

Vladimír Šíma; Jiří Podolský  
Buquoyova úloha

*Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, Vol. 51 (2006), No. 3, 177--186

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/141315>

## Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2006

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

# Buquoyova úloha

Vladimír Šíma a Jiří Podolský, Praha

## 1. Několik úvodních poznámek a faktů z historie

Předmětem tohoto článku je jednoduchá fyzikální úloha [1–3] se zajímavou historií a historickými souvislostmi. Náš hlubší zájem o tento problém vyvolali zvědaví studenti, kteří se nechtěli v daném případě spokojit pouze s formulací pohybové rovnice a s nalezením jejího analytického řešení jen za vhodně zvolených podmínek.

Budeme se zde zabývat analýzou a řešením jedné úlohy z mechaniky, která patří do dynamiky soustav s proměnnou hmotností. K takovým soustavám lze například počítat:

- kropicí vůz, jehož hmotnost se postupně zmenšuje o hmotnost vykropené vody,
- raketu, jejíž hmotnost ubývá tím, že z ní velkou rychlostí tryskají plynné zplodiny hoření paliva,
- letadlo svrhávající náklad bomb,
- pohyb komety s úbytkem její hmotnosti,
- balón vytahující na zemi složené lano, které se s balónem dává do pohybu,
- plovoucí kru, jejíž hmotnost se mění v důsledku namrzání nebo tání,
- kapku vody padající ve vzduchu nasyceném vodní párou,
- řetěz nebo lano, jehož část leží shrnuta na stole a zbývající část klouže z okraje stolu na podlahu.

Patří sem i tzv. cambridgeské úlohy o pohybu těžkého řetězu (lana), které byly studovány cambridgeskými matematiky již před rokem 1850 a kromě významného matematika Arthura Cayleye (1821–1895) se jimi zabývali P. G. Tait a W. L. Steele [4].

V učebnicích fyziky je základní pohybová rovnice těchto systémů většinou spojována se jmény Tulio Levi-Civita (1873–1941), který ji odvodil v roce 1930 [5], resp. Ivan Vsevolodovič Meščerskij (1859–1935), který ji publikoval již v roce 1897 [6].

Je ale pozoruhodné, že stejná rovnice byla již dlouho předtím otištěna ve dvou knižních publikacích [7] a [8], vydaných v Lipsku 1812 a 1814. V první knize je rovnice aplikována na pohyb hmotného bodu, ve druhé je zobecněna na případ soustavy hmotných bodů a má v současné terminologii lagrangeovský tvar, resp.

---

Doc. RNDr. VLADIMÍR ŠÍMA, CSc. (1952), katedra fyziky kovů, MFF UK, Ke Karlovu 5, 121 16 Praha 2, e-mail: [sima@met.mff.cuni.cz](mailto:sima@met.mff.cuni.cz)

Doc. RNDr. JIŘÍ PODOLSKÝ, CSc. (1963), Ústav teoretické fyziky, MFF UK, V Holešovičkách 2, 180 00 Praha 8, e-mail: [podolsky@mbx.troja.mff.cuni.cz](mailto:podolsky@mbx.troja.mff.cuni.cz)



je ve tvaru d'Alembertova principu virtuální práce. Přestože tyto knihy byly tehdy recenzovány ve třech německých knižních přehledech a autor svoje výsledky prezentoval v roce 1815 dokonce na zasedání Pařížské akademie věd (Institut National des Sciences et des Arts, Première Classe) před francouzskými špičkami tehdejší vědy (mj. Laplace, Ampère, Poisson, Cauchy, Fourierem a dalšími), upadl tento nesporný významný přínos vědě na dlouhou dobu v zapomnění. . .

Tento počín a konkrétní úloha, kterou se zde budeme zabývat, jsou spojeny se jménem JIŘÍHO FRANTIŠKA AUGUSTA BUQUOYE (1781–1851), šlechtice, matematika a vynálezce, vzdáleného potomka velitele císařských vojsk v bělohorské bitvě Karla Bonaventury Buquoye, kterému za prokázané služby v porážce českého stavovského povstání císař Ferdinand II. Habsburský v roce 1620 daroval panství Nové Hrady, Rožmberk, Libějovice a tvrze Žumberk a Cukněstjn.

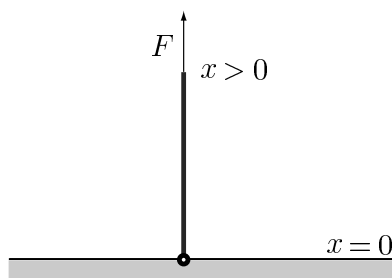
J. F. A. Buquoy studoval matematiku, přírodní vědy, filozofii a ekonomii ve Vídni a v Praze. Svoje znalosti uplatňoval při správě rodového majetku — mj. sestrojil v roce 1810 parní stroj, který se snažil uplatnit v praxi, zasloužil se o rozvoj novohradských skláren, kde zavedl unikátní a dnes již zapomenutou technologii výroby černého neprůhledného skla — hyalitu (1817), v roce 1838 založil přírodní rezervaci Žofinský prales ... Přestože i vzděláním byl vlastně badatel-amatér, okruh jeho tvůrčích a publikačních aktivit byl mimořádně široký, zahrnoval i práce a úvahy na témata z filozofie, práva, politiky a umění. Přehled více než 150 Buquoyových publikací, jeho životopis a podrobné hodnocení významu jeho díla lze nalézt např. ve sborníku [1].

Podle [1] byl J. F. A. Buquoy první, kdo sestavoval a řešil úlohy na pohyb soustav s proměnnou hmotností. První takovou úlohu uvádí na str. 34 knihy [8] z roku 1814. Její zadání je velmi jednoduché:

*Na vodorovné podložce leží smotané dokonale ohebné vlákno. Určete jeho pohyb, působí-li na jeho konec svisle vzhůru konstantní síla.*

Při řešení této Buquoyovy úlohy předpokládáme:

- vlákno je jednorozměrné s konstantní lineární hustotou  $\eta$  (neprotahitelné),
- poloha jeho konce nad vodorovnou podložkou je charakterizována souřadnicí  $x > 0$  (viz obr. 1),
- dokonale ohebné vlákno se při pohybu vzhůru (proti tíhovému zrychlení homogenního gravitačního pole) bez tření odmotává v počátku osy  $x$ ,
- při pohybu dolů v počátku osy  $x$  vlákno „mizí“ — část, která dopadne na podložku, se nepohybuje.



Obr. 1. Schematický obrázek vertikálně se pohybujícího vlákna.

Analýzou tohoto problému chceme především poukázat na některé překvapivé vlastnosti jeho řešení, které má navíc velmi jednoduchou fyzikální podstatu a může být proto užitečné především z pedagogického hlediska. Poznamenejme pouze, že původní řešení, navržené autorem úlohy v [8], nebylo správné. Správné řešení speciálního případu této úlohy je uvedeno v [9].

## 2. Fyzikální podstata problému, pohybová rovnice

Vyjdeme z Newtonova zákona síly, podle kterého je časová změna hybnosti  $p$  pohybující se části vlákna dána výslednicí působících sil

$$\dot{p} = F - mg, \quad (1)$$

kde  $F > 0$  je svisle vzhůru působící konstantní síla, zatímco  $mg$  je opačně působící tíha odvinutého vlákna. Je-li výška konce vlákna nad podložkou  $x$ , pak platí  $p = m\dot{x}$ , přičemž hmotnost se mění podle vztahu  $m = \eta x$ , kde  $\eta$  je konstantní lineární hustota. Zdůrazněme, že fyzikální smysl má pouze  $x > 0$ . Pohybová rovnice má tedy tvar

$$\eta(x\dot{x})' = F - \eta xg, \quad (2)$$

tedy

$$\ddot{x} = \frac{F}{\eta x} - g - \frac{\dot{x}^2}{x}. \quad (3)$$

Stacionární řešení  $x = \text{konst.}$ , tedy  $\dot{x} = \ddot{x} = 0$ , odpovídá situaci, kdy se konec vlákna nachází v konstantní výšce (stav, kdy se vlákno nepohybuje a působí na ně nulová výsledná síla)

$$x_c = \frac{F}{\eta g}. \quad (4)$$

Až potud se problém zdá být redukován na otázku řešení rovnice (2). Ve skutečnosti rovnice (2) popisuje pouze pohyb vlákna vzhůru. Důvod je v tom, že pouze při pohybu vzhůru je výsledná síla  $F - mg$  odpovědná za celkovou časovou změnu hybnosti vlákna

$$\dot{p} = m\ddot{x} + \dot{m}\dot{x}. \quad (5)$$

Při pohybu vlákna směrem dolů tomu tak ovšem není. Příslušná časová změna hybnosti spojená s  $F - mg$  je potom pouze  $m\ddot{x}$ , což odpovídá změně rychlosti již odmotaného konce. Pro část vlákna, která dopadne na podložku, nastane skoková změna rychlosti na nulu (nepružný ráz). Za tuto změnu neodpovídá výslednice uvažovaných sil, ale interakce vlákna s podložkou (dokonale nepružný dopad vlákna, kdy příslušnou hybnost přebírá nekonečně hmotná podložka). Při pohybu směrem dolů, tedy pro  $\dot{x} < 0$ , má proto pohybová rovnice tvar

$$\ddot{x} = \frac{F}{\eta x} - g. \quad (6)$$

Pohyb dolů lze interpretovat také jiným, následujícím způsobem. Popíšeme-li interakci mezi vláknem a podložkou zavedením reakční síly ve tvaru  $F_r = \eta \dot{x}^2$ , pak je to třetí síla, která působí na vlákno při jeho pohybu dolů. Tato síla je orientována vzhůru, proti pohybu vlákna. Nahradíme-li  $F$  v rovnici (3) silou  $F + F_r$ , získáme pohybovou rovnici (6). Práce vykonaná reakční silou je pak zodpovědná za disipaci celkové energie vlákna.

Všimněme si, že rovnice (6) na rozdíl od rovnice (3) správně popisuje volný pád konce vlákna, když vypneme působení síly  $F$ , tj. když  $F = 0$ . Řešení obou rovnic na sebe zřejmě navazují v bodech, kde  $\dot{x} = 0$ , tj. v okamžiku, kdy se pohyb vlákna zastaví — dochází tak k „přepínání“ mezi pohybovými rovnicemi v důsledku změny znaménka rychlosti. Přirozeně obě rovnice mají stejné stacionární řešení  $x_c$ , určené rovnicí (4). Rovnice (3) a (6) lze také napsat v jednotném tvaru, např.

$$\ddot{x} = g \left( \frac{x_c}{x} - 1 \right) - \frac{1}{2} (1 + \text{sgn } \dot{x}) \frac{\dot{x}^2}{x}, \quad (7)$$

ze kterého vyplývá, že Buquoyův problém je popsán pohybovou rovnicí, která speciálním způsobem závisí na rychlosti.

### 3. Pohyb vzhůru

Zabývejme se nejprve řešením rovnice (2). Pro netriviální situaci je součin  $x\dot{x}$  nenulový, můžeme jím tedy obě strany rovnice vynásobit a následně zintegrovat. Dostaneme

$$\frac{1}{2} (x\dot{x})^2 = \frac{F}{2\eta} x^2 - \frac{g}{3} x^3 + C, \quad (8)$$

kte  $C$  je integrační konstanta. Její hodnota je určena počátečními podmínkami  $x_0, \dot{x}_0$ , tj.

$$C = \frac{1}{2}(x_0\dot{x}_0)^2 - \frac{F}{2\eta}x_0^2 + \frac{g}{3}x_0^3. \quad (9)$$

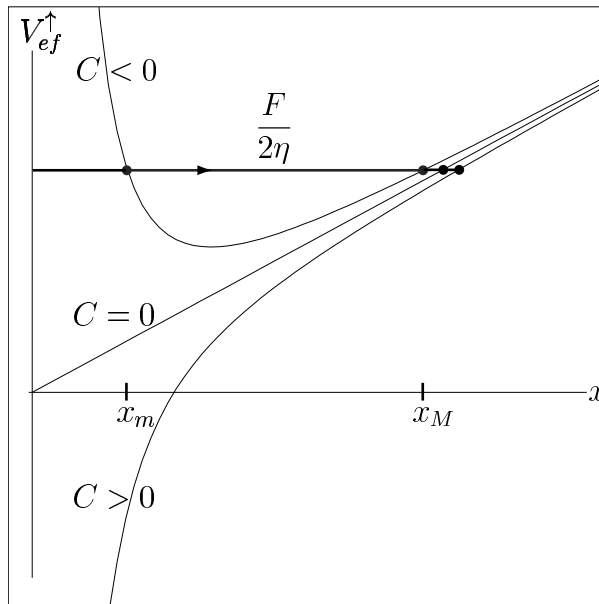
Rovnici (8) můžeme upravit na tvar

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 + V_{\text{ef}}^\uparrow(x) = \frac{F}{2\eta}, \quad V_{\text{ef}}^\uparrow(x) = \frac{g}{3}x - \frac{C}{x^2}, \quad (10)$$

který lze formálně interpretovat jako zachování celkové mechanické energie (velikosti  $F/2\eta$ ) pro pohyb fiktivního hmotného bodu jednotkové hmotnosti v silovém poli s efektivním potenciálem  $V_{\text{ef}}^\uparrow(x)$ . Dosadíme-li za sílu  $F$  ze vztahu (10) do rovnice (3), dostaneme

$$\ddot{x} = -\frac{g}{3} - \frac{2C}{x^3} \equiv F_{\text{ef}}(x). \quad (11)$$

Možné tvary potenciálu  $V_{\text{ef}}^\uparrow(x)$  závisí na hodnotě konstanty  $C$ , jak je vidět z obr. 2.



Obr. 2. Tři možné tvary potenciálu  $V_{\text{ef}}^\uparrow(x)$  pro pohyb vzhůru.

Hodnota a znaménko konstanty  $C$  jsou určeny počátečními podmínkami podle rovnice (9). Pro  $C \geq 0$  z (11) plyne  $F_{\text{ef}} < 0$ , pro pohyb vzhůru tedy nutně musí být splněna počáteční podmínka  $\dot{x}_0 > 0$ . Počáteční podmínka  $\dot{x}_0 = 0$  je možná, pouze když  $F_{\text{ef}}(x_0) \geq 0$ , tj. je-li splněno  $C \leq -(g/6)x_0^3 < 0$ . Pro libovolnou velikost síly  $F$  pro pohyb vlákna vzhůru existuje *maximální výška*  $x_M$ , určená podmínkou  $V_{\text{ef}}^\uparrow(x_M) = F/2\eta$ , tedy řešením kubické rovnice

$$x^3 - \frac{3}{2}x_c x^2 - \frac{3}{g}C = 0, \quad (12)$$

plynoucí z (10). Po dosažení bodu obratu  $x_M$  se vlákno nutně začne pohybovat dolů.

Pro  $C < 0$  má potenciál tvar potenciálové jámy. Obecně tedy existují *dvě* řešení rovnice (12) — kromě maximální výšky  $x_M$  také „výchozí bod“  $x_m$  (počáteční bod pohybu vzhůru s nulovou počáteční rychlostí). V tomto případě lze maximální výšku  $x_M$  explicitně vyjádřit pomocí hodnoty  $x_m$ . Vydělíme-li kubický trojčlen v (12) rozdílem  $x - x_m$ , získáme kvadratickou rovnici pro  $x_M > x_c > x_m$ , která má jediné fyzikální řešení

$$x_M = \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2} x_c - x_m \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2} (x_c + x_m)^2 - 4x_m^2}. \quad (13)$$

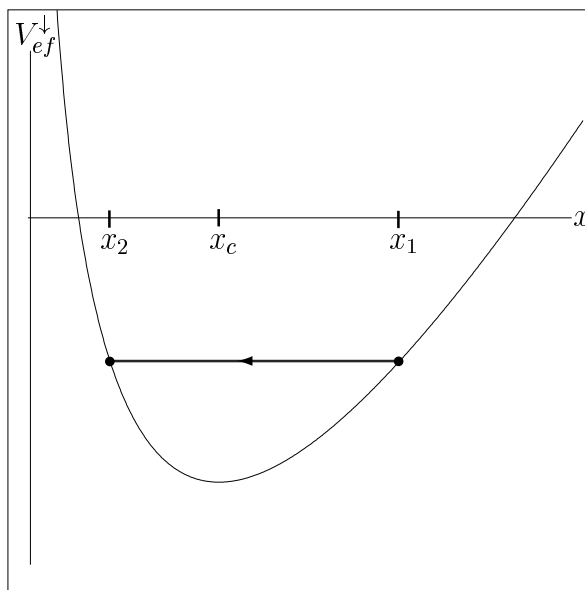
Poznamenejme, že pro velké hodnoty  $x$ , tj. takové, že  $x^3 \gg (3/g)|C|$ , je efektivní potenciál (10) možno aproximovat pomocí  $V_{\text{ef}}^\uparrow(x_M) \approx (g/3)x$ , tedy *nezávisle na  $C$*  je maximální výška  $x_M \approx \frac{3}{2}x_c$  (viz obr. 2).

#### 4. Pohyb dolů

Integrací pohybové rovnice (6) získáme efektivní potenciál pro pohyb dolů

$$\frac{1}{2} \dot{x}^2 + V_{\text{ef}}^\downarrow(x) = V_{\text{ef}}^\downarrow(x_1), \quad V_{\text{ef}}^\downarrow(x) = gx - \frac{F}{\eta} \ln x,$$

znázorněný na obr. 3. Má tvar potenciálové jámy s minimem pro  $x_c$ , které odpovídá stacionárnímu řešení.



Obr. 3. Potenciál  $V_{\text{ef}}^\downarrow(x)$  pro pohyb dolů.

Jak plyne z obr. 3, pro každou hladinu potenciálu vyšší než  $V_{ef}^{\downarrow}(x_c)$  existují *dva body obratu*, jejichž souřadnice  $0 < x_2 < x_c < x_1$  splňují podmínku

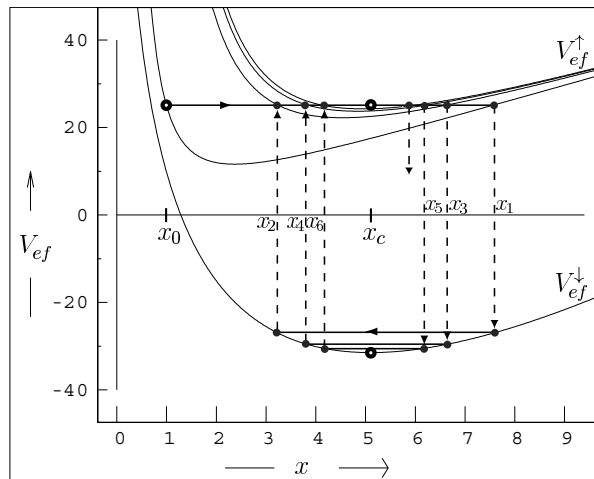
$$x_1 - x_2 = x_c \ln \frac{x_1}{x_2}.$$

Je vidět, že platí  $x_2 > 0$ , tedy horní konec vlákna *nikdy nemůže dopadnout na podložku*.

Následuje-li pohyb dolů po pohybu vzhůru, je bod obratu  $x_1$  totožný s maximální výškou  $x_M$ , zavedenou pro pohyb vzhůru. Podobně bod obratu  $x_2$  se stává *novou* minimální výškou  $x_m$  pro následující pohyb vzhůru.

## 5. Výsledný pohyb

K popisu celkového pohybu vlákna musíme „napojit“ popis pomocí rovnice (10), platící pro  $\dot{x} > 0$ , na popis, vyplývající z rovnice (14) pro  $\dot{x} < 0$ . K napojení dochází v bodech obratu  $\dot{x} = 0$ , tj. v okamžicích, kdy funkce  $x(t)$  dosahuje lokálního maxima, resp. minima. Na obr. 4 je tento postup explicitně znázorněn (pro  $x_0 > 0$ ,  $\dot{x}_0 = 0$ , tj.  $C < 0$  a  $x_0 = x_m$ ) výpočtem jednotlivých bodů obratu  $x_1, x_2, x_3, \dots$  pro jednotlivé fáze pohybu vlákna vzhůru a dolů.



Obr. 4. Potenciály  $V_{ef}^{\uparrow}(x)$  a  $V_{ef}^{\downarrow}(x)$ . Řada  $x_1, x_2, x_3, \dots$  (viz text), znázorněná polohami vertikálních šipek, konverguje ke stacionární hodnotě  $x_c$ , vyznačené kroužkem na dně potenciálové jámy. Určeno pro následující hodnoty parametrů úlohy:  $\eta = 2 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}$ ,  $F = 0,1 \text{ N}$ ,  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ,  $x_0 = 1 \text{ m}$ ,  $\dot{x}_0 = 0$ .

Postupujeme tedy takto: z počátečních podmínek určíme potenciál  $V_{ef}^{\uparrow}(x)$  pomocí (9) a (10). První bod obratu  $x_1 = x_M > x_0$  je určen podmínkou  $V_{ef}^{\uparrow}(x_1) = F/2\eta$  nebo vztahem (13) (pokud  $\dot{x}_0 = 0$ ). Z (14) pak určíme  $V_{ef}^{\downarrow}(x_1)$  a nalezneme druhý bod obratu pro pohyb dolů  $x_2 < x_1$  z podmínky  $V_{ef}^{\downarrow}(x_2) = V_{ef}^{\downarrow}(x_1)$ , nebo pomocí rovnice (15). Hodnota  $x_2$  má význam nové počáteční polohy  $x_m$  s nulovou rychlostí pro následný



pohyb vzhůru. Určíme proto *nový potenciál*  $V_{\text{ef}}^\uparrow(x)$  a z podmínky  $V_{\text{ef}}^\uparrow(x_3) = F/2\eta$  souřadnici dalšího horního bodu obratu  $x_3 = x_M > x_2$ . Pak nalezneme  $V_{\text{ef}}^\downarrow(x_3)$  a určíme následující dolní bod obratu  $x_4 < x_3$  z podmínky  $V_{\text{ef}}^\downarrow(x_4) = V_{\text{ef}}^\downarrow(x_3)$  atd.

Z obr. 4 je vidět, že řada bodů obratu osciluje kolem stacionární polohy  $x_c$ , přičemž amplituda těchto oscilací klesá — pohyb vlákna tedy vykazuje *tlumené kvaziperiodické kmity*.

Harmonický charakter oscilací kolem  $x_c$  pro případ malých výchylek  $\xi = x - x_c$ ,  $|\xi| \ll x_c = F/\eta g$  vyplývá z pohybových rovnic (6) a (11). Zanedbáme-li vyšší členy, přejdou totiž obě rovnice na rovnici lineárního harmonického oscilátoru

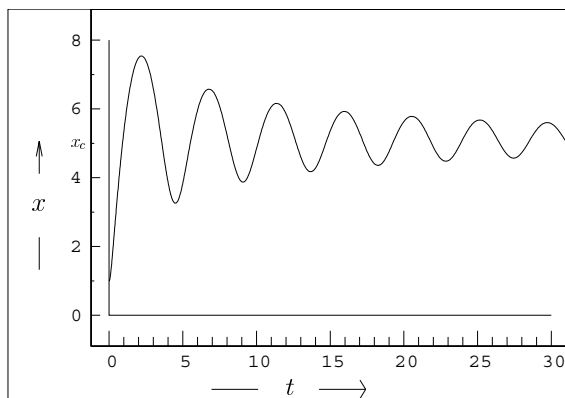
$$\ddot{\xi} + \frac{\eta g^2}{F} \xi = 0. \quad (16)$$

To znamená, že malé oscilace konce vlákna kolem stacionární polohy jsou blízké harmonickým s periodou  $T_s = (2\pi/g)\sqrt{F/\eta}$ . Lze ukázat, že velikost časového intervalu  $T^\uparrow$  mezi dvěma následujícími průchody polohou  $x = x_c$  při pohybu vzhůru *klesá* s časem, analogický interval  $T^\downarrow$  pro pohyb dolů s časem naopak *roste*. Platí navíc  $\lim_{t \rightarrow \infty} T^\uparrow = \lim_{t \rightarrow \infty} T^\downarrow = T_s$ .

Tab. 1. Časové okamžiky  $t$  a souřadnice polohy  $x$  řady bodů obratu a průchodů (asymptotickou) rovnovážnou polohou  $x_c = 5.102$  a příslušné výchylky  $\xi = x - x_c$ .  $T^\uparrow$ , resp.  $T^\downarrow$  označuje velikost časového intervalu mezi následnými průchody polohou  $x = x_c$  při následných pohybech vlákna vzhůru, resp. dolů (např.  $T^\uparrow = 4.573$  je určen rozdílem  $t = 5.514$  a  $t = 0.941$ ). Periody  $T^\uparrow$  klesají a  $T^\downarrow$  rostou ke společné limitní hodnotě  $T_s = 4.534$ .

$t$ [s]	$x$ [m]	$\xi$ [m]	$T^\uparrow$ [s]	$T^\downarrow$ [s]
0.000	1.000	-4.102	—	—
0.941	$x_c$	0	—	—
2.186	7.536	2.434	—	—
3.528	$x_c$	0	4.573	—
4.470	3.259	-1.843	—	—
5.514	$x_c$	0	—	4.451
6.710	6.573	1.471	—	—
7.979	$x_c$	0	4.549	—
8.994	3.869	-1.233	—	—
10.063	$x_c$	0	—	4.496
11.245	6.161	1.059	—	—
12.475	$x_c$	0	4.543	—
13.518	4.172	-0.930	—	—
14.606	$x_c$	0	—	4.511
15.780	5.930	0.828	—	—
16.986	$x_c$	0	—	—

Graf na obr. 5, znázorňující výslednou časovou závislost polohy konce vlákna  $x(t)$ , byl získán numerickým řešením rovnice (7) pomocí Rungeovy-Kuttovy metody (příslušná řešení pohybu vzhůru a dolů byla „přepínána“ v bodech, kde rychlost mění znaménko). Volba příslušných parametrů je stejná jako na obr. 4. V tab. 1 jsou uvedeny číselné hodnoty časových okamžiků  $t$ , ve kterých konec vlákna prošel body obratu  $x_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ , stacionární polohou  $x_c$  a jsou zde též příslušné hodnoty výchylek  $\xi = x - x_c$ . Tlumení je zřejmé z klesající amplitudy. Časový interval  $T^\uparrow$  pro pohyb vzhůru s časem pomalu klesá, zatímco „periody“  $T^\downarrow$  pro pohyb dolů narůstají.



Obr. 5. Výsledný pohyb Buquoyova vlákna jasně vykazuje tlumené oscilace kolem stacionární polohy  $x_c$ .

S výjimkou speciálních případů počátečních podmínek je obtížné nalézt analytické řešení pohybové rovnice (7). Zajímavý je zvláštní případ pohybu vzhůru, explicitně řešitelný v případě, když  $C = 0$ . V tomto případě má rovnice (11) řešení ve tvaru

$$x = \frac{3}{2g} \left( \frac{F}{\eta} - \dot{x}_0^2 \right) + \dot{x}_0 t - \frac{g}{6} t^2, \quad (17)$$

s počátečními podmínkami  $x_0 = (3/2g)(F/\eta - \dot{x}_0^2)$  a  $0 < \dot{x}_0 \leq \sqrt{F/\eta}$ . Vlákno se pohybuje vzhůru s konstantním zpomalením  $-g/3$ . Pro „limitní“ počáteční podmínky  $x_0 = 0$  a  $\dot{x}_0 = \sqrt{F/\eta}$  nastává mimořádná situace — působení konečné síly  $F$  na „nulovou“ hmotnost vlákna pro  $x = 0$  s nenulovou rychlostí vede v homogenním gravitačním poli  $g$  k „vrhu vzhůru“ se zpomalením  $-g/3$ . Konec vlákna dosáhne maximální výšky  $x_M = \frac{3}{2}x_c$  v časovém okamžiku  $t_M = (3/g)\sqrt{F/\eta}$ . Spočítáme-li délku časového intervalu mezi  $t_M$  a okamžikem průchodu polohou  $x = x_c$ , získáme právě čtvrtinu hypotetických „parabolických“ kmitů  $T_p^\uparrow = (4\sqrt{3}/g)\sqrt{F/\eta}$ , tato veličina je ve shodě s tím, co již bylo řečeno, větší než perioda harmonických oscilací  $T_s$ .

## 6. Diskuse

Fyzikální interpretace řešení Buquoyovy úlohy je zřejmá. Tlumený pohyb vlákna je důsledkem disipace hybnosti a energie při dopadu částí vlákna na podložku. Tyto

procesy mají jednosměrný charakter, protože se při nich mechanická energie pohybu vlákna mění na dále nevyužitelnou vnitřní energii vlákna a podložky.

Z hlediska efektivních potenciálů, popisujících pohyb fiktivní částice jednotkové hmotnosti v silovém poli, je disipace energie spojena se změnami potenciálu pro pohyb vzhůru ve spodních bodech obratu. Z hlediska reakční síly jde o práci vykonanou touto silou při pohybu vlákna dolů.

Úlohu by bylo možno zobecňovat redukováním výchozích předpokladů, případně nahrazením spojitého vlákna soustavou diskrétních článků (korálky, články řetězu, nastupování a vystupování z paternosteru, ...). Ve všech takových případech by to však znamenalo specifikaci dalších předpokladů a popis systému by už většinou nemohl být redukován na popis jednorozměrného pohybu hmotného bodu.

Triviální není ani případ, kdy síla  $F$  nemá směr kolmý k vodorovné podložce (např. pohyb raketové střely, táhnoucí za sebou optický kabel). V tomto případě nutně dochází k prověšení vlákna a vlečení jeho části po podložce, přičemž horizontální složka rychlosti sice s časem bude klesat, nemůže však změnit znaménko. U výšky taženého konce vlákna nad vodorovnou podložkou lze však v důsledku disipace svislé složky hybnosti při poklesu výšky očekávat podobné tlumené oscilace jako u prezentovaného řešení Buquoyovy úlohy.

## 7. Shrnutí a závěr

V článku jsme prezentovali řešení jednoduchého a přitom zajímavého problému jednorozměrného oscilačního pohybu otevřeného systému s proměnnou hmotností v poli konstantní a tíhové síly. Tuto úlohu již před dvěma staletími navrhl a řešil hrabě Jiří Buquoy. Ukázali jsme, že disipace energie systému, která způsobuje tlumení oscilací, je důsledkem speciální závislosti působící síly na rychlosti.

## L i t e r a t u r a

- [1] MICHAILOV, G. K.: *Georg Bukua i načala dinamiky sistem s peremennymi massami*. In: *Issledovaniya po istorii fiziki i mehaniki*, Nauka, Moskva 1986, 191–238.
- [2] SLAVÍK, J.: *Teoretická mechanika*. Západočeská univerzita, Plzeň 1994, 22–23.
- [3] ŠÍMA, V., PODOLSKÝ, J.: *Buquoy's problem*. *Eur. J. Phys.* 26 (2005), 1037–1045.
- [4] TAIT, P. G., STEELE, W. L.: *A Treatise on Dynamics of a Particle*. Macmillan, London 1856.
- [5] LEVI-CIVITA, T.: *Ancora sul moto di un corpo di massa variabile*. *Rend. Accad. Naz. Lincei* 11 (1930), 626–632.
- [6] MEŠČERSKIJ, I. V.: *Dinamika točki perennoj massy*. Tipografija Akademii nauk, St Petersburg 1897.
- [7] BUQUOY, G.: *Analytische Bestimmung des Gesetzes der virtuellen Geschwindigkeiten in mechanischer und statischer Hinsicht*. Breitkopf und Härtel, Leipzig 1812.
- [8] BUQUOY, G.: *Weitere Entwicklung und Anwendung des Gesetzes der virtuellen Geschwindigkeiten in mechanischer und statischer Hinsicht*. Breitkopf und Härtel, Leipzig 1814.
- [9] PANOVKO, J. G.: *Mechanika deformirujemogo tverdogo tela: sovremennyye koncepcii, ošibki i paradoksy*. Nauka, Moskva 1985, 173–178.