenty), $\mathrm{O}(n,1)$ (4 komponenty).

3. Exponenciála matice

V této kapitole se budeme věnovat exponenciále matice, kterou později využijeme k zavedení maticových Lieových algeber. Nechť X je matice $n \times n$, pak *exponenciála* X (značíme e^X) je definována vztahem

$$\mathrm{e}^X = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{X^m}{m!}\,. \tag{1}$$

Věta 2. *Pro libovolnou čtvercovou matici X řada* (1) *konverguje. Navíc e^X je spojitou funkcí X.*

Věta 3. *Nechť X, Y jsou libovolné čtvercové matice. Pak platí*

1) $\mathrm{e}^0 = I$,
2) $\left(\mathrm{e}^X\right)^* = \mathrm{e}^{X^*}$,
3) e^X *je regulární a* $(\mathrm{e}^X)^{-1} = \mathrm{e}^{-X}$,
4) $\mathrm{e}^{(\alpha+\beta)X} = \mathrm{e}^{\alpha X}\mathrm{e}^{\beta X} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$,
5) *pokud* $XY = YX$, *pak* $\mathrm{e}^{(X+Y)} = \mathrm{e}^X\mathrm{e}^Y = \mathrm{e}^Y\mathrm{e}^X$,
6) *pokud* C *je regulární, pak* $\mathrm{e}^{(CXC^{-1})} = C\mathrm{e}^X C^{-1}$.

Věta 4. *Nechť X je matice $n \times n$. Pak e^{tX} je hladká křivka v $M_n(\mathbb{C})$ a navíc platí*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{e}^{tX} = X\mathrm{e}^{tX} = \mathrm{e}^{tX}X, \quad \textit{speciálně} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{e}^{tX}\bigg|_{t=0} = X.$$

Výpočet exponenciály matice:

Věta 5. *Je-li D diagonální matice s vlastními hodnotami $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, pak e^D je diagonální matice s vlastními hodnotami $\mathrm{e}^{\lambda_1}, \mathrm{e}^{\lambda_2}, \ldots, \mathrm{e}^{\lambda_n}$.*

Poznamenejme, že pokud je matice X podobná diagonální matici, tj. $X = PDP^{-1}$, pak můžeme exponenciálu e^X vyjádřit jako $\mathrm{e}^X = P\mathrm{e}^D P^{-1}$.

Definice 7. Matici X nazveme *nilpotentní*, pokud $X^m = 0$ pro nějaké celé kladné m.

V případě nilpotentní matice má řada definující exponenciálu pouze m nenulových členů a exponenciálu tak můžeme spočítat přímým dosazením do definice.

Věta 6. *Nechť A je komplexní matice $n \times n$. Potom existuje právě jedna dvojice matic (S, N), pro kterou platí:*

i) $A = S + N$,
ii) $SN = NS$,
iii) *S je podobná diagonální matici,*
iv) *N je nilpotentní.*

Podle této věty (viz např. [5]) již můžeme spočítat exponenciálu libovolné matice pomocí vztahu

$$\mathrm{e}^A = \mathrm{e}^{S+N} = \mathrm{e}^S\mathrm{e}^N.$$

V dalších výpočtech budeme potřebovat následující větu. Uveďme si ji tentokrát i s hlavními body důkazu.

Věta 7. *Nechť X je matice $n \times n$. Potom platí vztah*[2]) $\det(\mathrm{e}^X) = \mathrm{e}^{\operatorname{tr} X}$.

Hlavní myšlenky důkazu:

i) Pro diagonalizovatelnou matici $X = PDP^{-1}$:

$$\begin{gathered}
\operatorname{tr} X = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n,\\
\mathrm{e}^X = P\mathrm{e}^D P^{-1},\\
\det(\mathrm{e}^X) = \det(P)\det(\mathrm{e}^D)\det(P^{-1}) = \det(\mathrm{e}^D) = \mathrm{e}^{\lambda_1}\mathrm{e}^{\lambda_2}\cdots\mathrm{e}^{\lambda_n} = \mathrm{e}^{\operatorname{tr} X}.
\end{gathered}$$

ii) Pro nilpotentní matici X: Každá nilpotentní matice je podobná horní trojúhelníkové matici T s nulami na diagonále a přímo z definice exponenciály pak plyne, že e^T je opět horní trojúhelníková matice, tentokrát s jedničkami na diagonále, $\mathrm{e}^T = I + \tilde{T}$,

$$\begin{gathered}
X = CTC^{-1}, \quad \operatorname{tr} X = \operatorname{tr} T = 0,\\
\mathrm{e}^X = C\mathrm{e}^T C^{-1}, \quad \det(\mathrm{e}^X) = \det(\mathrm{e}^T) = 1 = \mathrm{e}^{\operatorname{tr} X}.
\end{gathered}$$

[2]) Stopu matice X (X_{ii}) značíme $\operatorname{tr} X$.

iii) Obecnou matici X podle věty [6] rozložíme na diagonalizovatelnou matici S a nilpotentní matici N, $X = S + N$ a z předchozích dvou bodů dostáváme

$$\det \mathrm{e}^X = \det(\mathrm{e}^S \mathrm{e}^N) = \det(\mathrm{e}^S)\det(\mathrm{e}^N) = \mathrm{e}^{\operatorname{tr} S} = \mathrm{e}^{\operatorname{tr} X}. \quad \square$$

Na závěr této části si ještě zaveďme pojem jednoparametrické podgrupy.

Definice 8. Zobrazení $A\colon \mathbb{R} \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ se nazývá *jednoparametrická podgrupa* grupy $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, pokud

i) A je spojité,
ii) $A(0) = I$,
iii) $A(t + u) = A(t)A(u) \quad \forall t, u \in \mathbb{R}$.

Věta 8. *Pokud A je jednoparametrická podgrupa grupy* $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$*, pak existuje právě jedna komplexní matice X, $n \times n$, pro kterou platí*

$$A(t) = \mathrm{e}^{tX}.$$

Tím se dostáváme k Lieovým algebrám.

4. Lieovy algebry

Lieovy algebry nám umožňují pracovat na infinitezimální úrovni. Každá maticová Lieova grupa má odpovídající Lieovu algebru a přechod od maticové Lieovy grupy k odpovídající Lieově algebře často vede k linearizaci a výraznému zjednodušení řešených problémů.

Definice 9. Nechť G je maticová Lieova grupa. *Lieova algebra* $\mathfrak{g}$ této grupy je množina všech matic X, pro které $\mathrm{e}^{tX} \in G$ pro všechna reálná t.

Obecně nelze ovšem každý prvek z G zapsat jako e^X pro nějaké $X \in \mathfrak{g}$.

Příklady:

- $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$: odpovídající Lieova algebra $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ je prostor všech komplexních matic $n \times n$ (pro libovolnou matici X je e^X regulární). Podobně Lieova algebra $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ je prostor všech reálných matic.
- $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$:
$$1 = \det \mathrm{e}^{tX} = \mathrm{e}^{t \operatorname{tr} X} \implies \operatorname{tr} X = 0.$$
Lieova algebra $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ je tedy prostor všech komplexních matic s nulovou stopou a Lieova algebra $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ je prostor všech reálných matic s nulovou stopou.
- $\mathrm{U}(n)$:
$$U^* = U^{-1} \implies \left(\mathrm{e}^{tX}\right)^* = \left(\mathrm{e}^{tX}\right)^{-1} \implies \mathrm{e}^{tX^*} = \mathrm{e}^{-tX}.$$

Lieova algebra $\mathfrak{u}(n)$ je tedy prostor všech matic, pro které $X^* = -X$. Pro $\mathfrak{su}(n)$ navíc platí $\operatorname{tr} X = 0$.

- $\mathrm{O}(n)$:
$$R^\top = R^{-1} \implies \left(\mathrm{e}^{tX}\right)^\top \left(\mathrm{e}^{tX}\right)^{-1} \implies \mathrm{e}^{tX^\top} = \mathrm{e}^{-tX}.$$
Lieova algebra $\mathfrak{o}(n)$ je tedy prostor všech matic, pro které $X^\top = -X$ (antisymetrické). Pro antisymetrické matice platí $\operatorname{tr} X = 0$, a tedy $\det(\mathrm{e}^X) = 1$. Lieova algebra $\mathfrak{o}(n)$ je tedy shodná s $\mathfrak{so}(n)$.
- $\mathrm{O}(n,k)$:
$$AgA^\top = g \iff gA^\top g = A^{-1} \ (g = g^{-1}) \implies g\mathrm{e}^{tX^\top}g = \mathrm{e}^{-tX} \implies gX^\top g = -X.$$
Lieova algebra grupy $\mathrm{O}(n,k)$, označovaná $\mathfrak{o}(n,k)$, je tudíž prostor všech matic $(n+k)\times(n+k)$ splňujících $gX^\top g = -X$ pro danou matici g. Všimněme si navíc, že $\operatorname{tr} X = 0$. Lieova algebra $\mathfrak{o}(n,k)$ je tedy identická s $\mathfrak{so}(n,k)$.

Lze ukázat, že Lieova algebra $\mathfrak{g}$ maticové Lieovy grupy G je vektorovým prostorem a že pro všechna $X, Y \in \mathfrak{g}$ platí $[X,Y] = XY - YX \in \mathfrak{g}$. Můžeme si tedy definovat Lieovu algebru v abstraktním smyslu, bez nutné spojitosti s maticovou Lieovou grupou.

Definice 10. Konečněrozměrná reálná (resp. komplexní) *Lieova algebra* je konečněrozměrný reálný (resp. komplexní) vektorový prostor $\mathfrak{g}$ s bilineárním zobrazením „závorka" $[\,.\,,\,.\,]$ z $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ do $\mathfrak{g}$, které splňuje

i) $[X,Y] = -[Y,X]$ pro všechna $X, Y \in \mathfrak{g}$,

ii) $\big[X,[Y,Z]\big] + \big[Y,[Z,X]\big] + \big[Z,[X,Y]\big] = 0$ pro všechna $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

Zřejmě platí

Věta 9. *Lieova algebra $\mathfrak{g}$ maticové Lieovy grupy G je vždy izomorfní s některou reálnou Lieovou algebrou.*

Z některých vlastností Lieovy algebry lze usuzovat na vlastnosti odpovídající Lieovy grupy a naopak. Jako příklad uveďme abelovské Lieovy grupy a algebry.

Definice 11. Řekneme, že grupa G je *abelovská*, pokud platí $ab = ba$ pro všechna $a, b \in G$, a že Lieova algebra $\mathfrak{g}$ je abelovská, pokud $[X,Y] = 0$ pro všechna $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Mějme abelovskou maticovou Lieovu grupu G. Pro prvky jednoparametrických podgrup grupy G, $A(t) = \mathrm{e}^{tX}$, $B(u) = \mathrm{e}^{uY}$ pak platí $A(t)B(u) = B(u)A(t)$. Zderivováním tohoto vztahu pro $t = u = 0$ dostaneme (viz větu 4) $XY - YX = [X,Y] = 0$. Odpovídající Lieova algebra $\mathfrak{g}$ je tedy též abelovská. Abelovská Lieova algebra naopak generuje abelovskou Lieovu grupu (viz větu 3 a větu 12 níže).

Povšimněme si, že Lieova algebra $\mathfrak{g}$ maticové Lieovy grupy G, která má komplexní komponenty, není vždy komplexní Lieovou algebrou. Například $\mathfrak{u}(n)$ není uzavřená vzhledem k násobení komplexními čísly (je-li nenulový prvek $X \in \mathfrak{u}(n)$, pak $\mathrm{i}X \notin \mathfrak{u}(n)$).

Vzhledem k tomu, že Lieova algebra je uzavřena vzhledem k operaci $[\,.\,,\,.\,]$, platí (opět s užitím Einsteinovy sumační konvence)

$$[X_i, X_j] = c_{ijk} X_k.$$

Konstanty c_{ijk} se nazývají strukturní konstanty a jednoznačně určují operaci $[\,.\,,\,.\,]$ na Lieově algebře. Z vlastností i) a ii) uvedených v definici Lieovy algebry plyne, že strukturní konstanty splňují

$$c_{ijk} + c_{jik} = 0,$$
$$c_{ijm}c_{mkl} + c_{jkm}c_{mil} + c_{kim}c_{mjl} = 0.$$

Ukazuje se, že pro libovolné strukturní konstanty splňující tyto podmínky existuje při vhodně zvolené bázi odpovídající maticová Lieova algebra. Přesněji řečeno:

Věta 10. *Každá konečněrozměrná Lieova algebra je izomorfní*[3]*) s Lieovou algebrou nějaké maticové Lieovy grupy.*

Tuto větu, která ukazuje na opodstatněnost našeho přístupu přes maticové Lieovy grupy a algebry, dokázal v roce 1935 I. D. Ado. Podotkněme však, že na rozdíl od Lieových algeber existují i Lieovy grupy, které neodpovídají žádné maticové Lieově grupě.

Souvislé maticové Lieovy grupy můžeme rekonstruovat, známe-li odpovídající Lieovu algebru. Nejprve si ukažme:

Věta 11. *Nechť G je maticová Lieova grupa a X libovolný prvek její Lieovy algebry. Pak e^X je prvkem jednotkové komponenty G.*

Důkaz: Zřejmě $\mathrm{e}^{tX} \in G$ pro všechna t. Tudíž e^{tX} je spojitá cesta od I k e^X. □

Věta 12. *Nechť G je souvislá maticová Lieova grupa. Pak každé $A \in G$ lze vyjádřit ve tvaru*

$$A = \mathrm{e}^{X_1}\mathrm{e}^{X_2}\cdots\mathrm{e}^{X_m},$$

pro nějaká $X_1, X_2, \ldots, X_m \in \mathfrak{g}$.

Důležitou větou o korespondenci mezi Lieovými algebrami a Lieovými grupami je

Věta 13. *Nechť $\mathfrak{g}$ je Lieova algebra. Pak existuje právě jedna jednoduše souvislá Lieova grupa G s touto Lieovou algebrou $\mathfrak{g}$.*

Na závěr této kapitoly se ještě velice stručně zmiňme o klasifikaci jednoduchých Lieových algeber a odpovídajících Lieových grup, spojené zejména se jmény W. Killinga a É. Cartana. Tato klasifikace patří ke stěžejním výsledkům novodobé matematiky a jako jednu z klíčových prací citujme alespoň [10].

[3]) Nechť $\mathfrak{g}$ a $\mathfrak{h}$ jsou dvě Lieovy algebry. Řekneme, že $\mathfrak{g}$ a $\mathfrak{h}$ jsou izomorfní, pokud existuje izomorfismus φ z $\mathfrak{g}$ do $\mathfrak{h}$, tj. jedno-jednoznačné lineární zobrazení zachovávající operaci $[\,.\,,\,.\,]$, tedy $\varphi([X,Y]) = [\varphi(X), \varphi(Y)]$ pro všechna $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Podalgebra $\mathfrak{h}$ Lieovy algebry $\mathfrak{g}$ je podprostor $\mathfrak{g}$ uzavřený vůči operaci $[\,.\,,\,.\,]$. Podalgebra Lieovy algebry je tedy též Lieovou algebrou. Je-li $\mathfrak{g}$ komplexní Lieova algebra, pak *ideál* $\mathfrak{h}$ je taková komplexní podalgebra, která navíc splňuje, že pro všechna $X \in \mathfrak{g}$ a všechna $Y \in \mathfrak{h}$ platí $[X, Y] \in \mathfrak{h}$. Řekneme, že komplexní Lieova algebra $\mathfrak{g}$ o dimenzi $\geqq 2$ je *jednoduchá*, jestliže jediné ideály, které obsahuje, jsou $\mathfrak{g}$ a $\{0\}$.

Věta 14. *Každá jednoduchá komplexní Lieova algebra je izomorfní s právě jednou z následujících algeber:*

1. $\mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C})$, $n \geqq 1$,
2. $\mathfrak{so}(2n+1, \mathbb{C})$, $n \geqq 2$,
3. $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$, $n \geqq 3$,
4. $\mathfrak{so}(2n, \mathbb{C})$, $n \geqq 4$,
5. *výlučné Lieovy algebry* G_2, F_4, E_6, E_7, E_8.

Symplektické grupy $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{C})$ a odpovídající algebry (uvedené na třetím řádku v tomto seznamu), zachovávající antisymetrické bilineární formy, jsme si zde nedefinovali, definici lze však nalézt ve většině úvodních textů. Výlučné Lieovy algebry a odpovídající Lieovy grupy mají (komplexní) dimenze $\dim G_2 = 14$, $\dim F_4 = 52$, $\dim E_6 = 78$, $\dim E_7 = 133$, $\dim E_8 = 248$. I výlučné grupy se od druhé poloviny sedmdesátých let dvacátého století používají v teoretické fyzice a i tak složitá grupa jako E_8 hraje důležitou roli v supergravitaci a v teorii strun (viz např. [11]).

5. Příklady

Na závěr uveďme ještě několik příkladů.

- Jak jsme již uvedli, Lieova algebra $\mathfrak{so}(3)$ je tvořena antisymetrickými maticemi 3×3. Tyto matice mají tři nezávislé komponenty a $\mathfrak{so}(3)$ je tedy třídimenzionální vektorový prostor. Bázi v $\mathfrak{so}(3)$ můžeme zvolit např. jako

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pro X_1, X_2, X_3 platí

$$[X_1, X_2] = -X_3, \qquad [X_2, X_3] = -X_1, \qquad [X_3, X_1] = -X_2.$$

Jednoparametrické podgrupy $\mathrm{e}^{\theta X_1}$, $\mathrm{e}^{\varphi X_2}$, $\mathrm{e}^{\psi X_3}$ grupy $\mathrm{SO}(3)$, generované prvky báze $\mathfrak{so}(3)$, mají tvar

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a odpovídají rotacím kolem os x, y a z. Libovolnou rotaci (prvek z $\mathrm{SO}(3)$) můžeme složit z těchto tří rotací a zapsat jako součin těchto tří matic.

- Uvažujme nyní Lieovu algebru $\mathfrak{su}(2)$. Jako vhodnou bázi můžeme zvolit matice

$$Y_1 = \tfrac{1}{2}\mathrm{i}\sigma_1, \qquad Y_2 = \tfrac{1}{2}\mathrm{i}\sigma_2, \qquad Y_3 = \tfrac{1}{2}\mathrm{i}\sigma_3,$$

kde

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

jsou tzv. Pauliho matice známé z kvantové mechaniky, kde se používají při popisu orbitálního momentu elementárních částic se spinem $1/2$. Pro Y_1, Y_2 a Y_3 dostáváme

$$[Y_1, Y_2] = -Y_3, \qquad [Y_2, Y_3] = -Y_1, \qquad [Y_3, Y_1] = -Y_2;$$

$\mathfrak{su}(2)$ a $\mathfrak{so}(3)$ tedy mají stejné strukturní koeficienty a jsou tudíž izomorfní. Povšimněme si, že to není ve sporu s větou 13, protože grupa $\mathrm{SO}(3)$ není jednoduše souvislá.

- Ve statickém případě popisují řešení Laplaceovy rovnice $\Delta\varphi = 0$ například gravitační potenciál $\varphi_{\mathrm{g}}(x)$ či elektrostatický potenciál $\varphi_{\mathrm{e}}(x)$ vně dané konfigurace zdrojů. Analyzujme, jakým způsobem se tato rovnice změní při otočení souřadných os. Uvažujme Laplaceův operátor v kartézských souřadnicích v n dimenzích, $\Delta = \partial_i\partial_i$, kde ∂_i je zkrácený zápis pro parciální derivaci $\partial/\partial x_i$ a přes i sčítáme od jedné do n. Nyní provedeme transformaci souřadnic

$$\tilde{x}_i = R_{ij}x_j, \quad R_{ij} \in \mathrm{SO}(n),$$

odpovídající nějakému otočení souřadných os. Mějme libovolnou funkci $f\big(\tilde{x}_i(x_j)\big)$, splňující předpoklady věty o derivování složené funkce. Potom dostáváme

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}_i}\,\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_j} = R_{ij}\,\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}_i}\,.$$

Můžeme tedy formálně psát

$$\partial_j = R_{ij}\tilde{\partial}_i \quad \text{a} \quad \tilde{\partial}_k = R^{-1}_{jk}\partial_j,$$

kde $\tilde{\partial}_i$ je zkrácený zápis pro $\partial/\partial\tilde{x}_i$. Pro Laplaceův operátor dostáváme

$$\tilde{\Delta} f(\tilde{x}) = \tilde{\partial}_i\tilde{\partial}_i f(\tilde{x}) = R^{-1}_{ji}R^{-1}_{ki}\partial_j\partial_k f(x) = \partial_j\partial_j f(x) = \Delta f(x),$$

kde jsme využili, že $R^{-1}_{ji} \in \mathrm{SO}(n)$, a tedy i $R^{-1}_{ji}R^{-1}_{ki} = \delta_{jk}$. Laplaceův operátor je tedy invariantní vůči rotacím kartézských souřadnic, a jak si čtenář snadno ověří, tak i vůči translacím $\tilde{x}_i = x_i + c_i$. Laplaceův operátor je tudíž invariantní vůči eukleidovské grupě $\mathrm{E}(n)$, což je Lieova grupa zahrnující rotace i translace. Právě tato nezávislost na určitém typu transformací je zásadním požadavkem při formulování fyzikálních zákonů — neočekáváme, že by se fyzikální zákony měly změnit např. při volbě jiného počátku souřadnic nebo při otočení souřadných os. Je důležité si uvědomit, že již tento požadavek výrazně omezuje možná vyjádření fyzikálních zákonů pomocí diferenciálních rovnic.

Studium symetrií fyzikálních zákonů stálo i u zrodu speciální teorie relativity. Maxwellovy rovnice, které byly formulovány na základě empirických poznatků, vedly k nekonzistencím při galileovských transformacích $\tilde{t} = t$, $\tilde{x}_i = x_i - v_i t$, na kterých přitom stojí klasická mechanika. Galileův princip relativity tak musel být nahrazen principy speciální teorie relativity. Teorie konzistentní se speciální teorií relativity musí být invariantní nejenom vůči Lorentzově grupě, ale i vůči translacím $\tilde{x}_i = x_i + c_i$. Oba typy těchto transformací zahrnuje tzv. Poincarého grupa, jejíž podgrupou odpovídající translacím a rotacím je i eukleidovská grupa $\mathrm{E}(n)$.

L i t e r a t u r a

[1] STUBHAUG, A.: *The Mathematician Sophus Lie.* Springer-Verlag 2002.

[2] HAWKINS, T.: *Emergence of the Theory of Lie Groups.* Spinger-Verlag 2000.

[3] OLVER, P.: *Applications of Lie Groups to Differential Equations.* Springer-Verlag 2000.

[4] A. BAKER, A.: *Matrix Groups: An introduction to Lie group theory.* Springer-Verlag 2002.

[5] HALL, B. C.: *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations.* Springer-Verlag 2003.

[6] ROSSMANN, W.: *Lie Groups : An Introduction through Linear Groups.* Oxford Graduate Texts in Mathematics, Oxford Univ. Press 2002.

[7] CARTER, R., SEGAL, G., MACDONALD, I.: *Lectures on Lie Groups and Lie Algebras.* Cambridge Univ. Press 1995.

[8] KARGER, A., NOVÁK, J.: *Prostorová kinematika a Lieovy grupy.* SNTL, Praha 1987.

[9] PRADLOVÁ, J., KŘÍŽEK, M.: *Grupy kolem nás I–III.* Rozhledy mat.-fyz. *76* (1999), 209; *76* (1999), 261; *77* (2000), 5.

[10] KILLING, W.: *Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen II.* Math. Ann. *33* (1889), 1–48.

[11] BECKER, K., BECKER, M., SCHWARZ, J. H.: *String theory and M-Theory.* Cambridge University Press, Cambridge 2007.