Leopold C. A. Verstraelen
Univerzální přírodní tvary

*Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, Vol. 52 (2007), No. 2, 142–151

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/141350

# Univerzální přírodní tvary

*Leopold Verstraelen, Leuven*

## Úvod

Geometrie byla ve svých počátcích založena jen na našich počitcích a vjemech toho, co pociťujeme jako náš okolní svět. V průběhu věků se stala nejprve experimentální vědou v různých kulturách na naší Zemi. Konečně u starých Řeků byla geometrie pevně zakotvena jako ústřední obor matematiky [1, 2, 3, 4]. Tedy nejprve uchopena v lidských myslích a pak psychologicky dotvářena ve smyslu von Helmholtzových hypotéz o „našem okolním světě a jeho obsazích", což podle něj sloužilo a slouží evoluci celého lidského druhu i jednotlivců. Abstraktní geometrie se zrodila a pak dále rozvíjela pomocí myšlenkových konstrukcí našeho mozku. Původně se v podstatě skládala z geometrie euklidovské roviny a třírozměrného euklidovského prostoru, se zvláštním zaměřením na sféry jako pozoruhodné objekty v prostoru a na fenomén perspektivy. Pohled na současný stav dávají například práce [5, 6, 7, 8]. A dodnes platí to, co vyjádřil S. S. Chern slovy: „Zatímco algebra a analýza poskytují základy matematiky, geometrie je v jejím nitru" [6].

Podle Rogera Penrose „existuje hluboká souhra mezi fungováním skutečného světa a zákony a vnímavostí myšlení" [9]. Je také užitečné připomenout jeho myšlenku, že „vědomí je v podstatě »vidění« nutné pravdy a že možná představuje jistý druh běžného kontaktu s Platonovým světem ideálních matematických pojmů" [10]. Proto není překvapující, že základní a pevně přijaté součásti našeho obecného vědeckého poznání světa zahrnují matematické modely, jak vyjádřili Browder a MacLane v [11] nebo že, jak říká Hilbert, „matematika je základem veškerého exaktního vědění o přírodních jevech" [12]. Uvažujeme-li stále stejným směrem, můžeme ještě připomenout následující pozorování učiněné Prokleem, které sloužilo jako motto pro Keplerovu knihu „O harmoniích světa": „Při studiu přírody byl největší přínos učiněn pomocí matematiky, která ve svém základu odhaluje harmonii myšlenek." Z úvodu a závěru knihy d'Arcyho Thompsona „O růstu a formě" [13] citujme následující myšlenky: „Pátráním po rozdílech nebo podstatných kontrastech mezi jevy organického či neorganického, živého či neživého světa se zabývalo mnoho myslitelů, zatímco *pátrání po příbuznosti principů nebo po podstatných podobnostech se věnovalo jen málo z nich*"; *„... my, obyvatelé tohoto světa, a svět, v němž žijeme, jsme podrobeni podobným*

Prof. Leopold Verstraelen, Centre of Pure and Applied Differential Geometry, Katholieke Universiteit Leuven, Celestijnenlaan 200B, B-3001 Heverlee-Leuven, Belgie.

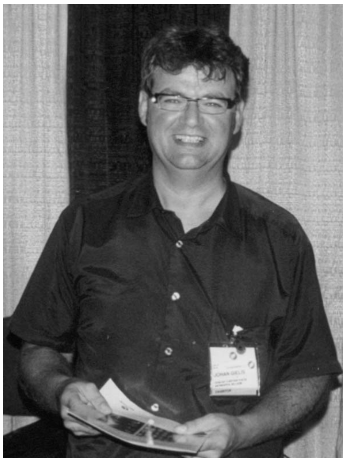
Z článku *Universal natural shapes* (elektronický preprint) se svolením autora přeložil Oldřich Kowalski.

*fyzikálním a matematickým zákonům"*. V této stati je mým cílem pokusit se ukázat, že plástve medu a lastury, krystaly a galaxie, molekuly DNA a květy, lodyhy, tkáň a částečky pylu na rostlinách atd. (a dokonce sám relativistický časoprostor v souladu s podobnými přirozenými podmínkami pro křivost) nabývají tvarů s podobným geometrickým formálním popisem. Takže, podle mého mínění, obsah tohoto článku je pouze jednou z dalších ilustrací toho, že *„přírodu těší, když je pozorována očima a mozky geometrů"* [1].

První kapitola začíná Laméovými křivkami [14], a potom následuje krátký přehled o Gielisových křivkách, plochách a transformacích, které popisují velmi dobře výjimečnou mnohotvárnost tvarů nebo forem křivek a ploch, a proto mají význam také v obecnějším případě podvariet libovolných dimenzí, a které jsou buďto „regulární", nebo „po částech lineární", k čemuž stačí změna několika exponentů nebo koeficientů v jedné jediné formuli.

Ve druhé kapitole, v souvislosti s tím, že příroda vytváří tvary nebo formy odpovídající některému optimalizačnímu principu (viz [2, 3, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21]), zejména na základě nedávného společného článku se S. Haesenem, lze vypozorovat, že také Friedmannovy a Lemaîtrovy časoprostory, které jsou všeobecně známy v souvislosti s tzv. teorií Velkého třesku, jsou v podstatě popsány stejným typem geometrických formulí.

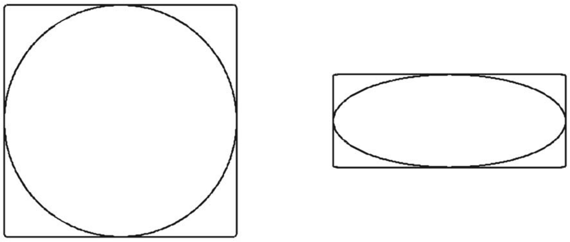
Obsah tohoto článku byl poprvé zveřejněn v mých přednáškách *O geometrii a filosofii přírody* na univerzitě v Kragujevaci a později v Akademii v Messině v roce 2004 a souvisí podstatně s článkem [23], který jsem měl to potěšení napsat společně s Johanem Gielisem a Stefanem Haesenem.



Obr. 1. Antwerpský botanik Johan Gielis.

## 1. O geometrii toho, co „přebývá v našem světě"

Nechť $x$ a $y$ označuje kartézské souřadnice v rovině $\mathbf{R}^2$. Potom rovnice kružnice o poloměru $r$ a se středem v počátku $O$ je tvaru $x^2 + y^2 = r^2$ a rovnice elipsy s délkami poloos $a$, $b \neq a$ se středem v $O$ je tvaru $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$.

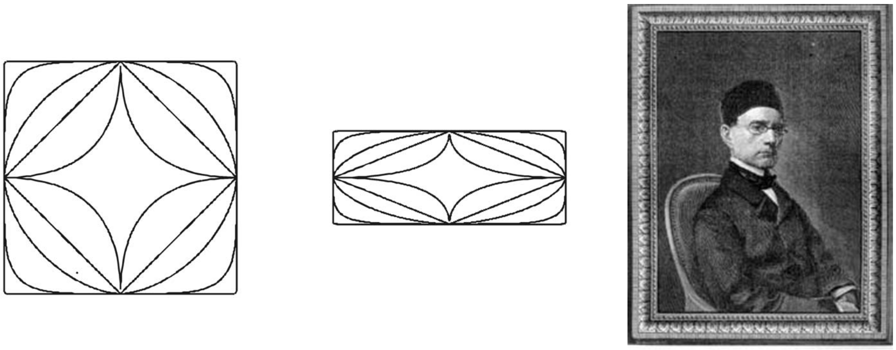


Obr. 2. Kružnice a elipsy.

Kružnice a elipsy, stejně jako obrysy čtverců nebo kosočtverců, jsou podle Lamého všechny obsaženy v třídě tzv. „super-elips“, tj. rovinných křivek určených rovnicí tvaru

$$\left|\frac{x}{A}\right|^p + \left|\frac{y}{B}\right|^p = 1, \tag{1}$$

kde $p$, $A$, $B$ jsou kladná čísla a $A$, $B$ nemusí být nutně vzájemně různá. (Obrys čtverce se například získá pro $p = A = B = 1$ — poznámka překladatele.)

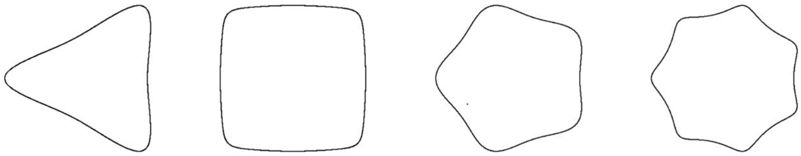


Obr. 3. Lamého superkružnice a superelipsy.

Jestliže zavedeme polární souřadnice $\varrho$ a $\theta$ vztahy $x = \varrho\cos\theta$, $y = \varrho\sin\theta$ a do nové rovnice místo jediného exponentu $p$ zavedeme tři nezávislé exponenty $p \neq 0$, $q$, $r$ a navíc zavedeme do argumentu obloukové míry koeficient $m/4$, obdržíme rovnici

$$\varrho = \left(\left|\frac{\cos(m\theta/4)}{A}\right|^q + \left|\frac{\sin(m\theta/4)}{B}\right|^r\right)^{-1/p}. \tag{2}$$

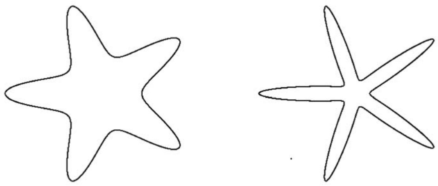
Některé příklady rovinných křivek daných rovnicí typu (2) jsou zakresleny (až na volbu měřítka) v obrázku 4. Zde je ve všech příkladech $A = B$ a v příkladě (a) položíme $m = 3$, $p = 4.5$, $q = r = 10$, v příkladě (b) položíme $m = 4$, $p = 12$, $q = r = 15$, v příkladě (c) položíme $m = 5$, $p = q = r = 4$ a v příkladě (d) položíme $m = 7$, $p = 10$, $q = r = 6$.



Obr. 4. Křivky (a), (b), (c) a (d) dané rovnicí (2).

Tyto křivky docela přesně popisují (v průřezu) tvary řapíku stulíku žlutého (a), dále stonku krtičníku hlíznatého (b), přesličky (c) a maliníku (d).

Podobně například různé druhy mořských hvězdic odpovídají křivkám daným rovnicí (2), kde $A = B$, a dále v případě (e) máme $m = 5$, $p = 2$, $q = r = 7$ a v případě (f) máme $m = 5$, $p = 2$, $q = r = 13$.

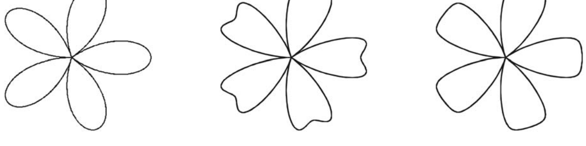


Obr. 5. Křivky (e) a (f) dané rovnicí (2).

Rovinné křivky vyjádřené rovnicí (2) v polárních souřadnicích mohou být v jistém smyslu interpretovány tak, že jsme je obdrželi z *jednotkové kružnice se středem v $O$* ($\varrho = 1$) pomocí *transformace* dané pravou stranou rovnice (2), a to pro každou volbu parametrů $A$, $B$, $m$, $p$, $q$, $r$. A obdobně, místo transformování jednotkové kružnice, všechny rovinné křivky určené polární rovnicí $\varrho = f(\theta)$ (kde $f$ může být v podstatě jakákoliv nezáporná reálná funkce) mohou být takto transformovány v rovinné křivky s polární rovnicí

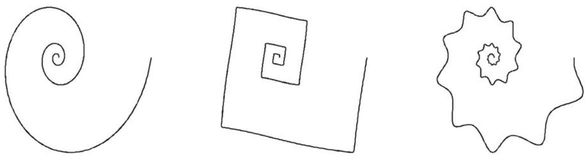
$$\varrho = f(\theta) \left( \left| \frac{\cos(m\theta/4)}{A} \right|^q + \left| \frac{\sin(m\theta/4)}{B} \right|^r \right)^{-1/p}. \tag{3}$$

Následující obrázek ukazuje (až na změnu měřítka) takové transformace Grandiho růžice (a) s rovnicí $\varrho = f(\theta) = |\cos(2.5\theta)|$ do „super-růžic“, a to v případě (b) zadáním parametrů $m = 2.5$, $p = \frac{1}{1.3}$, $q = r = 2.7$ a v případě (c) zadáním parametrů $m = 2.5$, $p = q = r = 5$.



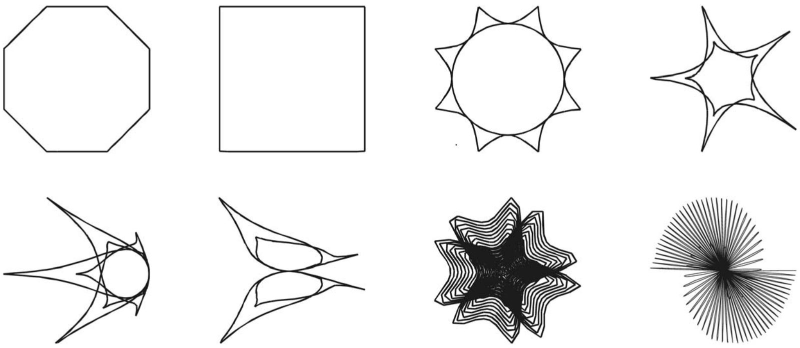
Obr. 6. Růžice (a) a dvě odpovídající super-růžice (b) a (c).

A pokud například začneme s logaritmickou spirálou (a) $\varrho = f(\theta) = \mathrm{e}^{0.2\theta}$, potom transformací (3) se dostanou dvě „super-spirály", a to (b) pro parametry $m = 4$, $p = q = r = 100$ a (c) pro parametry $m = 10$, $p = q = r = 5$.

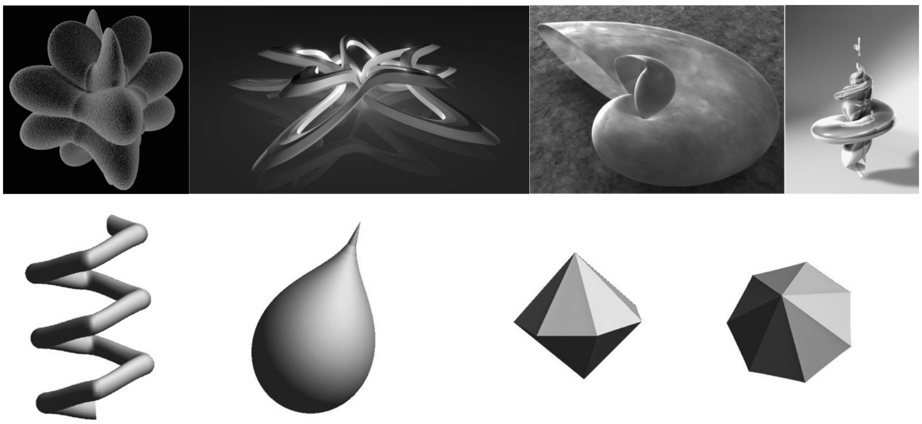


Obr. 7. Logaritmická spirála (a) a dvě odpovídající super-spirály (b) a (c).

To, co jsme stručně popsali v případě rovinných křivek, se dá snadno rozšířit na křivky v trojrozměrném prostoru (a dává smysl i pro podvariety libovolné dimenze a kodimenze). Místo super-kružnic a super-elips se octnou ve hře „super-sféry" a „super-elipsoidy". A tak jako v případě rovinných křivek, i v případě křivek a ploch v trojrozměrném prostoru se obdrží *geometrické transformace* analogické formulím (2) a (3), které umožňují *sjednocení širokého spektra přírodních a abstraktních tvarů.*



Obr. 8. Některé další Gielisovy křivky v rovině.



Obr. 9. Některé Gielisovy plochy v trojrozměrném prostoru.

Další podrobnosti o přirozených tvarech objevujících se u živočichů a rostlin, v jejich buňkách a tkáních, ve sněhových vločkách a pavučinách, v krystalech a při proudění kapalin atd., které jsou tak přesně popsány výše zmíněnými transformacemi, a to buď přímo jednou z nich nebo nepřímo, kombinací několika z nich, se najdou (včetně množství příkladů) v [24, 25, 26, 27, 28, 29]. Inspirováni Pietem Heinem, Johan Gielis a jeho spolupracovník Bert Beirinckx použili v těchto publikacích termín „superformule“ pro transformační formule typu (2) a (3). A zejména článek [27] se věnuje počátkům již uvedených pozorování, a to v pojmu „super-vejce“ (rotačního „superelipsoidu“) u Pieta Heina, který se s jejich pomocí snažil geometricky popsat tvary průřezů bambusových stébel.

Obr. 10. Piet Hein a „čtvercový“ bambus.

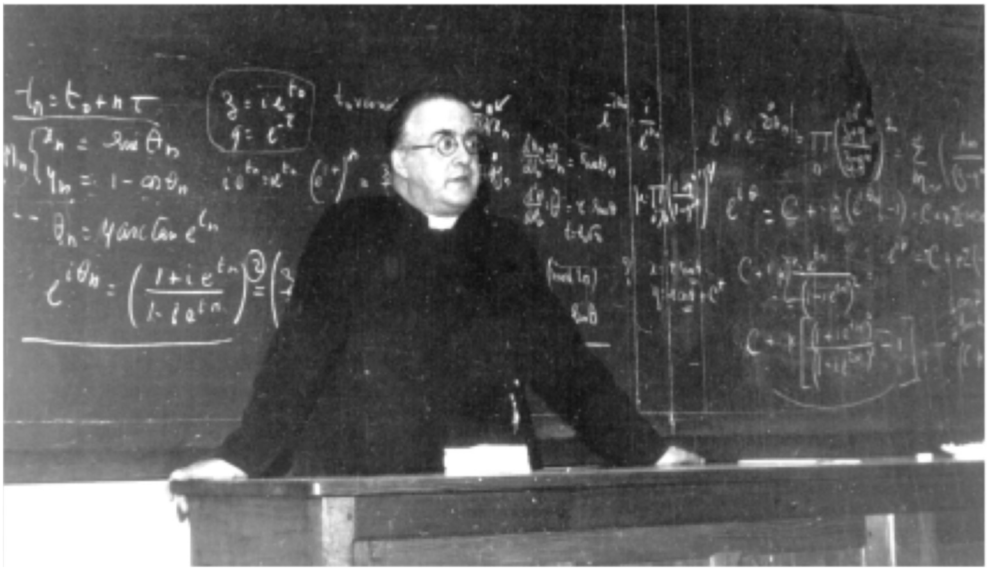
Také například v [13, 25] jsou pro takové „superformule“ vyskytující se v rovině a trojrozměrném prostoru diskutovány různé principy přirozené optimalizace, někdy podrobně a jindy krátce.

Konečně poznamenejme, že hyperbolické verze výše uvedených superformulí (tj. takových, kde obyčejné trigonometrické funkce jsou nahrazeny hyperbolickými) si skutečně zasluhují, aby byly ještě seriózně prostudovány.

## 2. O geometrii „světa, ve kterém žijeme“

Naším záměrem je teď ukázat, že kromě *křivek* a *ploch* daných formulemi (2) a (3), které z čistě geometrického hlediska splňují přirozené podmínky pro křivost a které se přirozeným způsobem objevují ve světě fyziky, chemie, geologie, biologie atd., a proto jsou důležité také ve světě umění a různých technologií a vlastně všech „věcí“, ve skutečnosti také sám náš *relativistický časoprostorový vesmír* je v podstatě určen podobnými podmínkami pro křivost a lze jej popsat podobnými formulemi.

*Fyzikální časoprostory*, které jsou *ideálními podvarietami* ve smyslu B. Y. Chena [16, 17, 20], byly nedávno studovány například v [31, 32]. Zejména některé modely časoprostorů nalezené Georgem Lemaîtrem [33] (v literatuře známé též jako Friedmannovy-Lemaîtrovy-Robertsonovy-Walkerovy časoprostory) se ukazují být ideálními nadplo-



Obr. 11. Profesor Lemaître z univerzity v Leuvenu.

chami v Minkowského prostorech. Tyto časoprostory stály také na počátku teorií „Velkého třesku".

V tomto směru a mnohem vhodněji sám Lemaître užil termíny „prvotní atom" a „kosmické vejce", kde zvláště ten druhý dává nejkrásnější obraz „začátku života" našeho vesmíru.

Z čistě formálního hlediska je Robertsonova-Walkerova metrika na $\mathbf{R}^4$ dána v lokální souřadnicové soustavě $(x, y, z, t)$ vzorcem

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + \left\{c(t) \cdot \left[1 + \tfrac{1}{4}k(x^2 + y^2 + z^2)\right]\right\}^{-2} \cdot (\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2), \qquad (k = +1, 0, -1), \quad (4)$$

na jehož základě prostorové řezy celého časoprostoru v kterémkoliv časovém okamžiku $t$ jsou trojrozměrné Riemannovy prostory s konstantní křivostí $c(t)$. Transformace ploché trojrozměrné „pythagorejské" metriky $\mathrm{d}s^2 = (\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2)$ do trojrozměrné metriky s libovolnou konstantní křivostí pomocí vynásobení vhodnou funkcí byla nalezena v podstatě již Riemannem a von Helmholtzem při jejich zkoumání základů geometrie [35, 36]. Majíce na paměti, že Riemannova geometrie je ústředním tématem studia v celé geometrii [7], zdá se být užitečné, abychom čas od času přemýšleli o obou těchto důležitých publikacích, zejména ve světle počátků geometrie jako oboru matematiky založeného na fyzických geometrických zkušenostech, které lidské bytosti získávají svými vizuálními i jinými počitky a postřehy. V časoprostorových metrikách, jako je ta ve formuli (4), můžeme pozorovat konformní deformace plochých prostorových metrik na metriky s konstantní prostorovou křivostí (libovolného znaménka), která se samozřejmě mění v čase, což celkově vyústí ve *formální deformaci Pythagorovy věty, podobně jako dříve uvažované supertransformace deformovaly* *rovnice euklidovských kružnic nebo sfér.* V této souvislosti navíc poznamenejme, že Riemann se ve své vůbec první přednášce o své nové geometrii explicitně zmínil o indicatrix $x^4 + y^4 = 1$ jako o relevantním rozšíření euklidovské kružnice $x^2 + y^2 = 1$, čímž koncipoval speciální Riemannovu-Finslerovu metriku

$$\mathrm{d}s = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left(\mathrm{d}x^i\right)^p \right\}^{1/p}$$

(viz nedávné práce Cherna o Riemannově-Finslerově geometrii a Mirona o Lagrangeově geometrii, přičemž obojí souvisí s „variačním“ 23. Hilbertovým problémem [6, 12]).

Je třeba například připomenout, že *Delaunayovy rotační plochy*, tj. ty, které mají konstantní střední křivost $H$ (roviny a katenoidy pro $H = 0$, sféry, unduloidy a nonoidy pro $H \neq 0$), se v podstatných souvislostech objevují v různých oblastech přírodních věd. Dříve zmíněné geometricky přirozené podmínky pro křivost se týkají na jedné straně, ve své nejjednodušší formě, *konstantnosti křivostí*, jako je střední křivost $H$ (vyjadřující stejnoměrné napětí na ploše) nebo Gaussova křivost $K$ (pro plochy v trojrozměrném eukleidovském prostoru) nebo sekcionální křivost pro obecné Riemannovy variety, jejichž konstantnost znamená (podle Riemanna, von Helmholtze a Lieho) splnění „axiomu volnosti pohybu“, a tedy jsou to příklady dosažení rovností v *optimálních nerovnostech*, které platí mezi různými křivostmi skalárního typu pro všechny podvariety. Takové nerovnosti zejména dávají nevyhnutelné vztahy mezi křivostmi, které vyplývají jen z vnitřní geometrie těchto podvariet (jako jsou sekcionální křivosti, skalární křivost $\tau$, která vyjadřuje jejich jistý aritmetický průměr a obecněji všechny nedávno zavedené Chenovy křivosti [8], které společně dávají jakoby DNA strukturu Riemannových variet), a křivostmi, které jsou zásadně spojeny s tvary, jež tyto podvariety nabývají ve svém „okolním světě“, tj. *vnějšími křivostmi* (které se dají vyjádřit pomocí druhé základní formy $h$ a normálového tenzoru křivosti $R^{\perp}$, z nichž základní je druhá mocnina střední křivosti $H^2$ vyjadřující povrchové napětí na podvarietě). Pro všechny plochy $M$ v trojrozměrném eukleidovském prostoru ukázal již Euler, že vždy platí nerovnost $K \leqq H^2$ na celém $M$ a rovnost ve všech bodech nastává, právě když $M$ je část roviny nebo sféry (podle Meusnierovy věty). Tak zvané Chenovy nerovnosti zobecňují hořejší Eulerovu nerovnost, pokud jde o dimenze a kodimenze podvariet, o typ prostorů, ve kterém jsou tyto podvariety vnořeny, a pokud jde o druhy vnitřních, resp. vnějších křivostí, objevujících se v těchto nerovnostech. A podvarieta se nazývá *ideální podvarietou* v nějakém prostoru, jestliže se na ní některá z Chenových nerovností redukuje na rovnost. Jestliže známe vnitřní geometrii určité podvariety [tj. její indukovanou Riemannovu metriku, pozn. překl.] a připustíme všechny její izometrické deformace v příslušném prostoru, pak ideální podvariety jsou právě ty z množiny takto získaných podvariet, které vykazují nejmenší možnou vnější křivost určitého typu. To se dá přirovnat k situaci, kdy (fiktivní) bytosti žijící v nějakém světě se přizpůsobí tak, že jsou vystaveny minimálnímu stresu. Pokud se zajímáme o ideální lorentzovské nadplochy v Minkowského prostorech různých dimenzí, přirozeně narazíme také na Lemaîtrova univerza, viz například [32]. Podmínky křivosti pro podvariety, o kterých jsme již hovořili, jako je konstantnost různých křivostí a Chenovy nerovnosti a jiné přirozené nerovnosti, jako jsou Willmoreovy podmínky a podobně, v jistém smyslu všechny vyjadřují jisté variační principy ve směru studovaném zejména d'Arcy Thompsonem v [13].

L i t e r a t u r a


[1] Verstraelen, L.: *The geometry of eye and brain.* Soochow Journal of Mathematics *30* (2004) (volume in honour of Professor Bang-Yen Chen), 367–376.

[2] Coolidge, J. L.: *A history of geometrical methods.* Dover Publ., London (1963).

[3] Bronowski, J.: *The ascent of man.* Litte, Brown & Co, Boston 1973.

[4] Lejeune, A.: *Euclide et Ptolémée, deux stades de l'optique géométrique grecque.* Université de Louvain, Bureau du "Recueil" (1948).

[5] Montel, P. e. a. (eds.): *Encyclopédie française, Tome 1.* Larousse, Paris 1937.

[6] Dillen F., Verstraelen, L. (eds.): *Handbook of differential geometry.* North-Holland, Amsterdam, Vol. 1 (2000) and Vol. 2 (2005).

[7] Chern, S. S., Chen, W. H., Laser, K. S.: *Lectures on differential geometry.* World Scientific, Singapore 1999.

[8] Kühnel, W.: *Differential geometry: curves-surfaces-manifolds.* AMS-Student Math. Library, vol. 16 (2002).

[9] Penrose, R.: *The geometry of the universe.* In *Mathematics Today* (ed. Steen, L. A.), Vintage Books, New York 1980.

[10] Penrose, R.: *The emperor's new mind, concerning computers, minds and the laws of physics.* Oxford University Press, Oxford 1989.

[11] Browder, F. E., Mac Lane, S.: *The relevance of mathematics.* In *Mathematics Today* (ed. Steen, L. A.), Vintage Books, New York 1980.

[12] Hilbert, D.: *Mathematical problems (1900 – Paris – Lecture).* AMS-Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol. 28 (1976).

[13] d'Arcy Thompson, W.: *On growth and form.* Cambridge University Press, Cambridge 1917.

[14] Lamé, G.: *Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie.* Hermann, Paris 1818.

[15] Thompson, A. C.: *Minkowski geometry.* Encyclopedia of mathematics and its applications, Vol. 63, Cambridge University Press, Cambridge 1996.

[16] Chen, B.-Y.: *What can we do with Nash's embedding theorem?* Soochow Journal of Mathematics *30* (2004), 303–338.

[17] Chen, B.-Y.: *Riemannian submanifolds.* In [6, Vol. 1].

[18] Hildebrandt, S., Tromba, A.: *Panoptimum.* Spektrum, Heidelberg 1986.

[19] Willmore, T. J.: *A survey on Willmore immersions.* In *Geometry and Topology of submanifolds*, Vol. IV, (eds. Dillen, F., Verstraelen, L.), World Scientific, Singapore 1992.

[20] Chen, B.-Y.: *Total mean curvature and submanifolds of finite type.* World Scientific, Singapore 1984.

[21] Barros, M.: *The conformal total tension variational problem in Kaluza-Klein supergravity.* Nuclear Physics B *535* (1998), 531–551.

[22] Barros, M.: *Willmore-Chen branes and Hopf T-duality.* Class. Quantum Grav. *17* (2000), 1979–1988.

[23] Gielis, J., Haesen, S., Verstraelen, L.: *Universal natural shapes; from the supereggs of Piet Hein to the cosmic egg of Georges Lemaître.* Kragujevac Journal of Mathematics *28* (2005), 57–68.

[24] Gielis, J.: *A generic transformation that unifies a large number of natural and abstract shapes.* American Journal of Botamy *90* (2003), 333–338.

[25] Gielis, J.: *Inventing the circle.* Geniaal Press, Antwerpen (2003).

[26] Gielis, J., Gerats, T.: *A botanical perspective on plant shape modeling.* Proc. International Conference on Computing, Communications and Control Technologies, Vol. VI (2004), 265–272.

[27] Gielis, J.: *Wiskundige supervormen bij bamboes.* Newsletter Belgian Bamboo Society *13* (1996), 20–26.

[28] Gielis, J., Beirinckx, B., Bastiaens, E.: *Superquadrics with rational and irrational symmetries.* Proc. 8th ACM symposium on Solid Modeling and Applications (2003), 262–265.

[29] Gielis, J.: *Variational superformula curves for 2D- and 3D graphic arts.* Proc. World Multi-Conference on Systemics, Cybernetics and Informatics, Vol. V: Computer Science and Engineering (2004), 119–124.

[30] Haesen, S., Sebeković, A., Verstraelen, L.: *Relations between intrinsic and extrinsic curvatures.* Kragujevac J. Math. *25* (2003), 139–145.

[31] Dillen, F., Haesen, S., Petrović-Torgasev, M., Verstraelen, L.: *An inequality between intrinsic and extrinsic scalar curvature invariants for codimension 2 embeddings.* J. Geom. Phys. *52* (2004), 101–112.

[32] Haesen, S., Verstraelen, L.: *Ideally embedded space-times.* J. Math. Phys. *45* (2004), 1497–1510.

[33] Lemaître, G.: *Un univers homogène de masse constante et de rayon croissant, rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extra-galactique.* Annales Soc. Sc. Bruxelles *47* (1927), 49–59.

[34] O'Neill, B.: *Semi-Riemannian geometry, with applications to relativity.* Acad. Press, New York 1983.

[35] von Helmholtz, H.: *Ueber die Tatsachen welche der Geometrie zu Grunde liegen.* In *Abhandlungen zur Philosophie und Geometrie*, Junghaus, Cuxhausen 1987.

[36] Riemann, B.: *Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen.* In *Gaussche Flächentheorie, Riemannsche Räume und Minkowski-Welt*, Teubner, Leipzig 1984.

P. S. Autor mnohokrát děkuje Bee Petersové, Jennymu Nossarkovi a Kristofu Lenjouovi za editaci tohoto textu.