Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Jiří Neustupa
Navierovy-Stokesovy rovnice: regularita nebo „blow-up"?

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 51 (2006), No. 3, 187–197

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/141317`

Navierovy-Stokesovy rovnice: regularita nebo „blow-up"?

Jiří Neustupa, Praha

Na internetové stránce `www.claymath.org/millenium/` (Clayův matematický ústav) můžete nalézt soupis vybraných neřešených matematických problémů, s nimiž si již dlouho láme hlavu mnoho badatelů a jejichž vyřešení je považováno za velkou výzvu pro nové tisíciletí. Jedním z těchto problémů je otázka regularity řešení Navierových-Stokesových rovnic. Za vyřešení je nabízena odměna jednoho milionu dolarů. Autor však zná řadu lidí, kteří jsou samotnou úlohou tak fascinováni, že nabízenou částku považují za podružnou. Navierovy-Stokesovy rovnice jsou součástí mnoha populárních a v aplikacích často užívaných matematických modelů v mechanice tekutin. V tomto článku se pokusíme čtenářům přiblížit, o co ve zmíněné úloze jde.

1. Od antiky do 18. století

Historie matematického modelování stavů i pohybů tekutin začíná ve starověku. V pracích Aristotela (384–322 př. n. l.) lze nalézt úvahy o roli větru, vesel a odporu vody při plavbách lodí na moři. Známou příhodou se proslavil Archimedes (287–212 př. n. l.), když jej v Syrakusách požádal král Hieron o přezkoumání toho, zda nově zhotovená královská koruna je skutečně z ryzího zlata nebo zda jej zlatník podvedl a přimíchal do ní jiný kov. Bylo známo, že tělesa mají jinou váhu, jsou-li ponořena do vody, než na vzduchu. Archimedes přišel na to, že rozdíl vah je roven váze vody, kterou těleso při ponoření vytlačí. Údajně jej to napadlo při koupání ve vaně a své nadšení dal najevo zvoláním „Heureka!" Vyřešit úkol zadaný Hieronem pak bylo snadné: Archimedes zvážil korunu na vzduchu i ve vodě, zjistil kolik vody koruna vytěsnila a toto množství vody také zvážil. Porovnáním naměřených hodnot s testovacím vzorkem z ryzího zlata poznal, že koruna byla ve vodě nadlehčována více, než bylo „vhodné", a z čistého zlata tudíž vyrobena nebyla. Ačkoliv se Archimedovy nápady staly základem pro sestrojení některých pozoruhodných hydraulických přístrojů ještě v období antiky, v prvním tisíciletí po Kristu v evropském civilizačním prostoru rozvíjeny nebyly.

Vzkříšení Aristotelových a Archimedových idejí souvisí se směrem myšlení, který se postupně v Evropě začal šířit v 15.–16. století a podle něhož se procesy v přírodě řídí zákony, jež jsou lidským rozumem poznatelné a přírodní děje jsou tudíž do jisté míry i předvídatelné. K porozumění podstaty odporu tekutiny vůči pohybujícímu se tělesu i důvodů, proč například ptáci mohou létat, přispěl L. da Vinci (1452–1519). G. Galilei

Prof. RNDr. Jiří Neustupa, CSc. (1949), Matematický ústav AV ČR, Žitná 25, 115 67 Praha 1, e-mail: `neustupa@math.cas.cz`

(1564–1642) a B. Pascal (1623–1662) s úspěchem řešili některé problémy hydrostatiky. Rozvoj matematiky v 17. a 18. století, zejména objev diferenciálního a integrálního počtu, poskytl jazyk, kterým bylo možné nové fyzikální objevy formulovat, a též aparát pro následnou analýzu nových poznatků. Tento trend se nezastavil ani před mechanikou tekutin. C. Huyghens (1629–1695) formuloval zákon o závislosti odporu tělesa na rychlosti proudu. I. Newton (1642–1727) položil základy užití diferenciálního a integrálního počtu v mechanice tekutin. Mezi významné badatele 18. století se řadí D. Bernoulli (1700–1782), který přispěl k matematické teorii proudění ideální tekutiny a k poznání souvislosti tlaku a rychlosti (viz známá Bernoulliho rovnice). J. d'Alembert (1717–1783) vyslovil názor, podle něhož ideální (= nevazká) tekutina neklade pohybujícímu se tělesu odpor. Matematické zdůvodnění platnosti tohoto paradoxu při nevířivém obtékání tělesa ideální tekutinou poskytl v r. 1745 L. Euler (1707–1783). Byl mj. i tímto problémem motivován při odvození rovnic proudění ideální tekutiny.

2. Původ Navierových-Stokesových rovnic v 19. století

Kdybychom v historickém výčtu objevů, teorií, rovnic a nových postupů stejným způsobem pokračovali dále, tak bychom na 19. století potřebovali přinejmenším celé číslo tohoto časopisu. K popisu toho, k čemu v mechanice tekutin došlo ve 20. století, by nám nestačila ani objemná knihovna. V tomto článku se proto dotkneme jen malého úseku velkého příběhu o matematickém modelování v mechanice tekutin. Na začátku se seznámíme s některými úvahami z první poloviny 19. století. Omezíme se na zkoumání pohybu nestlačitelné tekutiny s konstantní hustotou ϱ. Označme $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$ rychlost proudící tekutiny a $p(\boldsymbol{x}, t)$ tlak v bodě $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, x_3]$ v čase t. Rychlost je vektor, který má tři složky: $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Předpokládejme, že funkce $\boldsymbol{v}$, p (a rovněž další funkce, které teprve uvedeme) jsou „hladké". To znamená, že jsou spojité a mají spojitých tolik derivací, kolik potřebujeme. (Přijměme tento předpoklad s pochopením, neboť zatím nejsme ve 21., ale pouze v 19. století.)

Podmínka, že jakákoliv část tekutiny při pohybu zachovává svůj objem, vede k tzv. **rovnici kontinuity**

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \qquad \left(\text{ekvivalentní zápis: } \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0\right). \tag{1}$$

Díky předpokladu o konstantní hustotě je podmínka „zachování objemu" totožná s podmínkou „zachování hmotnosti". Rovnicí (1) je proto vyjádřen i zákon zachování hmoty: *v žádné části tekutiny při pohybu hmota nevzniká, ani se neztrácí.*

Další rovnici obdržíme aplikací zákona zachování hybnosti: *změna hybnosti tekutiny v jakékoliv vybrané kontrolní oblasti V v libovolném časovém intervalu $\langle t_1, t_2\rangle$ je rovna součtu* 1) *impulsu sil, které na tekutinu v oblasti V v intervalu $\langle t_1, t_2\rangle$ působí, a* 2) *přítoku hybnosti do V v intervalu $\langle t_1, t_2\rangle$*. Hybnost tekutiny v nekonečně malé části $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ oblasti V v čase t je rovna $\varrho \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$. Hybnost tekutiny v celé oblasti V v čase t lze proto vyjádřit integrálem přes V: $\boldsymbol{h}(V, t) = \int_V \varrho \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$. Rozdíl hybností v časech t_1 a t_2 je tudíž

$$\boldsymbol{h}(V, t_2) - \boldsymbol{h}(V, t_1) = \int_V \big[\varrho \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t_2) - \varrho \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t_1)\big] \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{t_1}^{t_2} \int_V \varrho \, \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}(\boldsymbol{x}, t) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \, \mathrm{d}t. \qquad (2)$$

Síla působící na tekutinu v oblasti V je součtem dvou složek $\boldsymbol{F}_O(V,t)$ a $\boldsymbol{F}_P(V,t)$ odlišné povahy: $\boldsymbol{F}_O(V,t)$ je síla, která na tekutinu ve V působí prostřednictvím celého objemu V, proto se jí říká „objemová síla“. Také se používá název „vnější síla“, protože je způsobena vnějšími vlivy. Příkladem takové síly je gravitace. Označíme-li $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)$ tzv. „specifickou sílu“ v bodě $\boldsymbol{x}$ a v čase t, neboli vnější sílu vztaženou k jednotce hmoty, můžeme impuls síly $\boldsymbol{F}_O$ v časovém intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$ vyjádřit:

$$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}_O(V, t) \, \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \int_V \varrho \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \, \mathrm{d}t. \qquad (3)$$

Druhá složka $\boldsymbol{F}_P(V,t)$ je takzvaná „plošná síla“. Ta působí na tekutinu uvnitř V pouze prostřednictvím povrchu S oblasti V a je způsobena tlakem a smykovými napětími v tekutině. A. Cauchy (1789–1857) ukázal, že plošná síla působící na „nekonečně malou“ část $\mathrm{d}S$ plochy S, vztažená k jednotce obsahu plochy, závisí lineárně na vnějším normálovém vektoru $\boldsymbol{n} \equiv (n_1, n_2, n_2)$ k ploše S v místě $\mathrm{d}S$. Lze ji tudíž zapsat jako součin $\mathbb{T} \cdot \boldsymbol{n}$, kde $\mathbb{T}$ je tenzor druhého řádu. Tento tenzor se nazývá „tenzor napětí“. (Pojem „tenzoru“ ve skutečnosti vděčí za svůj název právě tenzoru napětí, protože anglicky se napětí mimo jiné řekne „tension“.) Tenzor napětí lze vyjádřit pomocí tlaku a prostorových derivací rychlosti, přijmeme-li další předpoklady, a to, že tekutina je izotropní a newtonovská. Slovo „izotropní“ znamená, že reakce tekutiny na působící síly je ve všech směrech stejná. Termínem „newtonovská“ se označují tekutiny, v nichž tenzor napětí závisí lineárně na tenzoru rychlosti deformace $\mathbb{D}$, pro jehož složky platí $d_{ij} = \frac{1}{2}(\partial v_i / \partial x_j + \partial v_j / \partial x_i)$. To přibližně řečeno znamená, že smyková napětí jsou úměrná rychlostnímu spádu. Tento postulát formuloval ve zjednodušené podobě I. Newton. Z obou předpokladů lze (nikoliv zcela jednoduše) odvodit, že $\mathbb{T} = -p\,\mathbb{I} + 2\mu\,\mathbb{D}$, kde $\mathbb{I}$ je jednotkový tenzor a μ je tzv. „dynamický koeficient vazkosti“. Užitím rovnice (1) a Gaussovy-Ostrogradského formule pro převod povrchového integrálu na objemový integrál lze pak obdržet následující vyjádření impulsu plošné síly $\boldsymbol{F}_P(V,t)$:

$$\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}_P(V, t) \, \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \int_S \mathbb{T} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S \, \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \int_V \big(-\nabla p + \mu \Delta \boldsymbol{v}\big) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \, \mathrm{d}t. \qquad (4)$$

Symbolem ∇p označujeme gradient p (vektor, jehož složky jsou derivace p podle proměnných x_1, x_2, x_3) a Δ je Laplaceův operátor (součet druhých parciálních derivací podle x_1, x_2 a x_3). Přítok hybnosti do V za časový úsek $\langle t_1, t_2 \rangle$ je roven

$$-\int_{t_1}^{t_2} \int_S (\varrho \boldsymbol{v}) \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S \, \mathrm{d}t = -\int_{t_1}^{t_2} \int_V \sum_{j=1}^{3} \varrho v_j \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_j} \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \, \mathrm{d}t. \qquad (5)$$

(Před integrály je znaménko „−“, protože vyjadřujeme přítok hybnosti dovnitř V, zatímco $\boldsymbol{n}$ je vnější normálový vektor.) Při úpravě integrálu vlevo jsme opět použili Gaussovu-Ostrogradského formuli a rovnici kontinuity (1). Porovnáme-li nyní pravou stranu (2) se součtem pravých stran (3), (4) a (5), obdržíme integrální rovnici

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_V \left(\varrho \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} \varrho v_j \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_j} - \mu \Delta \boldsymbol{v} \right) \mathrm{d}\boldsymbol{x}\, \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \int_V \left(-\nabla p + \varrho \boldsymbol{f} \right) \mathrm{d}\boldsymbol{x}\, \mathrm{d}t. \tag{6}$$

Tato rovnice má platit pro každý časový interval $\langle t_1, t_2 \rangle$ a pro jakkoliv zvolenou kontrolní oblast V v pohybující se tekutině. Odtud a z předpokladu o dostatečné hladkosti všech uvažovaných funkcí lze usoudit, že parciální diferenciální rovnice

$$\varrho \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} \varrho v_j \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_j} - \mu \Delta \boldsymbol{v} = -\nabla p + \varrho \boldsymbol{f} \tag{7}$$

platí ve všech bodech $[\boldsymbol{x}, t]$, takových, že $\boldsymbol{x}$ se v čase t nachází v pohybující se tekutině. K rovnici (7) dospěli nezávisle na sobě v roce 1822 H. Navier (1785–1836, vycházeje z molekulárního modelu) a v roce 1845 G. G. Stokes (1819–1903, na základě konceptu kontinua), proto je nazývána **Navierovou-Stokesovou rovnicí.** Je to vektorová rovnice. Když ji rozepíšeme do složek, obdržíme soustavu tří rovnic pro jednotlivé složky. Z tohoto důvodu se často používá plurál a místo o jedné „Navierově-Stokesově rovnici“ se hovoří o třech „Navierových-Stokesových rovnicích“. Historie vzniku Navierovy-Stokesovy rovnice i jejích znovuobjevení, s citacemi souvisejících soudobých prací, je podrobně popsána v článku O. Darrigola [1].

Rovnice (7) spolu s rovnicí kontinuity (1) tvoří systém čtyř skalárních rovnic pro čtyři neznámé v_1, v_2, v_3, p. Na první pohled je tedy vše v pořádku. Trochu nepříjemné je, že systém (1), (7) je nelineární a řešení nelze nijak snadno nalézt. Ještě v 19. století bylo však objeveno několik jednoduchých příkladů proudových polí, v nichž nelineární člen v rovnici (7) je nulový a řešení se dají explicitně vyjádřit. V různých složitějších případech byly některé členy v rovnicích (1), (7) na základě úvah o jejich velikosti zanedbány. Zjednodušené rovnice opět bylo možné explicitně nebo přibližně řešit, nebo se tyto rovnice staly základem dalších modelů a teorií. (Zde máme na mysli například přibližné řešení odpovídající obtékání koule a následné odvození Stokesova vzorce pro odpor koule nebo třeba rovnice a teorii tzv. mezní vrstvy.) V podstatě se však dlouho věřilo, že i když je neumíme nalézt, tak řešení systému (1), (7) v případě takřka jakéhokoliv proudového pole existují v libovolně dlouhém časovém intervalu. Jako přesvědčivý argument se užívalo tvrzení „tekutina proudí, takže rovnice, které proudění popisují, přece musejí mít řešení“. (Ostatně autor tento argument slyšel ještě na konci 20. století.) Zastánci tohoto názoru poněkud zapomínali na to, že Navierovy-Stokesovy rovnice jsou sice pěkným matematickým modelem reality (konkrétně pohybu nestlačitelné vazké tekutiny), že je však s realitou nelze ztotožňovat. Jinými slovy: ne vše, co ukazuje matematický model, se musí odehrávat v realitě a naopak. Důvody jsou zřejmé: Navierovy-Stokesovy rovnice byly odvozeny sice korektně, ale za předpokladů, které se s realitou mohou více či méně rozcházet. Připomeňme užité předpoklady:

tekutina je spojité prostředí s prostorově i časově konstantní hustotou, tekutina je izotropní a newtonovská, rychlost, tlak i specifická objemová síla jsou hladké funkce. Zejména poslední předpoklad lze jen stěží obhajovat: předvídá se jím totiž budoucí hladkost řešení ještě dříve, než máme jak rovnice, tak jejich řešení.

3. Mají Navierovy-Stokesovy rovnice regulární řešení?

Pokračující rozvoj matematické analýzy (Lebesgueův integrál, teorie obyčejných a parciálních diferenciálních rovnic, nové pohledy na pojmy derivace a řešení, funkcionální analýza atd.) v 19. a na začátku 20. století byl impulsem k podrobnějšímu studiu vlastností Navierových-Stokesových rovnic a také k tomuto studiu nabídl řadu nových možností. Prvními, kdo se seriózně pokoušeli zodpovědět otázku, zda Navierovy-Stokesovy rovnice skutečně mají řešení, byli švédský matematik a fyzik C. W. Oseen (1879–1944) a francouzský matematik J. Leray (1906–1998). J. Leray se pro jednoduchost, aby předešel problémům s okrajovými podmínkami, zabýval prouděním, které hypoteticky vyplňuje celý třírozměrný prostor $\mathbb{R}^3$. Jelikož rovnice (1), (7) jsou evolučního typu, tak je doplnil počáteční podmínkou

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},0) = \boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{x}) \qquad \text{pro} \ \ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \tag{8}$$

a o funkci $\boldsymbol{v}_0$ (počátečním rozložení rychlosti) předpokládal, že vyhovuje rovnici kontinuity (1) a odpovídá jí konečná kinetická energie, tj.

$$\frac{1}{2}\,\varrho \int_{\mathbb{R}^3} |\boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{x})|^2 \ \mathrm{d}\boldsymbol{x} < +\infty. \tag{9}$$

První přirozená otázka byla, zda úloha daná rovnicemi (1), (7) a počáteční podmínkou (8) má (při hladké počáteční rychlosti $\boldsymbol{v}_0$ a hladké a jistým způsobem i integrovatelné specifické vnější síle $\boldsymbol{f}$) na libovolně dlouhém časovém intervalu $(0,T)$ řešení, jehož existence byla předpokládána již na začátku odvozování rovnic, tj. řešení hladké, cizím slovem „regulární“. Nutno sdělit, že odpověď na tuto otázku nenašli Oseen ani Leray a dodnes se to nepodařilo ani nikomu jinému. Leray byl přesvědčen o tom, že odpověď nemusí být vždy kladná, a dokonce navrhl způsob, jak zkonstruovat hladké řešení $\boldsymbol{v}$, p na časovém intervalu $(0,t_0)$, které by pro t blížící se k t_0 zleva zkolabovalo. Kolaps by vypadal tak, že pro $t \to t_0-$ by rychlost tekutiny ve stále se zmenšujícím okolí vybraného bodu $\boldsymbol{x}_0$ neomezeně narůstala, přičemž celková kinetická energie by zůstala omezená (v konkrétním Lerayově příkladu by se dokonce blížila k nule). Později se takovému chování řešení začalo říkat „blow-up“ (česky „výbuch“) a bod $[\boldsymbol{x}_0,t_0]$ v časoprostoru $\mathbb{R}^3 \times (0,+\infty)$ byl nazván „singulárním bodem“ řešení $\boldsymbol{v}$, p. Leray svůj návrh na sestrojení „vybuchujícího“ řešení publikoval v r. 1934. Trvalo to 59 let, než J. Nečas, M. Růžička a V. Šverák (1993) ukázali, že „tudy cesta nevede“, neboli že způsobem navrženým Lerayem se „blow-up“ zkonstruovat nedá. Nutno však dodat, že negativní výsledek Nečase, Růžičky a Šveráka neříká nic o tom, zda „blow-up“ se dá vždy (tj. u každého řešení úlohy (1), (7), (8)) vyloučit nebo zda lze řešení vykazující „blow-up“ zkonstruovat (nebo alespoň dokázat jeho existenci) nějak jinak.

„Blow-up" řešení $\boldsymbol{v}$ v čase t_0 by hypoteticky mohl nastat i v nekonečnu, pokud by existovaly posloupnosti $\{t_n\}$ (neklesající posloupnost časových okamžiků splňující $t_n \to t_0$) a $\{\boldsymbol{x}_n\}$ (posloupnost bodů v $\mathbb{R}^3$ splňující $|\boldsymbol{x}_n| \to +\infty$) takové, že $|\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}_n, t_n)| \to +\infty$.

Popsaná úloha je přesně tím problémem, který je považován za ústřední otázku teorie Navierových-Stokesových rovnic. Zformulujme ji vzhledem k její závažnosti ještě jednou: *Je dán časový interval* $(0, T)$ *libovolné délky* T. *Je dána omezená hladká funkce* $\boldsymbol{v}_0$ *v* $\mathbb{R}^3$, *vyhovující rovnici kontinuity* (1) *a podmínce* (9). *Je dána omezená hladká funkce* $\boldsymbol{f}$ *splňující*

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)|^2 \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \, \mathrm{d}t < +\infty. \tag{10}$$

Má úloha (1), (7), (8) *(při jakékoliv kombinaci daných funkcí* $\boldsymbol{v}_0$ *a* $\boldsymbol{f}$ *s požadovanými vlastnostmi) na časovém intervalu* $(0, T)$ *omezené hladké řešení (neboli regulární řešení, nevykazující „blow-up"), nebo při některé kombinaci funkcí* $\boldsymbol{v}_0$, $\boldsymbol{f}$ *existuje řešení, u něhož „blow-up" v některém časovém okamžiku* $t_0 < T$ *nastane?* (Jak poznáme v další kapitole, obojí není vzhledem k jednoznačnosti regulárního řešení možné.)

K důsledkům pozitivní nebo negativní odpovědi na formulovanou otázku se vrátíme v diskusi na závěr článku.

4. Výňatek z kvalitativní teorie Navierových-Stokesových rovnic (20. století)

Předcházející kapitola mohla čtenáře naladit pesimisticky, protože byla věnována jen tomu, co se neví, a nepřinesla nic kladného. Přitom ve 20. století bylo prací jen z oblasti kvalitativních vlastností Navierových-Stokesových rovnic publikováno mnoho set (spíše několik tisíc), a to zcela pomíjíme bouřlivě se rozvíjející oblast numerických metod řešení, jejich teorie i aplikací. V této kapitole se proto zmíníme jen o některých výsledcích, které s problémem existence hladkých či nehladkých řešení Navierových-Stokesových rovnic úzce souvisí.

Začít nelze nikým jiným než opět J. Lerayem a jeho pracemi ze 30. let minulého století. Leray, když nenašel způsob, jak dokázat existenci regulárního řešení úlohy (1), (7), (8) v zadaném časovém intervalu $(0, T)$, udělal něco velmi přirozeného, co napadne každého člověka, když se někde ztratí: vrátil se zpět do bodu, kde ještě věřil, že byl na správné cestě. Tím bodem byla integrální rovnice (6), která, jak jsme viděli v kapitole 2, Navierově-Stokesově rovnici (7) při odvozování předcházela. Leray se však z víceméně technických důvodů nevrátil přesně k integrální rovnici (6). Nicméně si uvědomil, že zákon zachování hybnosti v integrálním tvaru má k přírodě blíže než parciální diferenciální rovnice (7). Ve svém článku z r. 1934 cituje Oseena a připomíná, že Oseen již dříve ze stejných důvodů dával přednost integrálnímu vyjádření zákona zachování hybnosti.

Označme $\mathcal{D}$ lineární prostor nekonečně hladkých vektorových funkcí $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t)$ v $\mathbb{R}^3 \times \langle 0,T\rangle$, vyhovujících rovnici kontinuity (1), majících v každém čase $t \in \langle 0,T\rangle$ kompaktní nosič v $\mathbb{R}^3$ a rovnajících se nulovému vektoru pro $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ a $t = T$.

Vynásobíme-li skalárně Navierovu-Stokesovu rovnici funkcí $\boldsymbol{\varphi} \equiv (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ z $\mathcal{D}$, integrujeme-li obě strany na $\mathbb{R}^3$ a na časovém intervalu $(0,T)$, aplikujeme-li vhodným způsobem integraci per partes a užijeme-li též počáteční podmínku (8), obdržíme

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \left(-\varrho \boldsymbol{v} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \varrho v_j \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_j} \cdot \boldsymbol{\varphi} + \mu \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x_j} - \varrho \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{\varphi} \right) \mathrm{d}\boldsymbol{x}\, \mathrm{d}t = \\ = - \int_{\mathbb{R}^3} \varrho \boldsymbol{v}_0 \cdot \boldsymbol{\varphi}(\,\cdot\,, 0)\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}. \qquad (11)$$

Je pozoruhodné, avšak též snadno pochopitelné, že tlak se uvedeným postupem vytratí: integrál $\int_{\mathbb{R}^3} \nabla p \cdot \boldsymbol{\varphi}\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}$ je roven $-\int_{\mathbb{R}^3} p \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}$ a toto je rovno nule, protože $\boldsymbol{\varphi}$ vyhovuje rovnici kontinuity. Integrální rovnice (11) je tou rovnicí, kterou J. Leray nahradil diferenciální Navierovu-Stokesovu rovnici (7) včetně počáteční podmínky (8). Možnost libovolně vybrat časový interval $\langle t_1, t_2\rangle$ a oblast V v integrální rovnici (6) je nyní nahrazena možností libovolně vybrat testovací funkci $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{D}$.

Vraťme se znovu k diferenciální Navierově-Stokesově rovnici (7). Vynásobíme-li ji skalárně funkcí $\boldsymbol{v}$ a integrujeme přes $\mathbb{R}^3 \times (0,t)$, pak užitím integrace per partes a rovnice kontinuity (1) snadno ukážeme, že integrál nelineárního členu je nula:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^3 \varrho v_j \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_j} \cdot \boldsymbol{v}\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \varrho \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{2} (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v})\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\varrho \int_{\mathbb{R}^3} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) \frac{|\boldsymbol{v}|^2}{2}\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0.$$

Po několika standardních úpravách pak obdržíme tzv. „energetickou nerovnost“

$$\frac{\varrho}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)|^2\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} + \mu \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^3 \left| \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_j}(\boldsymbol{x},s) \right|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{x}\, \mathrm{d}s \leqq \\ \leqq \frac{\varrho}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{x})|^2\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \varrho \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},s) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},s)\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}\, \mathrm{d}s, \qquad (12)$$

která říká, že pokud úloha (1), (7), (8) má řešení, s nímž lze provádět všechny operace vedoucí k (12), tak kinetická energie v jakémkoliv čase t plus množství kinetické energie, které se v časovém úseku $\langle 0,t\rangle$ vlivem vazkosti přeměnilo v teplo, je menší nebo rovno součtu počáteční kinetické energie a práce vykonané objemovou silou v $\mathbb{R}^3$ v časovém intervalu $\langle 0,t\rangle$. (Hladká řešení dokonce splňují energetickou rovnost. Řešení, která se však skutečně podařilo zkonstruovat, splňují pouze nerovnost — viz následující odstavce.)

Rovnice (11) a nerovnost (12) jsou motivací k definici pojmu tzv. „slabého řešení“: **Slabým řešením** úlohy (1), (7), (8) na časovém intervalu $(0,T)$ nazýváme funkci $\boldsymbol{v}$ takovou, že

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0<t<T} \int_{\mathbb{R}^3} |\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)|^2\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} < +\infty, \qquad \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{j=1}^3 \left| \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_j}(\boldsymbol{x},t) \right|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{x}\, \mathrm{d}t < +\infty, \qquad (13)$$

$\boldsymbol{v}$ splňuje energetickou nerovnost (12), $\boldsymbol{v}$ vyhovuje rovnici kontinuity (1) a konečně $\boldsymbol{v}$ splňuje integrální rovnici (11) pro všechny testovací funkce $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{D}$. (Symbolem ess sup označujeme tzv. esenciální supremum.)

Pokud funkce $\boldsymbol{v}$ nemá klasické derivace potřebné v rovnicích a nerovnostech (1) a (11)–(13), tak je chápeme jako tzv. zobecněné derivace. Platnost energetické nerovnosti se často do definice slabého řešení nezahrnuje, z hlediska problémů diskutovaných v tomto článku to však není podstatné. Vidíme, že požadavky kladené na slabé řešení jsou menší než na klasické řešení. U slabého řešení totiž vystačíme pouze se zobecněnými prvními parciálními derivacemi podle prostorových proměnných x_1, x_2, x_3 a derivaci podle času nepotřebujeme vůbec. V podstatě jsme ukázali, že každé klasické řešení úlohy je též slabým řešením. Na druhé straně každé slabé řešení nemusí být klasickým řešením. Lze však ukázat, že je-li $\boldsymbol{v}$ slabé řešení, které má hladkost požadovanou na klasickém řešení, pak existuje skalární funkce p (tlak) taková, že dvojice $\boldsymbol{v}$, p je klasickým řešením.

J. Leray používal název „turbulentní řešení". Termín „slabé řešení" se vžil později. V práci z r. 1934 dokázal Leray existenci slabého řešení. Předložený důkaz je založen na sestrojení posloupnosti Galerkinových aproximací, které k řesení konvergují.

Koncept slabého řešení neodporuje hypotéze o „výbuchu", popsané v kapitole 3 tohoto článku. (Používejme však raději vžitý anglický termín „blow-up".) Slabé řešení v $\mathbb{R}^3 \times (0, T)$ může teoreticky mít uvnitř svého definičního oboru singulární body. V souladu s výkladem ve 3. kapitole však opakujeme, že skutečný výskyt singulárních bodů (při hladkých vstupních datech úlohy, tj. při hladkých funkcích $\boldsymbol{f}$ a $\boldsymbol{v}_0$) je otevřeným problémem.

Později byly Lerayovy výsledky dokázány i pro proudění v jiných (například omezených) oblastech $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. (Viz E. Hopf 1951 a další.) Rovněž další výsledky, o nichž se zmíníme, jsou platné nejen pro proudění v celém $\mathbb{R}^3$, ale i pro proudění v obecnějších oblastech Ω. Pro jednoduchost se však až do konce článku omezíme na případ $\Omega = \mathbb{R}^3$.

Máme-li slabé řešení, pak důležitou otázkou je, je-li toto řešení jediné nebo zda úloha může mít více různých slabých řešení. Zde se dostáváme k dalšímu otevřenému problému, neboť musíme přiznat, že otázku jednoznačnosti slabého řešení Leray nezodpověděl a odpověď dodnes nenalezl ani nikdo jiný. Jde přitom o problém zcela zásadní nejen v teorii, ale i v aplikacích: *Je pěkné když numerickými metodami spočítáme nějaké přibližné řešení úlohy* (1), (7), (8) *(nebo obdobné úlohy v omezené oblasti). Co je nám to však platné, když nevíme, zda úloha nemá ještě jiná řešení, a tekutina se v reálném proudovém poli, o němž pomocí matematického modelu chceme získat informace, chová v souladu s jiným řešením než s tím, které jsme nalezli?*

Částečnou odpověď na otázku jednoznačnosti slabého řešení přinesly výsledky G. Prodiho (1959), J. L. Lionse a G. Prodiho (1959), H. Kozona a H. Sohra (1996) a dalších, kteří specifikovali třídu funkcí, ve které se nemohou vyskytovat dvě různá slabá řešení. Příslušné věty v podstatě říkají toto: *Je-li* $\boldsymbol{v}$ *slabé řešení úlohy* (1), (7), (8), *které patří do některého z anizotropních Lebesgueových prostorů*

$L^r\big(0,T;\ L^s(\mathbb{R}^3)^3\big)$, *kde* $2 \leqq r \leqq +\infty$, $3 < s \leqq +\infty$ *a* $2/r + 3/s \leqq 1$,[1]) *pak* $\boldsymbol{v}$ *je jediným slabým řešením.* Označme dále pro jednoduchost popsanou třídu funkcí, do níž má patřit $\boldsymbol{v}$, symbolem J (třída, ve které je zaručena jednoznačnost). Problémem je, že třída J nepokrývá celou třídu existence, v níž se Lerayovo-Hopfovo slabé řešení může nacházet. Takže pokud Lerayovo-Hopfovo slabé řešení nepadne do J, o jeho jednoznačnosti zatím nevíme nic.

Otázka jednoznačnosti je úzce spjata s otázkou regularity: Díky pracím J. Serrina (1962), H. Sohra (1983), W. von Wahla (1986), Y. Gigy (1986), G. Seregina a V. Šveráka (2003) a řady dalších je známo, že pokud se slabé řešení $\boldsymbol{v}$ nachází ve třídě J, je regulární. Protože lze nahlédnout i opak, dostáváme tvrzení: *J je třídou regularity.*

Vidíme, že i otázka, zda slabé řešení $\boldsymbol{v}$ úlohy (1), (7), (8) je dané jednoznačně, nás vede zpět k otázce, zda $\boldsymbol{v}$ je regulární. Předpokládejme až do konce článku, že daná počáteční rychlost $\boldsymbol{v}_0$ a specifická objemová síla $\boldsymbol{f}$ jsou kromě platnosti podmínek (9) a (10) hladkými funkcemi. Na tomto místě je vhodné se zmínit o větách, které říkají, že pro některé konfigurace je známo, že řešení $\boldsymbol{v}$ opravdu regulární je, a to tzv. „globálně v čase“, neboli na celém časovém intervalu, na němž řešení existuje. Toto platí například o tzv. dvourozměrném proudění nebo o osově-symetrickém proudění [2]) nebo v případě, kdy daná data $\boldsymbol{v}_0$ a $\boldsymbol{f}$ jsou v jistém smyslu „dostatečně malá“. Některé práce se věnují popisu množiny dat $\boldsymbol{v}_0$ a $\boldsymbol{f}$, která vedou ke globálnímu regulárnímu řešení, a tuto množinu se postupně snaží rozšiřovat.

Věty o „lokální existenci silného řešení“ (J. Leray 1934 a K. K. Kiselev, O. A. Ladyženská 1957) říkají, že v důsledku hladkosti $\boldsymbol{v}_0$ a $\boldsymbol{f}$ je existující slabé řešení $\boldsymbol{v}$ jistě regulární na nějakém „malém“ časovém intervalu $(0, T^*)$ a případné singularity mohou vzniknout až v časech $t > T^*$. V řadě článků se ukazuje, že pokud „blow-up“ skutečně nastane, pak k tomu dojde pouze v relativně „malé“ množině bodů: tzv. věta o struktuře slabého řešení (J. Leray 1934, C. Foias a R. Temam 1979, J. Heywood 1980) říká, že pokud řešení $\boldsymbol{v}$ splňuje jistou zesílenou variantu energetické nerovnosti (což není omezující předpoklad, protože slabé řešení lze tak zkonstruovat), pak singularity mohou vzniknout pouze v množině Γ časových okamžiků, která je uzavřená v $(0,T)$ a jejíž $\frac{1}{2}$-rozměrná Hausdorffova míra je nula. L. Caffarelli, R. Kohn a L. Nirenberg (1982) ukázali, že mezi hypoteticky více slabými řešeními úlohy (1), (7), (8) se nachází alespoň jedno (autoři je nazvali „vhodným slabým řešením“), které kromě jiného má tu vlastnost, že množina jeho singulárních bodů v časoprostoru (tj. v $\mathbb{R}^3 \times (0,T)$) má 1-rozměrnou Hausdorffovu míru nula. To znamená, že singulární body, pokud se vůbec objeví, nemohou vzniknout na žádné křivce, protože ta má 1-rozměrnou Hausdorffovu míru kladnou.

V řadě článků se předpokládá, že slabé řešení vyhovuje buď v celém svém definičním oboru, nebo na jeho podmnožině některým doplňujícím požadavkům. Dokazuje se, že pak na takové podmnožině nemohou singulární body vzniknout. Tímto způsobem se

---

[1]) *Případně do $L^\infty(0,T; L^3(\mathbb{R}^3)^3)$, zde však též potřebujeme, aby funkce $\boldsymbol{v}$ byla zprava L^3-polospojitou funkcí času na $\langle 0,T)$.*

[2]) V případě, že osa symetrie je mimo proudové pole; jinak je třeba předpokládat, že počáteční úhlová rychlost v odpovídajících cylindrických souřadnicích i úhlová složka působící objemové síly jsou nulové.

opět zužuje prostor pro možný „blow-up“ a vymezují se jeho případné vlastnosti. Jednoduchým důsledkem článku J. Serrina (1962) je závěr, že v množině, kde je rychlost omezená jakoukoliv kladnou konstantou, nemůže nastat „blow-up“. P. Constantin a C. Fefferman (1993) ukázali, že „blow-up“ nemůže vzniknout ani tam, kde vorticita (= rotace rychlosti) nemění příliš rychle svůj směr. J. Neustupa, A. Novotný a P. Penel (2001) dokázali, že pokud „blow-up“ v nějakém bodě nastane, pak musí v takovém bodě současně nastat ve všech složkách rychlosti. Platnost stejného tvrzení o vorticitě je otevřeným problémem. H. Beirao da Veiga (1995) a H. J. Choe a D. Chae (1999) však postupně ukázali, že „blow-up“ musí v singulárním bodě nastat minimálně ve dvou složkách vorticity. Řadu podmínek na gradient rychlosti nebo jenom některé jeho složky, vylučujících „blow-up“, formulovali P. Penel a M. Pokorný (2001), Ch. He (2002) a M. Pokorný (2002). J. Neustupa a P. Penel (2003) ukázali, že deformace infinitezimálně malých objemů tekutiny, při kterých je tekutina stlačována ve dvou a roztahována v jednom rozměru, podporují regularitu, zatímco opačné deformace přispívají k případné singularitě.

Dvě práce (G. Seregin a V. Šverák 2002, J. Nečas a J. Neustupa 2002) ukazují, že v okolí případného singulárního bodu tlak nabývá neomezeně velkých záporných hodnot. Z citované práce J. Serrina a z tohoto výsledku je nejlépe patrný rozdíl mezi realitou (proudící tekutina) a matematickým modelem (úloha (1), (7), (8)). V reálné tekutině nesporně existují mechanismy zabraňující jak neomezeně velkým rychlostem, tak neomezeně velkému zápornému tlaku. To však neříká nic o tom, zda podobné mechanismy jsou také obsaženy v matematickém modelu. Například: pokud v reálné tekutině začne v nějakém místě tlak příliš klesat, pravděpodobně vznikne bublina, vyplněná párou nebo plynem, který je v tekutině rozpuštěn. Vznik bublin bývá při některých režimech proudění pozorován, takovému jevu se říká „kavitace“. Ve slabém řešení Navierových-Stokesových rovnic však bublina nevznikne, to by totiž odporovalo předpokladu o tom, že tekutina je spojité prostředí. Takže slabé řešení na tlak klesající k minus nekonečnu může reagovat tím, že vznikne „blow-up“ a slabé řešení případně i bifurkuje do dvou nebo více větví. Tato představa je pochopitelně pouhou hypotézou, pro autora článku je však právě kavitace silným argumentem podporujícím možnost výskytu singularit.

5. Závěr

Snaze dokázat regularitu řešení $\boldsymbol{v}$ nebo naopak pokusům o konstrukci slabého řešení vykazujícího „blow-up“ se ve světě věnuje mnoho matematiků. Navierovy-Stokesovy rovnice mají řadu vlastností typických pro nelineární parciální diferenciální rovnice. Proto přitahují pozornost badatelů zejména z této oblasti.

Pokud se v budoucnu někomu podaří dokázat, že řešení $\boldsymbol{v}$ je regulární na celém časovém intervalu, na němž existuje, potvrdí se tím, že Navierovy-Stokesovy rovnice jsou velmi dobrým matematickým modelem proudění vazké nestlačitelné tekutiny. Jestliže naopak někdo uspěje s konstrukcí (nebo důkazem existence) řešení vykazujícího „blow-up“, bude to znamenat, že Navierovy-Stokesovy rovnice se od reality odchylují, a bude to velkým impulsem k diskusi o tom, co tato odchylka může znamenat. Pokud by se dále ukázalo, že řešení vykazující „blow-up" není jediným řešením úlohy (1), (7), (8), pak by se skutečně stalo velmi aktuálním zabývat se otázkou, jakými jinými rovnicemi by Navierovy-Stokesovy rovnice v té které situaci měly být nahrazeny.

Na závěr poznamenejme, že silná škola matematické mechaniky tekutin se nachází v Praze. Její výzkum pokrývá široké pole od fyzikálních vlastností tekutin s komplikovanými strukturami přes kvalitativní teorii příslušných matematických modelů až k teorii, vývoji i aplikacím numerických metod. Z mnoha vynikajících badatelů, kteří přispěli k její tradici a ve svém oboru vychovali mnoho žáků, se zmiňme alespoň o dvou: Jan Polášek (1926–1990, vývoj matematických modelů, výpočetní metody dovedené až ke konkrétním aplikacím při konstrukci turbin a kompresorů) a Jindřich Nečas (1929–2002, funkcionální analýza a její aplikace, moderní teorie parciálních diferenciálních rovnic).

Aby seznam literatury nebyl příliš dlouhý, omezujeme se (s výjimkou historické práce O. Darrigola) na citace knih, v nichž mohou zájemci nalézt podrobný výklad teorie Navierových-Stokesových rovnic i rozsáhlý soupis další související literatury.

Poděkování. Za pečlivé přečtení článku a za řadu připomínek autor děkuje svým kolegům RNDr. Aleně Šolcové, Ph. D. (zejména v historické části), a RNDr. Milanu Pokornému, Ph. D. (v části týkající se teorie Navierových-Stokesových rovnic).

Literatura

[1] Darrigol, O.: *Between hydrodynamics and elasticity theory: the first five births of the Navier-Stokes equation.* Arch. Hist. Exact Sci. *56* (2002), 95–150.

[2] Feistauer, M.: *Mathematical Methods in Fluid Dynamics.* Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics 67, Longman Scientific & Technical, Harlow 1993.

[3] Galdi, G. P., Heywood, J., Rannacher, R. (editors): *Fundamental Directions in Mathematical Fluid Mechanics.* Series „Advances in Mathematical Fluid Mechanics", Vol. 1, Birkhauser-Verlag, Basel 2000.

[4] Ladyženskaja, O. A.: *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow.* Gordon and Breach, New York 1969.

[5] Lions, P. L.: *Mathematical Topics in Fluid Mechanics, Vol. 1: Incompressible Models.* Clarendon Press, Oxford 1996.

[6] Neustupa, J., Penel, P. (editors): *Mathematical Fluid Mechanics: Recent Results and Open Problems.* Series „Advances in Mathematical Fluid Mechanics", Vol. 2, Birkhauser-Verlag, Basel 2001.

[7] Sohr, H.: *The Navier-Stokes Equations: An Elementary Functional Analytic Approach.* Birkhauser Advanced Texts, Birkhauser-Verlag, Basel 2001.

[8] Temam, R.: *Navier-Stokes Equations.* North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford 1977.