Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Pavel Drábek

Herglotzův trik a rozklad kotangenty na parciální zlomky

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 51 (2006), No. 4, 283–287

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/141328

Herglotzův trik a rozklad kotangenty na parciální zlomky

Pavel Drábek, Plzeň

1. Úvod

Zatímco rozvoje elementárních funkcí v Taylorovu řadu je možné nalézt v každé učebnici matematické analýzy, jiné způsoby jejich reprezentací nejsou tak dobře známé. Formule, jejíž odvození chceme v tomto článku předvést, pochází od L. Eulera[1]) a představuje rozvoj funkce kotangens v nekonečný součet parciálních zlomků:

$$\pi \operatorname{cotg} \pi x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} \right) \tag{1.1}$$

pro všechna $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Jako obvykle, nekonečný součet je definován jako limita částečných součtů, tj. (1.1) znamená

$$\pi \operatorname{cotg} \pi x = \frac{1}{x} + \lim_{k \to \infty} \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} \right), \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}.$$

Jiný, elegantnější zápis rozvoje (1.1) je následující:

$$\pi \operatorname{cotg} \pi x = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{x+n}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}. \tag{1.2}$$

Důkaz rovnosti (1.1) (resp. (1.2)), který zde předvedeme, je připisován německému matematikovi Gustavu Herglotzovi (1881–1953, byl profesorem na univerzitách v Lipsku a v Göttingen) a lze jej nalézt např. v knize [1].

Jako aplikaci rovnosti (1.1) ukážeme, jak ji lze využít k vyjádření hodnot Riemannovy funkce v sudých přirozených číslech.

[1]) Leonhard Euler, 1707–1783, švýcarský matematik, odvodil vzorec (1.1) v § 178 své práce *Introductio in Analysin Infinitorum* z roku 1748.

Prof. RNDr. Pavel Drábek, DrSc. (1953), katedra matematiky FAV ZČU v Plzni, Univerzitní 22, 306 14 Plzeň.

Autor byl podporován výzkumným záměrem MSM 4977751301.

2. Důkaz rovnosti (1.2)

Označíme

$$f(x) := \pi \operatorname{cotg} \pi x, \qquad g(x) := \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{x+n}$$

a v pěti krocích dokážeme, že $f(x) = g(x)$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

1. krok: *Ukážeme, že g je korektně definovaná a spojitá funkce v množině $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.* (Tento fakt je dobře znám pro funkci f.)

S použitím vztahu

$$\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} = -\frac{2x}{n^2 - x^2}$$

můžeme g psát ve tvaru

$$g(x) = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2}$$

a k důkazu našeho tvrzení tedy stačí ověřit, že pro každé $x_0 \notin \mathbb{Z}$ existuje okolí $\mathcal{U}(x_0)$ takové, že $\mathcal{U}(x_0) \cap \mathbb{Z} = \emptyset$ a řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - x^2} \tag{2.1}$$

konverguje stejnoměrně v $\mathcal{U}(x_0)$. Vynecháme-li konečný počet členů, které odpovídají $n = 1$ a $2n - 1 \leqq x_0^2$, můžeme zbývajících nekonečně mnoho členů řady (2.1), pro něž platí $2n - 1 > x_0^2$, tj. $n^2 - x_0^2 > (n-1)^2 > 0$, odhadnout takto:

$$0 < \frac{1}{n^2 - x_0^2} < \frac{1}{(n-1)^2}\,.$$

Vzhledem k ostré nerovnosti tento odhad platí nejen pro x_0, ale i pro všechna $x \in \mathcal{U}(x_0)$, je-li $\mathcal{U}(x_0)$ dostatečně malé okolí. Protože řada $\sum_{n=2}^{\infty} 1/(n-1)^2$ konverguje, konverguje také podle Weierstrassova kritéria řada (2.1), a to absolutně a stejnoměrně v $\mathcal{U}(x_0)$.

2. krok: *Ukážeme, že g je na $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ periodická funkce s periodou* 1. (Tento fakt je dobře znám pro funkci f.)

Položme

$$g_N(x) := \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{x+n}\,.$$

Potom

$$\begin{aligned} g_N(x+1) &= \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{x+1+n} = \sum_{n=-N+1}^{N+1} \frac{1}{x+n} = \\ &= g_{N-1}(x) + \frac{1}{x+N} + \frac{1}{x+N+1}. \end{aligned}$$

Přechodem k limitě odtud plyne

$$\begin{aligned} g(x+1) &= \lim_{N\to\infty}\left(g_{N-1}(x)+\frac{1}{x+N}+\frac{1}{x+N+1}\right)= \\ &= \lim_{N\to\infty} g_{N-1}(x)=g(x). \end{aligned}$$

3. krok: *Ukážeme, že g je lichá funkce.* (Tato vlastnost je dobře známa pro funkci f.)

Pro každé $N\in\mathbb{N}$ zřejmě platí

$$g_N(-x)=-g_N(x)$$

pro všechna $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. Přechodem k limitě pro $N\to\infty$ dostaneme $g(-x)=-g(x)$.

Poslední dva kroky důkazu se nazývají *Herglotzův trik*: dokážeme, že f a g vyhovují téže funkcionální rovnici a že $h:=f-g$ lze spojitě rozšířit na celé $\mathbb{R}$ a toto rozšíření je tam identicky rovno nule.

4. krok: *Prověříme, že f a g splňují funkcionální rovnici*

$$p\left(\frac{x}{2}\right)+p\left(\frac{x+1}{2}\right)=2p(x),\qquad x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}, \tag{2.2}$$

a jejich rozdíl $f-g$ je možné dodefinovat v bodech $\mathbb{Z}$ tak, že tvoří spojitou funkci v celém $\mathbb{R}$.

Pomocí součtových vzorců pro sinus a kosinus: $\sin(x+\pi/2)=\cos x$, $\cos(x+\pi/2)= =-\sin x$, $\sin x=2\sin(x/2)\cos(x/2)$, $\cos x=\cos^2(x/2)-\sin^2(x/2)$ dostaneme pro $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$:

$$f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{x+1}{2}\right)=\pi\left(\frac{\cos\frac12\pi x}{\sin\frac12\pi x}-\frac{\sin\frac12\pi x}{\cos\frac12\pi x}\right)=2\pi\,\frac{\cos(\frac12\pi x+\frac12\pi x)}{\sin(\frac12\pi x+\frac12\pi x)}=2f(x).$$

Na druhé straně pro každé $N\in\mathbb{N}$ platí

$$g_N\left(\frac{x}{2}\right)+g_N\left(\frac{x+1}{2}\right)=2g_{2N}(x)+\frac{2}{x+2N+1}\,,$$

neboť

$$\frac{1}{\frac12 x+n}+\frac{1}{\frac12(x+1)+n}=2\left(\frac{1}{x+2n}+\frac{1}{x+2n+1}\right).$$

Přechodem k limitě pro $N\to\infty$ tak dostáváme pro $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$

$$g\left(\frac{x}{2}\right)+g\left(\frac{x+1}{2}\right)=2g(x).$$

Nyní definujeme

$$h(x):=f(x)-g(x)=\pi\operatorname{cotg}\pi x-\left(\frac{1}{x}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x}{n^2-x^2}\right). \tag{2.3}$$

Jak plyne z předchozího, funkce h je spojitá v $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, je periodická s periodou 1, je lichá a splňuje funkcionální rovnici (2.2). Nyní vyšetříme chování funkce h v okolí celočíselných hodnot.

Použijeme-li dvakrát l'Hospitalovo pravidlo, případně rozvoj kotangenty v okolí nuly, obdržíme

$$\lim_{x\to 0}\left(\pi \operatorname{cotg} \pi x - \frac{1}{x}\right) = 0.$$

Protože také $\lim\limits_{x\to 0} \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2x/(n^2 - x^2) = 0$, vyplývá z (2.3), že

$$\lim_{x\to 0} h(x) = 0.$$

Platí též

$$\lim_{x\to n} h(x) = 0$$

pro každé $n \in \mathbb{Z}$, neboť h je periodická funkce s periodou 1. Položíme-li $h(x) := 0$ pro $x \in \mathbb{Z}$, potom funkce h je spojitou funkcí na celém $\mathbb{R}$.

5. krok: *Funkce h je identicky rovna nule v celém $\mathbb{R}$.*

Protože h je periodická a spojitá v $\mathbb{R}$, musí nabývat v $\mathbb{R}$ své maximální hodnoty m. Nechť $x_0 \in [0,1]$ je bod, ve kterém $h(x_0) = m$. Protože h splňuje (2.2), platí

$$h\left(\frac{x_0}{2}\right) + h\left(\frac{x_0+1}{2}\right) = 2m,$$

a tedy $h(x_0/2) = m$ [a také $h\big((x_0+1)/2\big) = m$]. Použijeme-li (2.2) znovu, potom

$$h\left(\frac{x_0}{2^2}\right) + h\left(\frac{x_0/2+1}{2}\right) = 2m,$$

to znamená $h(x_0/2^2) = m$. Postupnými iteracemi dostaneme, že $h(x_0/2^n) = m$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Ze spojitosti h v bodě 0 pak vyplývá, že $h(0) = m$ a odtud $m = 0$.

Dokázali jsme, že $h(x) \leqq 0$ platí pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Protože však h je lichá funkce, ostrá nerovnost $h(x) < 0$ nemůže být splněna v žádném $x \in \mathbb{R}$. Proto $h(x) = 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Tím je důkaz (1.1) dokončen.

Poznamenejme na závěr tohoto odstavce, že rovnost (1.1) platí dokonce v oboru komplexních čísel a že elegantní důkaz tohoto obecného faktu byl publikován již v roce 1892 německým matematikem Friedrichem Hermannem Schottkym v jeho článku *Über das Additionstheorem der Cotangente*..., Jour. für Reine u. Angew. Math. *110*, 324–337. Gustav Herglotz později odhalil, že se uvedený Schottkeho důkaz obejde bez tzv. principu maxima. Elementární důkaz pak Herglotz předváděl na svých přednáškách a nikdy jej sám nepublikoval (viz [2]).

3. Zajímavý důsledek rovnosti (1.1)

Riemannova[2]) zeta funkce $\zeta = \zeta(s)$ je definována pro všechna $s > 1$ předpisem

$$\zeta(s) := \sum_{n\geqq 1} \frac{1}{n^s}$$

a její vlastnosti mají důležitou úlohu v teorii čísel. V tomto odstavci ukážeme, že pomocí vzorce (1.1) je možné vyjádřit hodnoty funkce ζ v celých kladných sudých číslech: $\zeta(2k)$, $k \in \mathbb{N}$. Jak jsme odvodili v předcházejícím odstavci (srov. (2.3)), platí pro $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

$$\pi \operatorname{cotg} \pi x = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2}\,. \tag{3.1}$$

Rovnost (3.1) vynásobíme x a položíme $y := \pi x$. Potom pro $|y| < \pi$ dostáváme

$$y \operatorname{cotg} y = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^2}{\pi^2 n^2 - y^2} = 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^2}{\pi^2 n^2} \frac{1}{1 - \left(\dfrac{y}{\pi n}\right)^2}\,.$$

Poslední zlomek je součtem geometrické řady s prvním členem 1 a s kvocientem $\big(y/(\pi n)\big)^2$. Můžeme tedy psát

$$\begin{aligned} y \operatorname{cotg} y &= 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{y}{\pi n}\right)^{2k} = \\ &= 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi^{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} \right) y^{2k} = \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{\pi^{2k}}\, \zeta(2k) \right) y^{2k}. \end{aligned}$$

Poznamenejme, že záměna sčítacích indexů je možná díky absolutní konvergenci uvedené nekonečné řady. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ je činitel $-(2/\pi^{2k})\,\zeta(2k)$ koeficientem u mocniny y^{2k} rozvoje funkce $y \operatorname{cotg} y$ v mocninnou řadu se středem v bodě 0.

Vyjádření hodnot Riemannovy zeta funkce v kladných sudých číslech znal již Leonhard Euler (*Opera Omnia* (1) *14*, 73–86). Podrobnosti o Eulerově přístupu lze nalézt v článku P. Stäckela *Eine vergessene Abhandlung Leonhard Eulers über die Summe der reziproken Quadrate der natürlichen Zahlen*, Biblio. Math. (3) *8* (1907/08), 37–54 (další zajímavé citace viz též [2]).

Autor článku děkuje Ivanovi Netukovi a Jiřímu Veselému z MFF UK v Praze za cenné připomínky a náměty, které vedly k vylepšení textu.

L i t e r a t u r a

[1] Aigner, M., Ziegler, G. M.: *Proofs from the BOOK.* 2nd edition, Springer Verlag, Berlin–Heidelberg–New York 2002.

[2] Remmert, R.: *Theory of Complex Functions.* Springer Verlag, New York 1991.

[2]) Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826–1866, německý matematik.