Karel Žitný; Igor Zolotarev

Cambridgské setkání

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 52 (2007), No. 3, 204--210

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/141359`

[3] Langville, A. N., Meyer, C. D.: *Google's PageRank and Beyond: the science of search engine rankings.* Princeton University Press, Princeton, Oxford 2006.
[4] Marek, I.: *Agregační variace na googleovskou matici.* Sborník semináře Matematika na vysokých školách (ed. Herrmann, L.), Herbertov 2005, 114–120.
[5] Marek, I., Mayer, P.: *Convergence theory of a class of aggregation/disaggregation iterative methods for computing stationary probability vectors of stochastic matrices.* Linear Algebra Appl. *363* (2006), 177–200.
[6] Pappas, T.: *More joy of mathematics.* Wide World Publ., Tetra 1991.
[7] Pravda, V., Křížek, M.: *Citace: dobrý sluha, špatný pán.* PMFA *52* (2007), 28–36.
[8] `http://maps.google.com`
[9] `http://video.google.com`
[10] `http://www.google.com/help/features.html`
[11] `http://www.books.google.com`

Cambridgské setkání

Karel Žitný a Igor Zolotarev, Praha

V roce 1932 při pobytu na univerzitě v Cambridge Norbert Wiener (1894–1964) uspořádal sérii přednášek o Fourierově transformaci, které krátce nato shrnul do útlé, dodnes ceněné knížky „The Fourier Integral and Certain of its Applications“ [20]. Tento pozoruhodný text je jedním z trvalých výsledků, k nimž vedl jeho pobyt v Anglii; druhým, nikoliv však posledním, je článek [2] publikovaný G. H. Hardym (1877–1947). Tento matematik, starší než Wiener, byl autorem nebo spoluautorem mnoha skvělých statí a knih. Jeho sebrané spisy zaplňují sedm značně objemných svazků. Zaměříme-li nyní pozornost na jediný článek, není to bezdůvodné. Intelektuálně poctivý Hardy v něm podává svědectví o tom, jak významně jej ovlivnily diskuse s Wienerem a jak se podněty z neformálních rozhovorů mohou přetavit do korektně formulovaných tvrzení.

Oprávněně se můžeme domnívat, že vůdčím motivem, jenž vedl Wienera k tomu, že znovu přicestoval do Cambridge, byla touha po dalším prohloubení již existujících přátelských vazeb s tamější matematickou komunitou, zejména s Hardym. Pobyt byl úspěšný; nové renomé, které získal, mu rovněž umožnilo, aby navázal nové a oživil již fungující kontakty s matematiky z kontinentální Evropy. Avšak nejcennějším výsledkem se stala monografie [9]. Mimořádně talentovaný mladý cambridgský matematik Raymond E. A. C. Paley (1907–1933) získal Rockefellerovo stipendium a měl po Wienerově boku strávit akademický rok 1932–1933 na Massachusetts Institute of

---

RNDr. Karel Žitný, CSc. (1936), Kamenická 5, 170 00 Praha 7.
Ing. Igor Zolotarev, CSc. (1954), José Martího 375/4, 162 00 Praha 6, e-mail: igor@it.cas.cz

Technology. Úspěšná společná práce však záhy skončila. Paley dne 7. 4. 1933 zahynul na lyžařském výletu do kanadských Rocky Mountains. Naštěstí nejvýznamnější výsledky, k nimž se dopracovali, byly zavčas publikovány v prestižním časopise [8]. Plody společného úsilí pokrývají relativně širokou škálu témat; sjednocující ideou jsou vlastnosti Fourierovy transformace v komplexním oboru. Wiener, jemuž připadl nezáviděníhodný úkol scelit bohatý předběžný materiál a dotáhnout plánovanou publikaci do konečného tvaru, nám zanechal svědectví o neformálnosti spolupráce, která často probíhala s křídou v ruce před tabulí, na níž tříbili okamžité nápady do předběžných verzí, aby z nich posléze vytěžili publikovatelné závěry. Wienerův hluboký vztah ke Cambridge je potvrzen již úvodním věnováním: „Dedicated by the surviving author to Professors G. H. Hardy and J. E. Littlewood the teachers of us both.“

O mnoho let později, v roce 1949, Wiener reagoval na Hardyovu smrt pozoruhodným nekrologem. Stojí za zmínku, že G. H. Hardymu je také dedikován román [14], který před více než čtyřiceti lety vyšel v českém překladu. Jeho autor, významný anglický prozaik Ch. P. Snow, byl úspěšným fyzikálním chemikem a koncem třicátých let minulého století se stal členem jedné z čelných cambridgských Colleges. V románu, nazvaném „The Masters“, podal věrohodný a plastický obraz prostředí, v němž pracovali a žili tehdejší angličtí vysokoškolští pedagogové a vědci. Jde v něm o nepříliš lichotivé zobrazení komplikovaných intrik, které předcházejí volbu nového kolejního představeného. Bylo by naivní, ne-li přímo směšné, pokoušet se identifikovat profesora Hardyho s některou z románových postav, ale Snow jej bezesporu dobře znal a spolehlivě vystihl atmosféru tehdejší doby. Žádná z románových postav sice nehraje kriket, jímž byl Hardy přímo posedlý, avšak „A Mathematician's Apology“, kterou Hardy poprvé uveřejnil v roce 1940, byla v pozdějším vydání opatřena Snowovou předmluvou.

Pro historii matematiky je zpravidla důležitější sledovat osudy idejí než životní příběhy jejich tvůrců. Položíme proto důraz na vypreparování myšlenek z Wienerových cambridgských přednášek, které našly bezprostřední odraz v Hardyově článku [2]. Tento záměr vyžaduje krátkou exkurzi do matematické analýzy.

Jestliže funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ patří do prostoru $L_1(\mathbb{R})$, tj. je-li lebesgueovsky integrovatelná, její Fourierovou transformací je spojitá funkce daná předpisem

$$\hat{f}(s) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \exp(-\mathrm{i}st)\, \mathrm{d}t, \qquad s \in \mathbb{R}.$$

Základní myšlenka, která vede k přirozené definici Fourierovy transformace pro funkce z Hilbertova prostoru $L_2(\mathbb{R})$, je prostá. Přišel s ní Michel Plancherel již v roce 1911: funkci $f \in L_2(\mathbb{R})$ aproximujeme funkcemi ležícími v prostoru $L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$. Přesněji řečeno, je-li dána funkce $f \in L_2(\mathbb{R})$, pak existuje posloupnost $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ taková, že f_n, $\hat{f}_n \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ pro $n = 1, 2, \ldots$, přičemž f_n konvergují v normě prostoru $L_2(\mathbb{R})$ k funkci f a posloupnost $(\hat{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konverguje vzhledem k téže normě k funkci z $L_2(\mathbb{R})$, již označíme symbolem $\mathfrak{F}f$.

Snadno se přesvědčíme, že funkce $\mathfrak{F}f$ nezávisí na volbě aproximující posloupnosti. Skutečně, je-li $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ posloupnost funkcí taková, že g_n, $\hat{g}_n \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ a $g_n \to f$

pro $n \to \infty$ v metrice prostoru $L_2(\mathbb{R})$, potom $\lim_n \hat{g}_n = \mathfrak{F} f$ skoro všude v $\mathbb{R}$. To umožňuje, abychom $\mathfrak{F} f$ interpretovali jako Fourierovu nebo přesněji jako Fourierovu-Plancherelovu transformaci funkce $f \in L_2(\mathbb{R})$. Je pozoruhodným faktem, že pro funkci $f \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ platí, že

$$\mathfrak{F} f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f} \quad \text{skoro všude v } \mathbb{R}.$$

Wiener okolo roku 1930 studoval vlastnosti Hermitových funkcí. Dosažené výsledky mu umožnily dospět k transparentnější definici operátoru $\mathfrak{F}$. Jeho inovaci můžeme shrnout takto: pro každé celé nezáporné číslo n nazveme

$$h_n(t) = (-1)^n \exp\left(\tfrac{1}{2}t^2\right) \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} \exp(-t^2), \quad t \in \mathbb{R},$$

n-tou Hermitovou funkcí. Všechny tyto funkce patří do prostoru $L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ a tvoří ortogonální posloupnost, tj.

$$\int_{\mathbb{R}} h_n(t) h_m(t)\,\mathrm{d}t = 2^n n!\,\sqrt{\pi}\,\delta_{nm}, \quad n, m \in \{0, 1, 2, \ldots\},$$

kde δ_{nm} označuje Kroneckerovo delta. Nadto pro všechna $n = 0, 1, 2, \ldots$ platí, že $\hat{h}_n = (-1)^n \sqrt{2\pi}\, h_n$. Jestliže skalární součin funkcí $f, g \in L_2(\mathbb{R})$, tj. integrál $\int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t$, označíme symbolem $(f \mid g)$, pak $\|f\| = (f \mid f)^{\frac{1}{2}}$ je normou funkce f. Wiener ukázal, že posloupnost normalizovaných Hermitových funkcí $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\varphi_n = h_n / \|h_n\|$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, tvoří ortonormální bázi v $L_2(\mathbb{R})$.

Použijeme-li předchozí terminologii, můžeme Wienerovu definici Fourierovy-Plancherelovy transformace (v aktualizované formě) vyslovit takto:

Nechť $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupností normalizovaných Hermitových funkcí. Fourierovou-Plancherelovou transformací $f \in L_2(\mathbb{R})$ nazveme funkci

$$\mathfrak{F} f = \sum_{k=0}^{\infty} (-\mathrm{i})^k (f \mid \varphi_k) \varphi_k,$$

jež je prvkem prostoru $L_2(\mathbb{R})$.

Z definice okamžitě plyne, že $\mathfrak{F} \varphi_k = (-\mathrm{i})^k \varphi_k$. To znamená, že normalizované Hermitovy funkce jsou vlastními vektory (unitárního) operátoru $\mathfrak{F}$ a čísla $(-\mathrm{i})^k$ jsou odpovídajícími vlastními hodnotami. Wienerova explicitní definice Fourierova-Plancherelova operátoru, s níž se relativně snadno pracuje a jež umožňuje zjednodušit některé z tradičních důkazů, je bezesporu pozoruhodná. Avšak monografie [20], kterou Wiener dokončil a také vydal v Cambridge, měla daleko širší dopad; bez přehánění ji lze považovat za revoluční počin. Krátce po jejím vydání to vystižně vyjádřil ve své recenzi Einar Hille: „Recommended for anyone who wants to learn what Fourier integrals are, what they are good for, and who aspires to the mastery of the new techniques in handling them.“

Kniha [20] je členěna do tří tematických okruhů. První je věnován Fourierově transformaci funkcí z prostoru $L_2(\mathbb{R})$. V druhém jde o problematiku absolutně konvergentních Fourierových řad. Nalezneme tam Wienerův technicky náročný a relativně dlouhý důkaz proslulé věty:

„Je-li $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spojitá a všude od nuly různá funkce, jejíž Fourierova řada je absolutně konvergentní, potom také Fourierova řada funkce $1/f$ je absolutně konvergentní.“

Oddíl je uzavřen výsledky, které se týkají rozložení prvočísel. V třetí části Wiener posunul argumentaci do abstraktnější podoby; jde o srozumitelný výklad obecněji pojaté harmonické analýzy.

Souhrnný nástin historie harmonické analýzy ve 20. století včetně ocenění Wienerova přínosu lze nalézt, kromě jiných zdrojů, v knize J.-P. Piera [11]. Stručně řečeno, Wienerovy ideje a inovace měly dlouhodobou působnost. Nicméně k technickému vytříbení a k podstatnému zjednodušení některých jeho postupů došlo již po pěti až deseti letech, v rámci tehdy se tvořící nové disciplíny funkcionální analýzy, kterou dnes označujeme jako teorii Banachových algeber. Byl to např. Gelfandův důkaz věty zmíněné v předchozím odstavci, jehož překvapivá stručnost a elegance přesvědčila o efektivnosti nové teorie a stala se mohutným impulsem pro její rozvíjení po roce 1940. Světový úspěch pozdějších Wienerových publikací, zejména slavné „Cybernetics“ nebo „Time Series“ vedl začátkem šedesátých let k reedici cambridgského vydání v newyorských Dover Publications. Nešlo přitom o pietní akt, nýbrž o ještě stále užitečný, i když již poněkud málo moderní úvod do problematiky. Obecně vzato, Wienerovy články a knihy nejsou snadnou četbou, ačkoliv jedním z jeho učitelů byl E. Landau, který proslul tacitovsky stručným, jasným a srozumitelným stylem svých děl.

O dlouhodobém působení rané Wienerovy tvorby se lze přesvědčit např. z monografie [6]. V ní je citováno osm Wienerových prací, z nichž pouze dvě jsou z let po jeho cambridgském pobytu v roce 1932. V roce 1972 vedle právě zmíněného díla T. Kawaty vyšla také, a to dokonce v téže edici nakladatelství Academic Press, kniha [1]. Její autoři H. Dym a H. P. McKean, jak se zdá, poprvé a tedy s odstupem 40 let včlenili Wienerovu definici Fourierovy-Plancherelovy transformace do díla míněného jako učebnice. Avšak teprve v posledních desetiletích dochází k častějším pokusům o prolamování strnulé pedagogické tradice; jako příklad může posloužit kniha P. Lassera [7]. V učebnici F. Jonese [5], v ucelené kolekci cvičení, jsou studovány Hermitovy funkce a vyzdvižen jejich význam pro teorii Fourierovy-Plancherelovy transformace. Je to však především D. W. Strook, který do 3. vydání v rychlém sledu reeditované knihy [15] zařadil výklad o Hermitových funkcích definovaných na eukleidovském m-dimenzionálním prostoru a rozšířil Wienerovu definici Fourierova-Plancherelova operátoru na funkce z prostoru $L_2(\mathbb{R})$. Renesanci zájmu o Wienerovu koncepci lze podle Strooka připsat především matematickým fyzikům specializovaným na kvantovou teorii pole.

Je čas vrátit se k článku [2], precizovat Wienerův vliv na jeho vznik a poté ocenit jeho dlouhodobý dosah. V jeho vstupní větě se říká: This note originates from a remark of Prof. N. Wiener, to the effect that „a pair of transforms f and g $[=\hat{f}]$ cannot both be very small“. V poznámce pod čarou Hardy připojil zmínku o Hermitových funkcích: „It was from Wiener's lectures that I learnt their importance in the theory of the

Fourier integral.“ Tyto citace vymezují důležitý počáteční impuls. To, co následuje, je skvělou ukázkou Hardyovy mistrovské imaginace. Principiální větu uvedeme dvakrát. Nejprve v lehce oproštěné verzi, v níž se vyhneme Hardyovu použití Landauových symbolů $\mathbf{O}$ a $\mathbf{o}$, a poté v tradičnější formě.

Věta A. *Nechť a, b, c jsou kladná čísla. Jestliže $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ je lebesgueovsky měřitelná funkce taková, že pro všechna $t \in \mathbb{R}$ platí současně*

$$|f(t)| \leqq c\exp(-\tfrac{1}{2}at^2), \quad |\hat{f}(t)| \leqq c\exp(-\tfrac{1}{2}bt^2),$$

potom buď $f = 0$, nebo f je konstantním násobkem funkce $\exp(-\frac{1}{2}at^2)$, resp. je nekonečně mnoho takových funkcí v závislosti na tom, zda $ab > \frac{1}{4}$, $ab = \frac{1}{4}$, resp. $ab < \frac{1}{4}$. (Třetí možnost odráží vztah mezi n-tou Hermitovou funkcí a její Fourierovou transformací a je tedy možné, že to byla právě tato relace, která probudila Hardyho zájem o Hermitovy funkce.)

Hardy předložil dva různé důkazy Věty A. První využívá jednu z vět spojovaných se jmény Phragmèna a Lindelöfa ve formulaci, v níž ji uvádějí Pólya a Szegő [12]; druhý, jenž je založen na výsledcích Hardyho, Titchmarshe a Lercha, je dnes opomíjený. Z dnešního pohledu je Věta A jedním z tzv. principů neurčitosti pro Fourierovu transformaci. Tím je devalvováno Hardyovo tvrzení, že nalezl „the most precise interpretation possible“ Wienerova postřehu. Určitě nejznámějším principem neurčitosti je nerovnost, kterou v termínech kvantové mechaniky formuloval Werner von Heisenberg zhruba šest let před Hardym a učinil z ní jeden z fundamentálních fyzikálních poznatků. Je velmi pravděpodobné, že ani Hardy, ani Wiener s tímto výsledkem nebyli seznámeni, neboť se objevil v literatuře o kvantové mechanice. Jako matematické tvrzení jej dokázal Hermann Weyl. Vyslovme je v následující formě.

Věta B. *Nechť $\mathfrak{F}f$ označuje Fourierovu-Plancherelovu transformaci funkce $f \in L_2(\mathbb{R})$. Potom*

$$\|f\|_2^4 \leqq 4\left(\int_{\mathbb{R}} t^2|f(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_{\mathbb{R}} s^2|\mathfrak{F}f(s)|^2\,\mathrm{d}s\right).$$

Nerovnost přejde v rovnost, právě když $f(t) = \beta\exp(-\frac{1}{2}\lambda t^2)$ skoro všude v $\mathbb{R}$, kde β je komplexní konstanta a symbolem λ označujeme kladné číslo.

Předchozí nerovnost je prototypem „kvantitativního principu neurčitosti“, v němž dolní mez udává „míru disperze“ f a (resp. $\mathfrak{F}f$), zatímco Hardyův výsledek je jedním z tzv. „kvalitativních principů neurčitosti“.

Literární vědec a spisovatel Viktor Šklovský kdysi poznamenal, že práce ruských formalistů jsou spíše ozimem než jařinou. Totéž lze říci o Hardyho stati. Určitě ji znali specialisté; první knihou, v níž nalezneme Hardyho princip neurčitosti, je již zmíněná monografie [9]. O pár let později je uveden v Titchmarshově kompendiu [19]. Do širšího povědomí však pravděpodobně pronikl až po roce 1972, kdy byly vydány knihy [1] a [6]. Nicméně rozsáhlejší pozornosti se mu dostalo až po dalších deseti letech.

K tomu, abychom mohli ocenit nejvýznamnější přímé zobecnění Hardyovy věty, uveďme nejprve slíbenou parafrázi Věty A. Ani zde nereprodukujeme její původní verzi. Dali jsme přednost formulaci podle T. Kawaty [6], str. 279–283.

Věta A'. *Nechť funkce f a $\hat{f}$ patří do $L_1(\mathbb{R})$. Nechť m je přirozené číslo. Nechť a, b jsou kladné konstanty takové, že $ab \geqq \frac{1}{4}$. Předpokládejme, že platí*

$$f(t) = \mathbf{O}\big(|t|^m \exp(-at^2)\big), \quad \hat{f}(t) = \mathbf{O}\big(|t|^m \exp(-bt^2)\big) \quad \textit{pro } |t| \to \infty.$$

Potom $\hat{f}(t) = \exp(-\beta t^2)P(t)$, $t \in \mathbb{R}$, kde $P(t)$ je polynom stupně nejvýše m. Speciálně jestliže $a = b = \frac{1}{2}$, pak $\hat{f}(t) = f(t) = \exp(-\frac{1}{2}t^2)P(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Pro $m = 0$ obdržíme

$$\hat{f}(t) = f(t) = c\exp(-\tfrac{1}{2}t^2)P(t), \quad \textit{kde } c \textit{ je konstanta.}$$

Cílem práce [10] bylo nahradit faktor $|t|^m$ rychleji rostoucí funkcí. Hardy dokázal Větu A' na základě modifikovaného principu maxima pro holomorfní funkce. Obdobný aparát z teorie celistvých funkcí použil zhruba před deseti lety Ch. Pfannschmidt [10], aby dokázal následující tvrzení.

Věta B'. *Nechť $a > 0$, $b \geqq 1/(4a)$. Jestliže f, $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R})$ splňují podmínky*

$$f(t) = \mathbf{O}\big(|R(t)| \exp(-at^2)\big), \quad \hat{f}(t) = \mathbf{O}\big(|Q(t)| \exp(-bt^2)\big) \quad \textit{pro } |t| \to +\infty,$$

přičemž platí, že

$$\lim_{|t|\to+\infty} \sup \frac{\log|R(t)|}{t^2} = \lim_{|t|\to+\infty} \sup \frac{\log|Q(t)|}{t^2} = 0,$$

potom buď $ab = \frac{1}{4}$, anebo $f = \hat{f} = 0$.

Pfannschmidt rovněž ukázal, že existují přirozená omezení na růst faktorů R a Q a že v tomto smyslu jde o obecnou verzi Hardyho věty.

Do kontextu komplexní analýzy je Hardyho věta zařazena v monografii [3], již lze charakterizovat jako řadu kratších studií věnovaných různým formulacím principu neurčitosti, neboť nepřehledné množství dílčích výsledků zatím vzdoruje snahám o systematickou klasifikaci. Autoři zdůraznili, že nejdůležitější varianty principu neurčitosti byly získány metodami teorie holomorfních funkcí, avšak že bariéra mezi reálnou a komplexní analýzou není nepropustná. To zřetelně dokumentují práce indických matematiků sdružených okolo S. Thangavelu. Jimi získané výsledky ukázaly, že s použitím technik specifických pro reálnou harmonickou analýzu lze Hardyho větu rozšířit nejen na eukleidovský prostor, ale také např. na Heisenbergovy grupy nebo symetrické prostory. Počáteční dosažené výsledky shrnuje článek [13] a jejich dlouhodobý výzkum je bilancován ve dvou monograficky zaměřených publikacích [17] a [18]. Samozřejmě předmětem jejich zájmu není výlučně zobecňování zmíněné věty, nýbrž dalekosáhlá modifikace standardních výsledků z komutativní harmonické analýzy (Plancherelovy věty, Paleyovy-Wienerovy věty, Wienerovy-Tauberovy věty atp.) na případy některých Lieových grup. Uveďme ještě, že jedna z dalších knih [16] S. Thangavelu je zčásti věnována Hermitovým funkcím.

Předchozí zcela letmý pohled do současnosti ukazuje, že Wienerův postřeh pro budoucnost zafixovaný G. H. Hardym byl a je velmi podnětný. Havin a Jöricke charakterizovali svou knihu jako variace na Wienerovo téma: „It is impossible for a non-zero function and its Fourier transform to be simultaneously very small. In other words, any information gained about f has to be paid by a corresponding loss of control on $\hat{f}$." Analogickou frází je také uveden i Havinův novější přehledový článek [3]. Hardymu tak bezesporu patří zásluha za autorství jedné z nejdůležitějších formulací principu neurčitosti.

František Halas v jedné básni vyslovil poněkud melancholické přání: „být kýmsi čten a pochválen na dobrou památku". Godfrey Harold Hardy a Norbert Wiener jsou zcela určitě čteni a chváleni a nejenom za to, co vzešlo z jejich cambridgských diskusí.

L i t e r a t u r a

[1] Dym, H., McKean, H. P: *Fourier Series and Integrals.* Academic Press, New York 1972.

[2] Hardy, G. H.: *A Theorem Concerning Fourier Transformations.* J. London Math. Soc. *8* (1933), 227–231.

[3] Havin, V. P.: *On the Uncertainty Principle in Harmonic Analysis.* Twenty Century Harmonic Analysis — A Celebration (ed. J. S. Byrnes), NATO Science Series II, Mathematics, Physics and Chemistry Vol. 33. Kluwer Acad. Publisher, Dordrecht 2001, 3–29.

[4] Havin, V., Jöricke, B.: *The Uncertainty Principle in Harmonic Analysis.* Springer--Verlag, Berlin – Heidelberg 1994.

[5] Jones, F.: *Lebesgue Integration on Euclidean Space.* Jones and Bartley Publishers, Boston 1993.

[6] Kawata, T.: *Fourier Analysis in Probability Theory.* Academic Press, New York 1972.

[7] Lasser, R.: *Introduction to Fourier Series.* Marcel Dekker, Inc., New York 1996.

[8] Paley, R. E. A. C., Wiener, N.: *Notes on the Theory and Application of Fourier Transforms.* Notes I–II, Trans. Amer. Math. Soc. Vol. *35* (1933), 348–355, Notes III–VII, ibid., Vol. *35* (1933), 761–791.

[9] Paley, R. E. A. C., Wiener, N.: *Fourier Transforms in the Complex Domain.* Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. Vol XIX. New York 1934.

[10] Pfannschmidt, Ch.: *A Generalization of the Theorem of Hardy: A most General Version of the Uncertainty Principle for Fourier Integrals.* Math. Nachr. *182* (1996), 317–327.

[11] Pier, J.-P.: *L'analyse harmonique — son développement historique.* Masson, Paris 1990.

[12] Pólya, G., Szegő, G.: *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis.* Springer-Verlag, Berlin 1928.

[13] Sitaram, A., Sundari, M., Thangavelu, S.: *Uncertainty Principles on Certain Lie Groups.* Proc. Ind. Acad. Sci. *105* (1995), 165–151.

[14] Snow, Ch. P.: *The Masters.* Macmillan & Co. Ltd, London 1952. Český překlad: *Profesoři*, SNKLHU, Praha 1963.

[15] Strook, D. W.: *A Concise Introduction to the Theory of Integration.* Third Edition, Birkhäuser, Boston 1999.

[16] Thangavelu, S.: *Lectures on Hermite and Laguerre expansions.* Mathematical Notes 42, Princeton Univ. Press 1993.

[17] Thangavelu, S.: *Harmonic Analysis on the Heisenberg Group.* Birkhäuser, Boston 1998.

[18] Thangavelu, S.: *An Introduction to the Uncertainty Principle. Hardy's Theorem on Lie Groups.* Birkhäuser, Boston 2004.

[19] Titchmarch, E. C.: *Introduction to the Theory of Fourier Integrals.* Oxford Univ. Press, London 1957.

[20] Wiener, N.: *The Fourier Integral and Certain of its Applications.* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1933; third edition 1986.