Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Barbara S. Edwards; Michael B. Ward

Překvapení z didaktického výzkumu: Jak studenti „užívají“ matematické definice

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 50 (2005), No. 3, 221--236

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/141273`

[17] Einstein, A., Infeld, L.: *Fyzika jako dobrodružství poznání.* Orbis, Praha 1958.
[18] Jelen, J.: *Paradoxy prostoročasu.* PMFA *46* (2001), 18–32.
[19] Fuchs, C. A., Peres, A.: *Quantum theory needs no interpretation.* Physics Today *53* (March 2000), 70–74.
[20] Ruelle, D.: *Chance and Chaos.* Princeton Univ. Press 1991.
[21] Jelen, J.: *Matematická nekonečna a fyzika.* Čes. čas. fyz. *53* (2003), 149–154.
[22] Jelen, J.: *Gödelův odkaz v matematice a jeho možné souvislosti ve fyzice.* 13. konferencia slovenských a českých fyzikov, Zvolen 1999, 441–444.

Překvapení z didaktického výzkumu: Jak studenti „užívají“ matematické definice

Barbara S. Edwards a Michael B. Ward, Oregon

1. Úvod

Autoři článku se setkali na letní škole, kterou sponzorovala organizace Oregon Collaborative for Excellence in the Preparation of Teachers (OCEPT). B. Edwardsová je badatelka v oblasti matematického vzdělávání na vysoké škole. M. Ward je matematik, učí čistou matematiku na vysoké škole a před svou účastí v programu OCEPT neměl téměř žádné zkušenosti s výzkumem v oblasti didaktiky matematiky. Během letní školy B. Edwardsová popsala Wardovi výsledky své doktorské práce [5], v níž se zabývala tím, jak studenti rozumějí matematickým definicím a jak je používají v kurzu matematické analýzy. Její výzkum ukázal, že úlohy týkající se např. definic limity a spojitosti byly pro některé studenty problematické. Wardova okamžitá intuitivní reakce zněla, že slova limita a spojitost jsou „zatížena“ konotacemi z jejich nematematického užívání

Barbara S. Edwardsová získala titul Ph.D. v didaktice matematiky na Pennsylvánské státní univerzitě v roce 1997 (čímž začala svou třetí kariéru). Je docentkou na katedře matematiky na Oregonské státní univerzitě, Oregon State University, Corvallis, OR 97331, e-mail: `edwards@math.orst.edu`

Michael B. Ward studoval na Utažské státní univerzitě a získal titul Ph.D. na Univerzitě v Utahu v roce 1979. Do roku 1997 pracoval na Bucknellově Univerzitě, pak přešel na Western Oregon University; Department of Mathematics, Western Oregon University, Monmouth, OR 97361, e-mail: `wardm@wou.edu`

Z anglického originálu *Surprises from Mathematics Education Research: Student (Mis)use of Mathematical Definitions* (The American Mathematical Monthly *111* (2004), 411–424) přeložila Naďa Stehlíková.

a z jejich ne zcela přesného užívání v elementární matematické analýze. Řekl: „Vsadím se, že studenti mají méně problémů, nebo aspoň problémy jiného druhu, s definicemi z abstraktní algebry. Slova jako grupa a faktorgrupa nejsou takto zatížena.“

Tak došlo k tomu, že oba autoři začali s podporou OCEPTu studovat porozumění definicím a jejich použití v rámci úvodního kurzu abstraktní algebry, kde vyučoval M. Ward. Kurz navštěvovali studenti specializující se na matematiku. Název tohoto článku se týká některých výsledků, které M. Warda překvapily. Zejména ho udivilo, že jeho studenti algebry mají podobné problémy jako studenti, kteří studovali analýzu a které zkoumala B. Edwardsová. (Sázku tedy prohrál.) Nejvíce ho překvapily obtíže, které nebyly dány obsahem definic, ale porozuměním samému charakteru matematických definic. Když se dozvěděli o doktorské práci B. Edwardsové někteří další matematici působící na vysoké škole, tyto obtíže je rovněž udivily, i když šlo o obtíže z matematické analýzy.

V dalším textu stručně uvedeme některé myšlenky z filozofie a didaktiky matematiky, které tvoří teoretické pozadí výzkumu. I když nemáme v úmyslu podat vyčerpávající popis žádné z obou studií, naznačíme alespoň metodologii, která byla využita v disertační práci B. Edwardsové a v našem společném výzkumu v rámci kurzu abstraktní algebry. Tak si bude moci čtenář udělat obrázek kontextu, z něhož naše pozorování vycházejí. Dále uvedeme „překvapivé“ obtíže obou skupin studentů, ilustrujeme je příklady a pokusíme se je vysvětlit pomocí teoretického rámce výzkumu. Závěrem upozorníme na některé praktické důsledky výzkumu pro výuku matematiky na vysoké škole a na několik konkrétních aktivit, které se podle našich zkušeností jak z výzkumu, tak z výuky jeví jako slibné.

2. Teoretický rámec

Vyučující na katedrách matematiky vysokých škol si obecně uvědomují, že studenti specializující se na matematiku mají v rámci úvodních kurzů abstraktní algebry, matematické analýzy či teorie čísel často problémy s psaním matematických důkazů. Některým aspektům porozumění psaní matematických textů a předpokladům úspěšného psaní jsou věnovány např. práce [8], [16] a [11]. Konkrétně Moore [11] uvádí, že i když se studenti pokoušejí psát důkazy, nemusí nutně rozumět obsahu příslušných definic a jejich využití při psaní důkazů. B. Edwardsová ve své studii [5] zjistila, že někteří studenti matematické analýzy, a to i ti, kteří jsou považováni na základě svých známek za úspěšné, mají obtíže v porozumění *roli*, kterou obecně hrají matematické definice v matematice. Objevily se problémy v porozumění filozofické kategorizaci matematických definic a v použití definic při řešení matematických úloh takových jako dokazování vět.

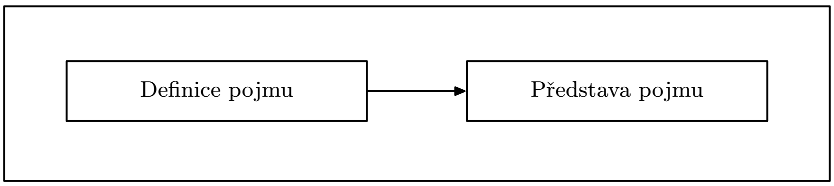
Definice hrají v matematice klíčovou roli, ale jejich tvorba a použití se liší od jejich tvorby a použití v běžném jazyce. Nejdříve se podíváme do filozofie a lexikografie, kde najdeme užitečné kategorizace definic a jejich vlastnosti. Poté nahlédneme do matematické didaktické literatury, abychom získali vhled do použití matematických definic.

Filozof Richard Robinson [15] rozlišuje mezi *lexikálními*[1]) a *konvenčními*[2]) definicemi. Píše: „Lexikální definice je takový typ nominální definice, v níž vysvětlujeme určitý způsob, jímž určitá osoba užila určité slovo“ [15, s. 35]. Lexikograf Sidney I. Landau [10] popisuje stejnou kategorii, ale používá termín *odvozená definice*[3]) místo lexikální, protože jde o „definice, které jsou založeny na příkladech konkrétního užití, definice *extrahované* z existující reality“ [10, s. 165]. Zde budeme používat terminologii S. Landaua, protože B. Edwardsová použila slovo „lexikální“ ve svých dřívějších pracích v jiném smyslu.

Naproti tomu R. Robinson charakterizuje konvenční definice jako definice, které „znamenají explicitní a účelné zavedení významového vztahu mezi slovem a objektem, akt přiřazení jménu objekt (či jména objektu)“ [15, s. 59]. Jejich hlavní výhodou je „zlepšení pojmů nebo tvorba nových pojmů, což je klíčem k jednomu ze dvou či tří zámků na dveřích úspěšné vědy“ [15, s. 68]. S. Landau říká, že takové definice „jsou *zavedené* na radu expertů“ s cílem „zjednodušit a zpřesnit komunikaci mezi těmi, kteří jsou zasvěceni do jazyka vědy“ [10, s. 165].

Odvozené definice tedy o svém použití podávají svědectví, zatímco konvenční definice své použití vytvářejí; vlastně vytvářejí pojmy předpisem. Pokud je termín definován úmluvou, má být bez konotací, tedy bez všech asociací, které by mohl získat v netechnickém jazyce. Matematické definice považujeme za konvenční,[4]) zatímco většina definic běžného jazyka je odvozená.

Podívejme se nyní do literatury z didaktiky matematiky a popišme, jak používají definice v matematice studenti. Podle Vinnera [21] a Talla [19] s sebou každý matematický pojem nese tzv. definici pojmu a představu pojmu.[5]) Lze říci, že *definice pojmu* je konvenční definice. Na druhé straně *představa pojmu* je neverbální reprezentace porozumění nějakému pojmu u určité osoby. Zahrnuje „vizuální reprezentace, mentální obrázky, dojmy a zkušenosti spojené s názvem pojmu“ [21, s. 68]. Souhlasíme s S. Vinnerem v tom, že se domnívá, že učitelé matematiky si obecně myslí, že představy pojmu u jejich studentů vyrůstají z dané definice pojmu, jak je ilustrováno jednoduchým diagramem na obr. 1.



Obr. 1. Idealizovaný vývoj formálního matematického pojmu [21].

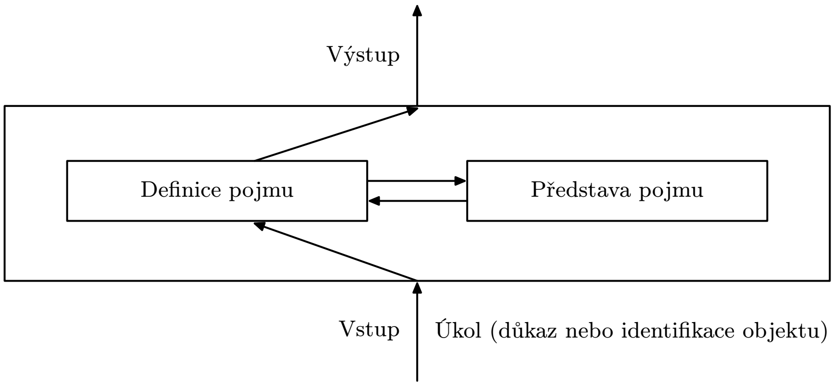
[1]) Pozn. překl. V originále lexical.

[2]) Pozn. překl. V originále stipulative.

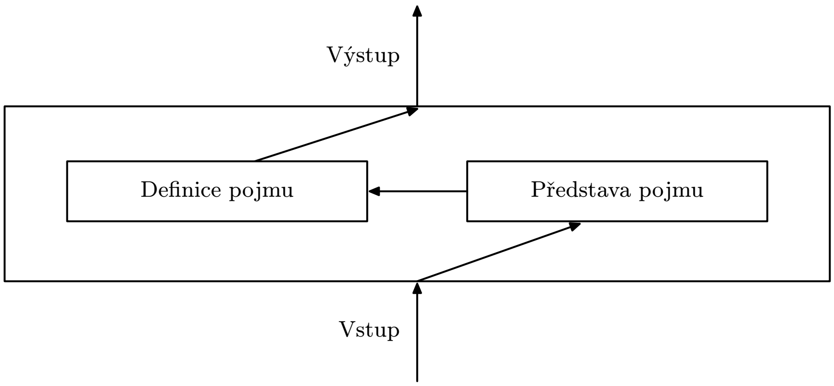
[3]) Pozn. překl. V originále extracted.

[4]) Pozn. překl. Toto rozdělení je poněkud zjednodušující.

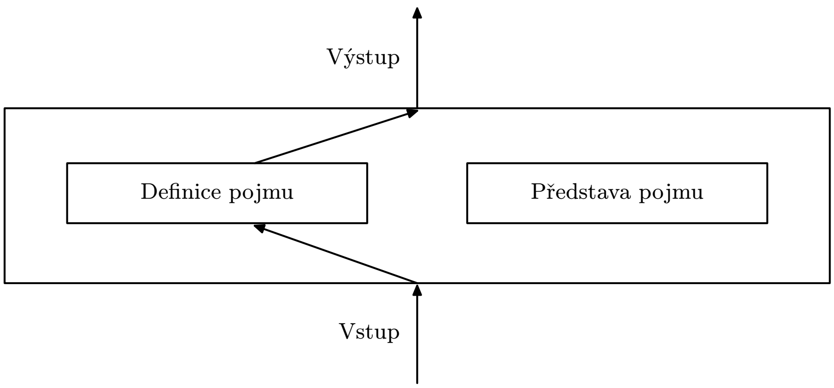
[5]) Naše stručné shrnutí je založeno na naší interpretaci S. Vinnera z práce [21], kde může čtenář najít úplnější popis.



Obr. 2. Souhra mezi definicí a představou [21].



Obr. 3. Dedukce následuje intuitivní myšlení [21].



Obr. 4. Čistě formální dedukce [21].

Máme-li řešit úlohu obsahující nějaký pojem, rigorózní povaha matematiky vyžaduje, aby využití daného pojmu sledovalo jedno ze schémat, které navrhl S. Vinner (obr. 2–4). Máme na mysli např. úlohy na dokazování vět nebo identifikaci objektu, který má určitou definovanou strukturu jako např. grupa. Důležité je, že ať vstoupí představa pojmu do procesu řešení úlohy jakýmkoli způsobem, konečný výsledek bude založen pouze na definici pojmu.

Shrnutí: Zavedli jsme kategorie konvenčních definic, k nimž patří také matematické definice, a odvozených definic. Dále jsme uvedli kognitivní model některých stránek postupů, v nichž se definice používají při řešení matematických úloh. Tento model je založen na myšlence definice pojmu a představy pojmu.

3. Metodologie

Účelem obou zde představených studií bylo podívat se hlouběji na to, jak studenti chápou *obsah* matematických definic, abychom zjistili, jak rozumějí *roli* formálních definic v matematice. Tento cíl je obtížný proto, že student může definici použít matematicky nekorektním způsobem minimálně ze dvou důvodů. Může jít o neúplné nebo nesprávné porozumění pojmu, který definice zavádí. Na druhé straně může jít o matematicky nekorektní porozumění roli matematických definic vůbec. Další obtíž, která ovlivnila naše studie, vyvstává z toho, že pokud studentům položíme přímou otázku, mohou jejich odpovědi svědčit o zdánlivě přijatelném porozumění roli formálních definic v matematice, aniž by tomu tak ve skutečnosti bylo. Studenti (ale vlastně kdokoli) často opakují, co slyší, aniž by tomu plně rozuměli. Například mohou říci (třeba aby potěšili učitele), že „matematika se využívá ve všech oblastech života“, aniž by byli schopni podat jediný smysluplný příklad (jiný než každodenní transakce v obchodě).

Obě studie využily podobné výzkumné metody. Metodologie studie o matematické analýze je popsána v [5] a [6]. Studie o algebře se zúčastnili studenti navštěvující kurz Úvod do teorie grup, který vyučoval M. Ward a v němž prováděla pozorování B. Edwardsová. Výzkumný materiál měl podobu dvou písemných úkolů[6]), které zpracovalo všech 14 studentů, a rozhovorů, jichž se zúčastnilo 8 dobrovolníků ze skupiny. Každý z osmi studentů se zúčastnil dvou jednohodinových rozhovorů založených na matematických úlohách (viz dodatek). První rozhovor začal otázkou „Co je matematika?“. Tazatel pokládal další otázky podle potřeby, aby zajistil, že každý student řekne něco o povaze a roli definic v matematice. Během obou rozhovorů měli studenti přečíst několik definic, které už byly v hodinách zavedeny nebo které měly být teprve probírány. Pak byli požádáni, aby řešili úlohu, která byla s uvedenými definicemi spojena. Definice a úlohy jsme vybrali tak, abychom při rozhovorech navodili situace, v nichž by u studentů mohl nastat rozpor mezi definicí pojmu a představou pojmu. Kromě toho jsme vybrali ty definice a úlohy, které jsme na základě zkušeností považovali za obtížné. Naším záměrem bylo pozorovat, zda a jak studenti použijí definice k překonání vzniklých obtíží. Studenti měli definice stále k dispozici v písemné podobě. Rozhovory byly nahrávány na magnetofon i videokameru. Pak byly pořízeny a analyzovány doslovné protokoly rozhovorů.

---

[6]) Písemné úkoly nejsou v tomto článku diskutovány.

Analýza protokolů probíhala následovně. Každý z nás nezávisle na sobě opakovaně četl protokoly, studoval písemné odpovědi studentů a vytvořil počáteční třídění, které bylo založeno na interpretaci názoru každého studenta na roli matematických definic a na jeho chování při řešení dané úlohy. O každém z osmi studentů jsme sepsali stručnou studii, pak jsme se setkali a porovnali své prozatímní výsledky. O výslecích každého studenta jsme diskutovali a dohodli se na systému kódování pro další práci. Znovu jsme individuálně prostudovali protokoly a přitom jsme použili kódovací systém. Dále jsme se několikrát sešli a prodiskutovali a zpřesnili své závěry o každém studentovi. A právě při porovnání našich výsledků mezi sebou a se závěry disertační práce B. Edwardsové se objevila překvapení.

4. Překvapení

1. překvapení: Mnoho studentů *netřídí* matematické definice tak, jak to dělají matematici.

Matematici chápou (a museli bychom je hodně nutit, aby si vzpomněli na čas, kdy tomu tak nebylo), že matematické definice jsou dané konvencemi. Jak říká R. Robinson [15, s. 59]:

> Byli to především matematici, kteří nejméně od doby Eukleida přiřazovali slovům své vlastní významy. „*Spočetnou* řadou,“[7]) říkají například, „budeme rozumět řadu, kterou můžeme vzájemně jednoznačně přiřadit ke kladným celým číslům, aniž bychom změnili pořadí jejích prvků.“ Nejde o popis toho, co znamenalo slovo „spočetný“ v historii nebo co se obvykle myslí tímto slovem teď. Jde o oznámení, co bude toto slovo znamenat v předložené práci, nebo žádost čtenáři, aby jej chápal v tomto smyslu.

Učitelé matematiky si patrně neuvědomují, že studenti neřadí matematické definice mezi konvenční definice. Vždyť tato studie vznikla na základě sázky, že v kurzu abstraktní algebry nemají studenti jinou možnost, než chápat definice jako definice dané úmluvou. Abychom ilustrovali, jak se některým studentům nedaří zařazovat matematické definice do kategorie konvenčních definic, uvedeme dva příklady ze studie o abstraktní algebře a jeden z disertační práce B. Edwardsové.

V prvním rozhovoru v rámci studie o abstraktní algebře dostal André[8]) otázku: „Co je matematika?“ Ve své odpovědi zmínil matematické věty a definice. Řekl: „To je v podstatě to, co je věta, definice ... Jakmile je [věta] dokázána, stává se definicí... V určité době jsme dokázali, že 1 plus 1 je 2. Takže definice je, že 1 plus 1 se vždycky rovná 2 ... “ Andrého odpověď se nám na první pohled zdála tak divná, že jsme měli nutkání považovat ji za singularitu. Podíváme-li se však na Andrého stanovisko prostřednictvím kategorizace definic, můžeme najít vysvětlení. Pro Andrého představují

[7]) Pozn. překl. Autor chce zřejmě vyjádřit myšlenku, že si matematik může zavést termín, jaký chce.

[8]) Všechna jména studentů jsou pseudonymy.

matematické definice fakta. *Všechny* vlastnosti matematického objektu byly pro něj dány „definicí“. Jeho definice jsou sice odvozeny, ale ne z běžného jazyka, spíše ze souhrnu znalostí o pojmu. Nemají v žádném ohledu charakter konvenčních definic.

Příkladem další studentky, která, jak se zdá, třídí definice jinak než matematici, je Heidi, jiná studentka z kurzu algebry. Zdá se však, že balancuje na hranici porozumění. Její případ považujeme za důkaz toho, že porozumění klasifikaci matematických definic není nutně ostře ohraničeno. Studenti nepatří jednoznačně do jedné (těch, kteří rozumějí) či druhé skupiny (těch, kteří nerozumějí). Celou situaci je možné chápat jako přechodné stadium podobné tomu, co W. Burger a J. Shaughnessy [4] popisují jako přechodné stadium mezi van Hieleho úrovněmi porozumění v geometrii. Podle nich je možné, že studenti vykazují různé úrovně porozumění různým úlohám a někteří mohou dokonce oscilovat mezi stupni porozumění v rámci jedné úlohy.

Po analýze prvního rozhovoru s Heidi nám bylo její porozumění roli matematických definic nejasné. Někdy se zdálo, že prokazuje matematicky korektní náhled na definice, jako například když mluvila o hierarchii definic a axiomů, které se používají v důkazech matematických tvrzení. Ale už o chvíli později řekla: „Musíte vytvořit definice podle toho, co něco skutečně je.“

Při druhém rozhovoru Heidi dostala (poprvé) definici násobení faktorgrup (viz dodatek, definice 4). Již předtím byla v kurzu diskutována definice faktorgrup (dodatek, definice 2). V rámci úloh zadaných v hodině Heidi vyšetřovala faktorgrupy a všimla si některých jejich vlastností. M. Ward na přednášce dokázal základní vlastnosti faktorgrup a Heidi pravděpodobně vyřešila na toto téma nějaké úlohy i doma. Než se začala věnovat definici násobení faktorgrup, což jsme chtěli sledovat, musela nějaké faktorgrupy vyšetřit. Bohužel to nesvedla a více než 20 minut pracovala neúspěšně. B. Edwardsová se jí zeptala, proč nepoužije definici faktorgrupy, kterou měla před sebou. Heidi odpověděla: „Protože vím, jak to udělat, protože jsem to už dělala…“. Při svém úsilí opakovaně pronášela podobné výroky. Zdálo se, že definici nečetla, dokud ji na to tazatel explicitně neupozornil.

Fakt, že se Heidi neustále snažila vzpomenout, jak se vyšetřují faktorgrupy, místo toho, aby použila definici, lze zřejmě částečně vysvětlit pocitem trapnosti či pocitem, že by měla definici znát. Vezmeme-li ovšem v úvahu nejednoznačnost jejího popisu definic z prvního rozhovoru, zdá se, že je ve hře další faktor. V průběhu několika dnů se Heidi opakovaně setkávala s příklady faktorgrup, a tak se mohla domnívat, že definice už není potřeba. Vidíme-li opakovaně příklady židle, nepotřebujeme definici, abychom ji zkonstruovali nebo si do ní sedli. Vypadá to, že Heidi věří, že matematické objekty mohou být definovány podobně a že v případě nutnosti má být schopna extrahovat definice z příkladů.

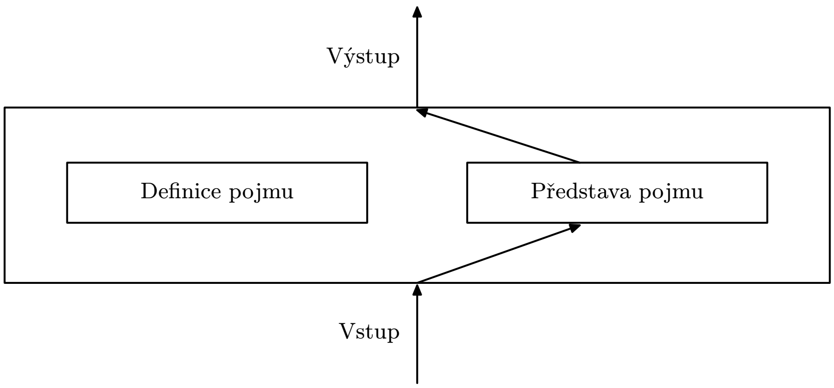
Stephanie, která se účastnila studie B. Edwardsové (a jejíž případ je také diskutován v [6]), podle všeho věřila, že matematické definice mají charakter spíše odvozených než konvenčních definic. Podobně jako lexikograf musí dokumentovat významové použití určitého slova, než se stane slovníkovým heslem, Stephanie řekla, že když matematik píše definici, „musel by požádat své kolegy, aby to zkontrolovali a ujistili se, že je to legitimní a že tam nejsou chyby“.

André, Heidi a Stephanie byli dobří studenti. Dva z nich dokonce získali v matematických kurzech výborné známky. Nicméně matematické definice klasifikovali nesprávně. Všichni zažívali obtíže, které by mohly být částečně vysvětleny jejich neschopností zařadit matematické definice do kategorie konvenčních definic.

V této chvíli si čtenář může projít své vlastní zkušenosti se studenty, kteří nesprávně používají definice, a zvážit, jakou roli při tom může hrát špatná kategorizace.

2. překvapení: Mnoho studentů *nepoužívá* definice tak, jak to dělají matematici, *i když dokážou správně definici vyslovit a vysvětlit.*

Nesprávné použití definic není překvapením. V mezním (ale známém) případě nejsou definice používány vůbec! Kdokoli, kdo někdy vyučoval kurzy vysokoškolské matematiky, viděl studenty, jak řeší úkoly způsobem uvedeným na obrázku 5. Vinner jej nazývá „intuitivní reakcí“. Většina učitelů matematiky předpokládá, že taková reakce se objeví, jen když student nezná definici nebo jí nerozumí. Obecně se domnívají, že pokud student dokáže přesně vyslovit definici a vysvětlit ji, pak je vítězství v dohledu a čistě intuitivní reakce je zažehnána stejně jako další nesprávná použití definic. Naše výsledky však překvapivě ukazují jinou situaci.



Obr. 5. Intuitivní reakce [21].

Například Stephanie ve studii B. Edwardsové dokázala vysvětlit definici čísla s nekonečným desetinným rozvojem, která se objevila v kurzu matematické analýzy.[9]) Uměla užít definici k vysvětlení, proč $0{,}333\ldots = \frac{1}{3}$ (podrobnosti v [6]). Nicméně tuto definici ignorovala, když tvrdila, že se $0{,}999\ldots$ nerovná jedné. Místo toho použila svou představu pojmu, která byla založena na dělení. Tvrdila, že když vydělíme číslo 1 třemi, dostaneme $0{,}333\ldots$, ale když vydělíme číslo 1 jednou, nedostaneme $0{,}999\ldots$. Definici, kterou měla před sebou, nebrala v úvahu. Když se definice pojmu dostala do sporu s její představou pojmu, představa pojmu vyhrála. V souladu s jejím chápáním

[9]) Definice zněla: Nechť $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ je nekonečná posloupnost celých čísel, kde $0 \leqq c_i \leqq 9$. Číslo $\sup\{0{,}c_1c_2\ldots c_n : n = 1, 2, 3, \ldots\}$ se zapisuje jako $0{,}c_1c_2\ldots c_n\ldots$ a nazývá se číslo s nekonečným desetinným rozvojem.

kategorizace matematických definic si zřejmě myslí, že definice pojmu periodický desetinný zlomek nebyla v případě 0,999 … zcela správně odvozena.

Ve stejné studii Jesse podal přijatelnou definici spojitosti, a přesto použil svou představu pojmu, když prohlásil, že funkce absolutní hodnota není v 0 spojitá. I když stále tvrdil, že podle definice by funkce měla být spojitá, nakonec dal větší váhu vzpomínce z úvodního kurzu matematické analýzy, že funkce absolutní hodnoty se chová „jinak“.

3. překvapení: Mnoho studentů nepoužívá definice tak, jak to dělají matematici, *dokonce ani když není k dispozici jiný způsob řešení.*

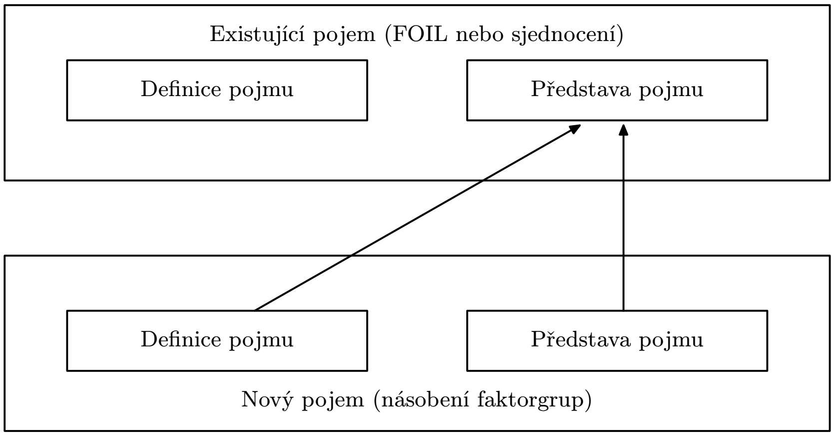
S. Vinner píše: „Zdá se nám, že mnozí učitelé na střední a vysoké škole očekávají u tvorby pojmu jednosměrný proces, jak ukazuje obr. 1, očekávají totiž, že představa pojmu vznikne pomocí definice pojmu a bude jí zcela kontrolována“ [21, s. 71]. Právě to si myslel i M. Ward. V případě, kdy je definicí prostě vzorec, jako je tomu u násobení faktorgrup (dodatek, definice 4), o tom neměl žádné pochybnosti. Téměř o tom nepochyboval v případě úvodního kurzu abstraktní algebry, protože pojmy jako grupa a okruh zde definované určitě nemohou nést žádné konotace, na nichž by šlo vybudovat představu pojmu nezávisle na definici. Obtíže Stephanie a Jesseho přičítal zakořeněným nesprávným představám pojmů vytvořeným dřívějšími zkušenostmi s periodickými desetinnými čísly a se spojitostí. Očekával, že díky chybějící předchozí zkušenosti se bude představa pojmu tvořit při rozhovorech na základě definice pojmu a že jí bude řízena. Zdálo se, že jiná možnost neexistuje.

Pro druhý rozhovor jsme vybrali definici násobení faktorgrup, protože jde o známý zdroj obtíží v teorii grup (některé z nich jsou diskutovány v [3] a [2]). Pro studenty, kteří nebudou mít potíže s obsahem definice, jsme připravili překážku jiného druhu tak, že jsme je požádali, aby uvažovali o situaci, v níž není násobení faktorgrup dobře definováno. Ať už je zdroj problémů jakýkoli, náš konkrétní zájem spočíval v pozorování, zda a jak studenti použijí definice jako nástroje řešení svých obtíží.

Heidi, poté co konečně našla hledané faktorgrupy, přečetla definici jejich násobení a řekla: „Mám to udělat pomocí FOIL?“ „FOIL“ (první – vnější – vnitřní – poslední[10])) se vztahuje na distributivnost násobení dvou dvojčlenů. Zde se shoduje s násobením člen po členu u dvou faktorgrup. (Ironií je, že v některých případech je Heidino schéma skutečně ekvivalentní dané definici, i když to není na první pohled zřejmé.) André provedl podobný výpočet (nazval to „Marťan Marvin“, protože čáry, které nakreslil, aby naznačil součin, připomínaly obličej mimozemšťana).

Blake, další student z kurzu algebry, vykazoval důmyslné porozumění struktuře matematiky. Jeho popis povahy matematických definic odpovídal očekávání. V obou rozhovorech opakovaně hledal odpovědi v daných definicích a pronášel poznámky typu: „Musí to být v této definici…“ Nicméně, když si uvědomil, že činitelé v součinu faktorgrup jsou množiny, chvíli přemýšlel, zda je definice násobení faktorgrup pouze „divný způsob“, jak naznačit, že „se jednoduše vyjmenují [prvky faktorgrup]“, čímž myslel vytvoření sjednocení obou faktorgrup.

[10]) Pozn. překl. V originále First – Outer – Inner – Last.



Obr. 6. Nevhodná představa ovlivňující tvorbu představy.

Náhodný fakt, že každá faktorgrupa v úloze, kterou Heidi a André dostali, obsahovala dva prvky, je vedl k tomu, že psali výrazy typu $\{V, H\}\{D, F\}$. To pravděpodobně díky vizuální podobnosti s $(V + H)(D + F)$ vedlo k řešení pomocí metody „FOIL". Blakea fakt, že jde o operaci se dvěma množinami, vedl k tomu, že si vybavil další operaci s množinami, totiž sjednocení. Pak se snažil představit si, jak daný vzorec vede ke sjednocení. U žádného ze tří studentů se představa pojmu násobení faktorgrup nevytvořila tak, jak ukazuje obr. 1, i když jsme původně předpokládali, že žádná jiná možnost neexistuje. Místo toho jsme byli svědky využití nevhodné, již existující představy pojmu („FOIL" nebo sjednocení). Nevhodná představa pojmu se dostala do sporu s definicí pojmu, nebo ji dokonce nahradila jako vůdčí sílu při tvorbě představy pojmu (viz obr. 6). Pokud zkušený matematik čte matematickou definici, kterou nezná, pravděpodobně si vytvoří (alespoň částečnou) představu pojmu pouze na základě této definice a teprve pak zkoumá její vztahy k již existujícím představám. Heidi, André a Blake však definici pojmu takto nepoužili.

5. Důsledky pro vyučování

V tomto oddíle uvedeme některé důsledky pro vyučování inspirované našimi studiemi, zejména příklady vzdělávacích aktivit. Zkoumání účinnosti našich návrhů může být podkladem dalšího výzkumu.

1. důsledek. Zvláštní charakter matematických definic je sám o sobě jevem, o jehož pochopení by měli všichni studenti matematiky na vysoké škole usilovat.

To je důležité zejména v kurzech, v nichž se student poprvé ve zvýšené míře seznamuje s důkazy. Studenti by určitě měli znát přesný obsah definic, které používají, ale to samo o sobě nestačí. Z našich analýz jasně vyplývá, že studenti také musejí chápat specifickou roli, kterou hrají definice v matematice. Tedy ve zmíněných kurzech musí být charakter matematických definic vysvětlován přímo a často.

Konkrétně by kurzy o matematických důkazech určitě měly obsahovat téma klasifikace a použití matematických definic. Úvodní materiál v tomto článku snad dostatečně popisuje klasifikaci definic, i když pro učitele může být velmi poučná i kapitola 4 knihy R. Robinsona [15], která obsahuje další informace. Kapitola 3 v práci D. Solowa [17] a kapitola 3 (zejména strany 82–83) v práci G. Exnera [7] ilustrují metody výuky, jak používat matematické definice.

Pro studenty (i učitele) může být poučné i vyhledání těch slov ve slovníku, která mají jak odvozené, tak konvenční definice. Například *The American Heritage Dictionary* [1] obsahuje odvozenou i konvenční definici slova „radical", jmenovitě „excelentní, báječný" a „druhá odmocnina nějaké hodnoty, jak ukazuje znak odmocniny".[11]) To je výjimečně dobrý příklad, protože ukazuje, jak může použití slova časem vést k nové odvozené definici. Definici „excelentní, báječný" ve slovnících otištěných před třiceti lety nenajdeme. Matematické definice nejsou extrahovány z každodenního jazyka tak, jak se slovo „excelentní" stalo definicí pro slovo „radical". I když se mohou matematické definice v čase a v kontextu měnit, matematici si vybírají velmi obezřetně, které definice ve své práci použijí.

Existují i další dostupné aktivity, které se soustřeďují na povahu matematických definic. Uvedeme některé z nich.

Zkrácená verze aktivity z [12] určené pro nižší ročníky střední školy velmi dobře fungovala u M. Warda i v kurzu deduktivně budované geometrie. Ilustruje, proč jsou a proč musí být matematické definice určeny s takovou přesností. Aktivita probíhala takto.

Otázka M. Warda: „Co je čtyřúhelník?"

Odpověď ze třídy: „Útvar se čtyřmi stranami."

M. Ward nakreslil útvar se čtyřmi zakřivenými stranami.

Reakce: „Aha, útvar, jehož čtyři strany jsou úsečky."

Ward nakreslil otevřený útvar se čtyřmi stranami...

Činnost pokračovala tímto způsobem, dokud se nedospělo k přijatelné definici. (V [12] lze nalézt další podrobnosti a následné aktivity.)

Ještě užitečnější jsou činnosti, v nichž studenti skutečně formulují definice tak, jako to dělají matematici. Například B. Edwardsová používá knihu o geometrii Davida Hendersona [9] v kurzu pro studenty specializující se na matematiku, kteří zamýšlejí učit buď na střední, nebo na vysoké škole. Na začátku kurzu používají studenti definici trojúhelníka, která je dobře využitelná v euklidovské rovině, na sféře a v hyperbolické rovině, i když trojúhelníky na sféře mohou někdy vypadat hodně odlišně od trojúhelníků v rovině, s nimiž se setkáváme od základní školy. Ovšem studenti nakonec zjistí, že věta SUS (strana, úhel, strana) neplatí pro všechny trojúhelníky na sféře. V tomto okamžiku musejí udělat to, co všichni matematici, totiž hledat speciální případ nebo případy, pro které věta platí. To vede ke speciální definici tzv. „malého trojúhelníka", pro nějž věta SUS platí i na sféře.

---

[11]) Pozn. překl. V češtině takto můžeme nalézt např. slovo kořen, jehož odvozená definice může znít „podzemní orgán vyšších rostlin" a konvenční definice je „řešení dané rovnice, tedy hodnota vyhovující dané rovnici".

2. důsledek. Učitelé lépe pochopí, čemu musejí univerzitní studenti čelit v kurzech o matematických důkazech, pokud si uvědomí posun směrem k logickému uvažování, které je založené na definici pojmu a k němuž musí studenti dospět (viz ilustrace na obr. 2–4). Je velmi pravděpodobné, že studenti mají třináctiletou zkušenost s kurzy, v nichž je normou spíše Vinnerova intuitivní reakce (obr. 5). Zmíněný posun může být obtížný a pro mnoho studentů navíc i matoucí.

Stručné seznámení studentů s rozdílem mezi definicí pojmu a představou pojmu (podobné tomu v tomto textu) jim může poskytnout rámec, do kterého mohou umístit to, co se dozvídají v hodinách. Vinnerovo vysvětlení definice pojmu a představy pojmu ([21], s. 68–73) je pravděpodobně dostatečně jednoduché, aby ho mohl využít i vysokoškolský student. Toto seznámení může být spojeno se čtením textu o důležitosti rigorózního přístupu a důkazů v matematice, jakým je např. práce I. Stewarta („O čem je matematika?“ [18, s. 3]), aby studenti pochopili, proč je posun směrem k rigoróznímu přístupu důležitý.

M. Ward použil Vinnerův materiál ve dvou nedávných kurzech, v kurzu deduktivně budované geometrie a v úvodu do matematických důkazů. V prvním případě strávil asi 20 minut v rámci první přednášky tím, že diskutoval o definici pojmu versus představě pojmu a ukázal obrázky 1–5. Většina studentů okamžitě přijala Vinnerovu terminologii. Když dostali otázku o nějakém kroku v důkazu, mnozí řekli: „Má představa pojmu je … [obvykle odkazovali k obrázku]. Jak to mám říci přesně?“ Když udělali v důkazu nezdůvodněný krok (například „$ABCD$ je čtyřúhelník“), M. Ward se zeptal: „Je tento krok založen na představě pojmu (na nákresu) nebo definici pojmu (A, B, C a D jsou různé komplanární body, z nichž žádné tři nejsou kolineární, a každá dvojice úseček AB, BC, CD a DA má buď prázdný průnik, nebo mají pouze společný koncový bod)?“ Zdálo se, že všichni studenti chápou podstatu podobných otázek.

V kurzu o matematických důkazech M. Ward zavedl termíny definice pojmu versus představa pojmu a ukázal Vinnerovy obrázky mnohem později, až poté, co studenti prošli několik strukturálních důkazů (ve smyslu Vellemana [20], Solowa [17] a Exnera [7, kap. 3]). Upozornil na různé důkazy, které již v kurzu dělali, a ukázal, jak obrázky modelují proces, který pro tvorbu důkazů využili. Například v důkazech týkajících se množin v mnoha případech sehrály užitečnou roli představy pojmu Vennovy diagramy. Obrázky 2 a 3 modelovaly způsob konstrukce těchto důkazů. U důkazu injektivity a surjektivity funkce M. Ward zdůraznil, jak může být strategie důkazu jednoznačně dána pouhým podíváním se na kvantifikátory v definicích. Tento poznatek pak propojil s obrázkem 4. Studentům, kteří nadále psali heuristické rozmáchlé „pseudodůkazy“, ukázal obrázek 5.

3. důsledek. Výsledky našeho výzkumu by měly být brány v úvahu i v přípravě budoucích učitelů.

Naskýtá se otázka, zda stačí počkat, až se studenti zapíší do kurzů matematické analýzy, a teprve pak začít mluvit o zvláštní povaze matematických definic. Jesse ze studie B. Edwardsové týkající se studentů matematické analýzy představuje argument proti. Zejména v úvodních rozhovorech dával najevo víru (a dokonce podle ní jednal), že obsah definice je až na druhém místě za pochopením daného pojmu. Řečeno

Vinnerovou terminologií, Jesse věřil, že pokud je představa pojmu jedince v konfliktu s příslušnou definicí pojmu, pak má přednost představa pojmu. Opakovaně vysvětloval své porozumění povaze matematických definic tím, co se naučil ve středoškolské matematice. Ve druhém rozhovoru řekl, že jeho učitel matematické analýzy mluvil na začátku kurzu o pojmu formálních matematických definic. K tomu Jesse řekl: „Už po tom prvním dnu výuky matematické analýzy jsme se o to [formální definici] nestarali, záleželo jen na tom, zda jste chápali pojem, ne definici." A ve třetím rozhovoru zopakoval totéž: „[Učitel matematické analýzy] dokonce řekl, že to [formální definice] sice obsahuje hodně žargonu, ale že tohle to znamená ve skutečnosti." My učitelovy motivy pravděpodobně chápeme. Opravdu *je* důležité, aby si studenti vyvinuli hluboké porozumění pojmům. Jesseho učitel asi nechtěl, aby se studenti nechali odradit tím, co často na první pohled vypadá jako těžký symbolický a hutný jazyk formálních definic, a na druhé straně také předpokládal (nebo doufal?), že studenti neodejdou z jeho kurzu s matematicky nekorektním porozuměním pojmům matematické analýzy.

Cíl pomoci studentům vytvořit si hluboké porozumění pojmům nemusí být v rozporu se snahou pomoci jim pochopit zvláštní roli, kterou hrají definice v matematice. Vždyť např. matematické standardy NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) doporučují, aby „učitelé pomohli studentům pochopit, že některá slova, která se používají v každodenním jazyce, jako podobný, činitel, obsah nebo funkce, mají v matematice odlišný nebo přesnější význam. Tento poznatek je základem pochopení pojmu matematická definice" [13, s. 63]. Jinými slovy, standardy radí učitelům středoškolské matematiky, aby informovali studenty o potřebě dát si pozor na konotace, které s sebou slovo může nést kvůli svému neodbornému použití, a o potřebě odlišit neformální představy pojmů od jejich přesných definic.

Za povšimnutí také stojí běžná *metoda* tvorby definic, která je podle všeho spojena s odvozenými definicemi. Člověk definuje *pomocí příkladu* [15, s. 117–126], [10, s. 167–168], pokud něco ukazuje, například gestem, a říká „toto je …". Očekává, že pokud to bude dostatečněkrát opakovat, posluchač význam pochopí. Vzpomeňte si, že Heidi zřejmě věřila, že takto mohou být definovány faktorgrupy.

Protože hodně studentů matematiky bude matematiku na určité úrovni učit, měli by si uvědomovat nebezpečí definic pomocí příkladu. F. Prevost popisuje studenty druhého ročníku střední školy, kteří propadli z kurzu geometrie, a proto jej v létě opakovali. Píše: „Téměř všichni studenti uměli papouškovat definice, které se naučili v minulém roce. Jejich »pracovní definice« však byla »vypadá jako«. … My jako učitelé jsme vinni tím, že tuto definici »vypadá jako« ještě podporujeme. Obrázky, které kreslíme, jsou stereotypní a orientované tak, že spodní strana je rovnoběžná s dolním okrajem papíru nebo tabule" [14, s. 412]. Například čtverec, jehož strany nejsou rovnoběžné se stranami papíru, byl studenty považován za „snad kosočtverec, ale ne čtverec" [14, s. 411]. Řečeno terminologií tohoto článku, i když studenti znali konvenční definice geometrických útvarů, chovali se, jakoby tyto útvary byly definovány pomocí příkladu — opakovaně odkazovali na stereotypní příklady útvarů v určité orientaci. Ve smyslu van Hieleho úrovní zůstali na úrovni „rozeznání"[12]) a nepokročili

[12]) Pozn. překl. V orig. recognition.

na úroveň „analýzy“. (Van Hieleho úrovně jsou diskutovány v [4].) Není překvapivé, že F. Prevost spojuje neúspěch v kurzu s neschopností přesně identifikovat.

Určitě nevoláme po tom, aby se středoškolská matematika vyučovala systémem definice-věta-důkaz, v němž pracují a jehož si cení matematici. Říkáme jen, že vyučování zaměřené na konceptuální chápání je cenné, ale nemělo by být na úkor toho, že si studenti vybudují dobré porozumění povaze a použití matematických definic. Už předtím, než studenti začnou studovat kurzy, v nichž se objevuje hodně matematických důkazů, a dokonce ještě než začnou studovat vysokou školu, by se učitelé měli snažit zasít semínko rigoróznějšího přístupu k použití definic. Je zejména důležité, aby univerzitní studenti matematiky, kteří chtějí v budoucnu učit, získali ve svých kurzech zkušenosti, které jim umožní vybudovat si pevné porozumění roli a použití matematických definic.

6. Závěr

V článku jsme použili pojmy z výzkumu týkajícího se definic a kategorizovali jsme definice na odvozené (každodenní jazyk) nebo konvenční (matematika). Náš výzkum ukázal, že studenti matematiky na univerzitě toto rozlišení často plně nechápou a že tento fakt ovlivňuje jejich porozumění pojmům samotným. Sklon některých studentů matematické analýzy z původní studie B. Edwardsové spoléhat se na své představy pojmu spíše než na příslušnou definici pojmu, pokud byla představa a definice v rozporu, může být částečně vysvětlen tím, že některé z definic použitých ve studii byly definice pojmů, které studenti znali z předchozích matematických kurzů (například spojitost a nekonečné desetinné číslo). To však nebyl případ kurzu abstraktní algebry a přesto i zde někteří ze studentů dávali přednost představě pojmu před definicí pojmu.

Učinili jsme tedy závěr, že zvláštní povaha matematických definic by měla být více a explicitně zdůrazňována v matematických kurzech všech úrovní, ale zejména v těch z nich, kde se studenti seznamují s matematickými důkazy. Studenti by měli získat zkušenosti nejen s použitím matematických definic, *ale současně* s procesem definování. I když může být pravda, že mnozí studenti si nakonec roli matematických definic „dají dohromady“, zdá se, že bychom neměli tuto důležitou stránku povahy matematiky ponechávat náhodě.

7. Dodatek

Rozhovor 1 v rámci kurzu abstraktní algebry

První rozhovor začal otázkou B. Edwardsové „Co je matematika?“. Následné otázky směřovaly podle potřeby k tomu, aby každý student řekl něco o povaze a roli definic v matematice.

Po úvodní diskusi každý student dostal definici 1. Binární operace se v kurzu probíraly, ale definice grupy ještě nebyla podána.

Definice 1. Nechť je G neprázdná množina a $*$ je binární operace, která každé uspořádané dvojici prvků (a, b) množiny G přiřadí prvek množiny G, který označujeme jako $a * b$. Říkáme, že *G je grupa vzhledem k operaci $*$*, pokud platí tyto tři vlastnosti:

1. Operace je asociativní, tj. $(a * b) * c = a * (b * c)$ pro všechna a, b, c z G.
2. V G existuje prvek e (neutrální prvek) takový, že $a * e = e * a = a$ pro všechna a z G.
3. Ke každému prvku a z G existuje prvek b v G (inverzní prvek) takový, že $a * b = b * a = e$.

Po přečtení definice dostal každý student tři úlohy.

Množina: $\mathbf{R}$ (množina reálných čísel)
Binární operace: Obyčejné odčítání
Je množina $\mathbf{R}$ grupa vzhledem k odčítání?

Množina: $\mathbf{R}$ (množina reálných čísel)
Binární operace: Operace $\oplus$, kde $a \oplus b = a + b + 3$
Je množina $\mathbf{R}$ grupa vzhledem k operaci $\oplus$?

Množina: $\mathbf{R}$ (množina reálných čísel)
Binární operace: Obyčejné násobení
Je množina $\mathbf{R}$ grupa vzhledem k násobení?

Rozhovor 2 v rámci kurzu abstraktní algebry

Kromě první definice dostali studenti ve druhém rozhovoru tři další definice. Poslední dvě pro ně byly nové.

Definice 2. Nechť je K podgrupa grupy G a a je prvek G. Množina $\{ay : y \in K\}$ se nazývá levá faktorgrupa K v G. Je značena aK.

Definice 3. Nechť je K podgrupa grupy G. Definujme G/K jako množinu všech levých faktorgrup K v G. Jinými slovy, $G/K = \{aK : a \in G\}$.

Definice 4. Nechť je K podgrupa grupy G. Pro levé faktorgrupy bK a cK množiny K v G definujeme $(bK)(cK) = bcK$.

Každý student dostal následující úlohu, kterou měl řešit na základě definic: Grupa symetrií čtverce[13]) je značena jako D_4 a F značí osovou souměrnost podle jedné z úhlopříček.

Uvažujme podgrupu $\langle F \rangle$ grupy D_4 vzhledem k operaci skládání.

1. Najděte $D_4/\langle F \rangle$.
2. Je $D_4/\langle F \rangle$ grupa, pokud je $(b\langle F \rangle)(c\langle F \rangle)$ definováno definicí 4?

Poděkování. Autoři děkují za laskavou podporu nadaci National Science Foundation a Oregon Collaborative for Excellence in the Preparation of Teachers (DUE-9653250).

[13]) Pozn. překl. Podle naší terminologie grupa zákrytových pohybů čtverce.

L i t e r a t u r a

[1] *The American Heritage Dictionary of the English Language.* 4th ed. Houghton Mifflin, Boston, 2000.

[2] Asiala, M., Dubinsky, E., Mathews, D., Morics, S., Oktac, A.: *Student understanding of cosets, normality and quotient groups.* Journal of Mathematical Behavior *16* (1997), 241–309.

[3] Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Thomas, K.: *Learning binary operations, groups, and subgroups.* Journal of Mathematical Behavior *16* (1997), 187–289.

[4] Burger, W., Shaughnessy, J. M.: *Characterizing the van Hiele levels of development in geometry.* Journal of Research in Mathematical Education *16* (1986), 31–48.

[5] Edwards, B.: *Undergraduate mathematics majors' understanding and use of formal definitions in real analysis.* Unpublished doctoral dissertation, Pennsylvania State University 1997.

[6] Edwards, B.: *An undergraduate student's understanding and use of mathematical definitions in real analysis.* In: Proceedings of the Nineteenth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, vol. 1, ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics and Environmental Education, Columbus, OH, 1997, 17–22.

[7] Exner, G. R.: *An Accompaniment to Higher Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 1996.

[8] Harel, G., Sowder, L.: *Students' proof schemes: Results from exploratory studies.* In: Issues in Mathematics Education Vol. 7: Research in Collegiate Mathematics Education. III, A. H. Schoenfeld et al., eds., American Mathematical Society, Providence, 1998, 234–383.

[9] Henderson, D. W.: *Experiencing Geometry in Euclidean, Spherical and Hyperbolic Spaces.* 2nd ed. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ 2001.

[10] Landau, S. I.: *Dictionaries: The Art and Craft of Lexicography.* 2nd ed. Cambridge University Press, Cambridge 2001.

[11] Moore, R. C.: *Making the transition to formal proof.* Educational Studies in Mathematics *27* (1994), 249–266.

[12] Pereira-Mendoza, L.: *What is a quadrilateral?* Mathematics Teacher *86* (1993), 774–776.

[13] *Principles and Standards for School Mathematics.* The National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA 2000.

[14] Prevost, F. J.: *Geometry in the junior high school.* Mathematics Teacher *79* (1985), 411–417.

[15] Robinson, R.: *Definition.* Oxford University Press, London, 1954; reprinted by D. R. Hillman & Sons, Frome, U. K. 1962.

[16] Selden, A., Selden, J.: *Validations of proofs considered as texts: Can undergraduates tell whether an argument proves a theorem?* Journal of Research in Mathematical Education *34* (2003), 4–36.

[17] Solow, D.: *How To Read and Do Proofs: An Introduction to Mathematical Thought Processes.* 3rd ed. John Wiley & Sons, New York 2002.

[18] Stewart, I.: *Nature's Numbers: Discovering Order and Pattern in the Universe.* Weidenfeld & Nicholson, London 1995.

[19] Tall, D.: *The transition to advanced mathematical thinking: Functions, limits, infinity and proof.* In: *NCTM Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, D. A. Grouws, ed., Macmillan, New York 1992, 495–511.

[20] Velleman, D. J.: *How To Prove It: A Structured Approach.* Cambridge University Press, Cambridge 1994.

[21] Vinner, S.: *The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics.* In: *Advanced Mathematical Thinking*, D. Tall, ed., Kluwer, Dordrecht 1991, 65–81.