Jan Brandts; Sergej Korotov; Michal Křížek

O triangulacích bez tupých úhlů

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 50 (2005), No. 3, 193–207

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/141271

O triangulacích bez tupých úhlů

Jan Brandts, Amsterdam, Sergej Korotov, Helsinki, a Michal Křížek, Praha

1. Úvod

Hlavním cílem tohoto článku je podat přehled nejdůležitějších výsledků týkajících se netupoúhlých simplexů. Jejich speciálním případem jsou tzv. pravoúhlé simplexy, které jsou přirozeným zobecněním pravoúhlého trojúhelníka do vícerozměrného prostoru. Budeme se též zabývat triangulacemi tvořenými ostroúhlými či netupoúhlými simplexy, které se výborně hodí pro použití metody konečných prvků. Ukážeme, že netupoúhlé simplexy mají řadu zajímavých a důležitých aplikací také v algebře, matematické analýze, teorii grafů, při navrhování geodetických sítí aj. Nejprve si však připomeneme několik základních definic.

Simplexem v eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^d$ pro $d \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ nazveme konvexní obal $d + 1$ bodů, které neleží v jedné nadrovině a které se nazývají *vrcholy* simplexu. Speciálně pro $d = 2$ se simplex nazývá *trojúhelníkem* a pro $d = 3$ *čtyřstěnem.*

Proti každému vrcholu simplexu stojí právě jedna $(d-1)$-rozměrná stěna. Pro $d > 1$ se vnitřní úhel α mezi takovými dvěma libovolnými stěnami definuje pomocí skalárního součinu jejich vnějších jednotkových normál n_1 a n_2,

$$\cos\alpha = -n_1 \cdot n_2,$$

a nazývá se *dihedrální* (pro $d = 3$ *stěnový*). Pokud jsou všechny dihedrální úhly daného simplexu menší než 90°, resp. menší nebo rovny 90°, nazývá se takový simplex *ostroúhlý*, resp. *netupoúhlý.* Trojúhelník má 3 dihedrální úhly, čtyřstěn jich má 6 (u každé hrany jeden) a obecně simplex v $\mathbb{R}^d$ jich má $\binom{d+1}{2}$.

Triangulací[1]) (omezené či neomezené) neprázdné polytopické[2]) oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ nazveme množinu simplexů, jejichž sjednocení je $\overline{\Omega}$, libovolné dva simplexy mají

[1]) Triangulaci se v literatuře také někdy říká tetraedralizace, tetraedrizace, tetragonalizace, $3d$-triangulace či prostorová triangulace pro $d = 3$ a pro obecné d např. rozklad, dělení, síť, prostorová diskretizace, simpliciální dekompozice aj. My se pro jednoduchost budeme držet pouze termínu triangulace, pokud půjde o množinu simplexů ve smyslu uvedené definice.

[2]) *Polytopická oblast* Ω je oblast v $\mathbb{R}^d$, jejíž hranice $\partial\Omega$ je obsažena v konečném počtu nadrovin dimenze $d-1$. Pro $d = 2$, resp. $d = 3$ hovoříme o polygonální, resp. polyedrické oblasti. Uzávěr omezené polytopické oblasti se nazývá *polytop.*

Dr. Jan Brandts (1968), Korteweg-de Vries Institute, Faculty of Science, University of Amsterdam, Plantage Muidergracht 24, 1018 TV Amsterdam, Nizozemí, e-mail: `brandts@science.uva.nl`

Doc. Dr. Sergey Korotov (1968), Institute of Mathematics, Helsinki University of Technology, P. O. Box 1100, FIN–02015 Espoo, Finsko, e-mail: `korotov@mit.jyu.fi`

Prof. RNDr. Michal Křížek, DrSc. (1952), Matematický ústav Akademie věd ČR, Žitná 25, 115 67 Praha 1, e-mail: `krizek@math.cas.cz`

disjunktní vnitřky a libovolná $(d-1)$-rozměrná stěna libovolného simplexu z triangulace je zároveň $(d-1)$-rozměrnou stěnou jiného simplexu z triangulace, anebo je částí hranice $\partial\Omega$. Navíc budeme předpokládat, že množina vrcholů všech simplexů z triangulace je nejvýše spočetná a bez hromadných bodů v $\mathbb{R}^d$. Triangulace se nazývá *ostroúhlá*, resp. *netupoúhlá*, pokud všechny její simplexy jsou ostroúhlé, resp. netupoúhlé.

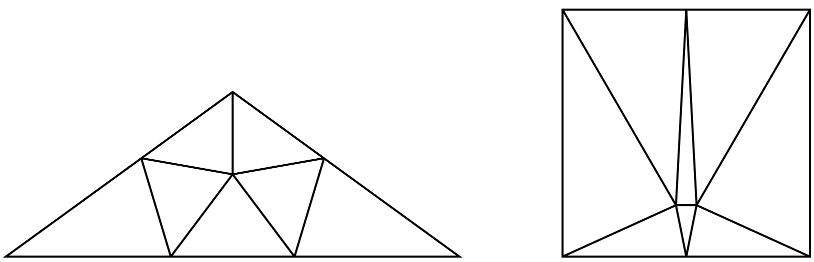
2. Ostroúhlé triangulace

Uveďme nejprve jednu důležitou charakteristickou vlastnost všech ostroúhlých simplexů (viz [15, s. 110]):

Věta. *Je-li simplex ostroúhlý, pak každá jeho m-rozměrná stěna je rovněž ostroúhlý simplex pro $m \in \{2, \dots, d-1\}$.*

Obrácená implikace ale neplatí. Například čtyřstěn o vrcholech $A = (-1, 0, 0)$, $B = (1, 0, 0)$, $C = (0, -1, \frac{1}{2})$ a $D = (0, 1, \frac{1}{2})$ má všechny stěny shodné ostroúhlé trojúhelníky, ale stěnové úhly u hran AB a CD jsou tupé.

Na obr. 1 vidíme rozdělení tupoúhlého trojúhelníka (viz [36]), resp. čtverce (viz [17]) na 7, resp. 8 ostroúhlých trojúhelníků. V roce 1964 Lindgren (viz [34]) dokázal, že tato čísla jsou optimální v tom smyslu, že je nelze snížit. Později Cassidy a Lord (viz [8]) ukázali, že pro libovolné $n \geqq 10$ existuje dělení čtverce na n ostroúhlých trojúhelníků a že pro $n = 9$ takové dělení neexistuje.

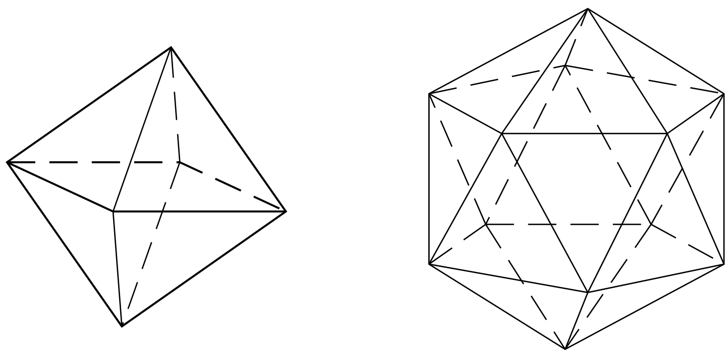


Obr. 1. Rozdělení tupoúhlého trojúhelníka a čtverce na ostroúhlé trojúhelníky.

Jak známo, celou rovinu lze pokrýt shodnými nepřekrývajícími se trojúhelníky libovolného tvaru (spec. tedy ostroúhlými). Rovněž ji lze pokrýt shodnými čtyřúhelníky libovolného tvaru (z nichž každý pak můžeme dále rozdělit na dva trojúhelníky). Tímto způsobem lze získávat „periodické“ ostroúhlé triangulace roviny. Dělením známých Penroseových kosočtverečných dlaždic (viz [39]) na dva trojúhelníky můžeme zase vytvářet „neperiodické“ ostroúhlé triangulace roviny s maximálním úhlem 72°. V článku [18] je předložen algoritmus, který umožňuje dělit speciální omezené polygonální oblasti na „téměř rovnostranné trojúhelníky“ s maximálním úhlem 72°.

Je zřejmé, že u ostroúhlých (srov. obr. 1), resp. netupoúhlých triangulací rovinných oblastí je každý vnitřní vrchol obklopen alespoň pěti, resp. čtyřmi trojúhelníky. V $\mathbb{R}^3$

je poměr[3]) mezi těmito dvěma čísly mnohem větší, a sice 20 : 8. V [31, s. 165] totiž je dokázáno, že u ostroúhlé, resp. netupoúhlé triangulace je každý vnitřní vrchol obklopen alespoň dvaceti, resp. osmi čtyřstěny. K tomu, abychom se přesvědčili, že těchto čísel lze skutečně dosáhnout, stačí rozdělit pravidelný dvacetistěn, resp. osmistěn (viz obr. 2) na 20 ostroúhlých, resp. 8 netupoúhlých čtyřstěnů, jejichž společným vrcholem je těžiště příslušného mnohostěnu.



Obr. 2. Pravidelný osmistěn a dvacetistěn.

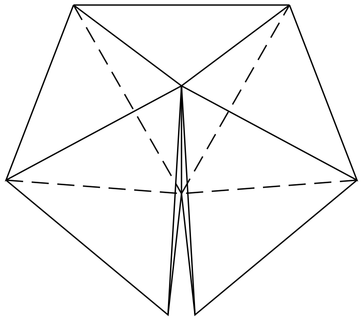
Generování ostroúhlých triangulací v $\mathbb{R}^3$ je mnohem obtížnější než v $\mathbb{R}^2$. Dodnes například není známo, zda lze rozdělit krychli na ostroúhlé čtyřstěny. Aristoteles inspirován myšlenkami svého učitele Platóna se ve svém díle *O nebi* (350 let př. n. l.) mylně domníval, že prostor lze bez mezer vyplnit pravidelnými čtyřstěny stejné velikosti (viz [1, sv. 3, kap. 8]), což by vyžadovalo, aby úhel mezi dvěma stěnami pravidelného čtyřstěnu byl 72°. Protože Aristoteles byl uznávanou osobností, o jeho tvrzení nikdo nepochyboval. Až ve středověku se zjistilo[4]), že se mýlil (viz obr. 3). Stěnové úhly pravidelného čtyřstěnu jsou totiž rovny $\arccos\frac{1}{3}$, což zaokrouhleno na celé stupně je 71°.

Dlouho se matematici pokoušeli najít metodu, která by umožňovala rozdělit $\mathbb{R}^3$ alespoň na ostroúhlé čtyřstěny. Teprve v roce 2004 Eppstein, Sullivan a Üngör [11] publikovali následující větu.

Věta. *Existuje ostroúhlá triangulace prostoru* $\mathbb{R}^3$*.*

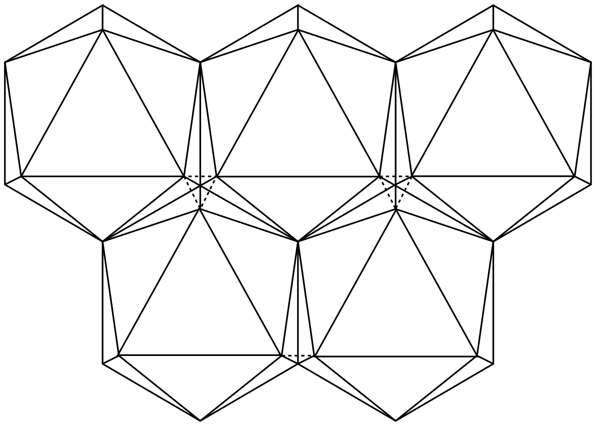
[3]) Pro $d = 4$ je tento poměr dokonce 600 : 16. Ve čtyřrozměrném prostoru existují pravidelný šestisetstěn a šestnáctistěn (viz [41], [42]). Jejich trojrozměrné povrchy jsou tvořeny pravidelnými čtyřstěny, jejichž konvexní obaly se středem G příslušného mnohostěnu tvoří 600 ostroúhlých, resp. 16 netupoúhlých čtyřrozměrných simplexů „obklopujících“ G. Pravidelné polytopy v $\mathbb{R}^4$ objevil Ludwig Schläfli (1814–1895) kolem roku 1852.

[4]) Např. Averroes (1126–1198) odvodil (viz [43], s. 127), že hrana pravidelného dvacetistěnu (viz obr. 2) vepsaného do koule o poloměru 1 měří $\frac{1}{5}\sqrt{10(5-\sqrt{5})} \doteq 1{,}05$ a nerovná se tedy 1, jak by plynulo z Aristotelovy domněnky.



Obr. 3. Shodnými pravidelnými čtyřstěny nelze vyplnit prostor. K dané stěně pravidelného čtyřstěnu lze totiž „napojit“ celou stěnou stejně velký pravidelný čtyřstěn právě jedním způsobem. Pokud takto „obtočíme“ 5 pravidelných čtyřstěnů kolem jedné společné hrany, objeví se malá mezera, neboť všechny jejich stěnové úhly jsou přibližně 71°.

Jeden z prvních konstruktivních důkazů této věty poprvé nastínil třetí spoluautor, turecký matematik Alper Üngör, již ve své doktorské dizertaci. Jeho základní myšlenka se opírá o již zmíněný fakt, že pravidelný dvacetistěn (viz obr. 3) lze rozdělit na 20 ostroúhlých čtyřstěnů, jejichž společným vrcholem je těžiště dvacetistěnu. Üngör si povšiml, že projekce pravidelného dvacetistěnu, který stojí na jedné své stěně, je pravidelný šestiúhelník a těmi lze vyplnit rovinu (srov. obr. 4). Stejně velké pravidelné dvacetistěny tedy umístil do prostorové mříže tak, že dva sousední se dotýkají právě jednou celou hranou (nikoliv stěnou!). Zbylé mezery vyplnil jinými čtyřmi typy ostroúhlých čtyřstěnů (viz obr. 4). Zřejmě existuje nekonečně mnoho různých ostroúhlých triangulací $\mathbb{R}^3$, neboť malou změnou polohy jednoho vrcholu se ostroúhlost nezmění.



Obr. 4. Konstrukce ostroúhlé triangulace v $\mathbb{R}^3$ pomocí pravidelných dvacetistěnů.

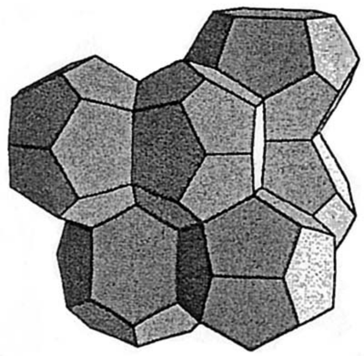
Článek [11] ale uvádí další 4 algoritmy pro generování ostroúhlých triangulací prostoru $\mathbb{R}^3$, které vycházejí z poloh atomů ve speciálních krystalech (např. některých zeolitech[5])). Tyto chemické struktury byly studovány již v roce 1958 (viz [12]), ale téměř

[5]) Tyto nerosty s tlakem zvyšují objem v důsledku speciálního hustého uspořádání atomů.

půl století si nikdo nepovšiml, že je lze využít ke konstrukci ostroúhlých triangulací. Základní myšlenka je tato: Středy jednotlivých atomů označme A_1, A_2, … Pro každé $i \in \{1, 2, \ldots\}$ definujme odpovídající *Voronoiovy buňky*[6]) standardním způsobem (viz obr. 5):

$$V_i = \{x \in \mathbb{R}^d\colon \|x - A_i\| \leqq \|x - A_j\| \text{ pro všechna } j = 1, 2, \ldots\},$$

kde $\|\cdot\|$ je eukleidovská norma. Množina V_i tak obsahuje všechny body $x \in \mathbb{R}^d$, jejichž vzdálenost od A_i je menší nebo rovna vzdálenostem od všech ostatních bodů A_j. Pak lze ukázat, že příslušná duální Delaunayova triangulace (její definici uvádíme níže) je hledanou ostroúhlou triangulací, přičemž množina vrcholů čtyřstěnů je právě množina $\{A_1, A_2, \ldots\}$ a každá hrana je obklopena pěti nebo šesti čtyřstěny.



Obr. 5. Voronoiovy buňky v $\mathbb{R}^3$ odpovídající atomům speciálních chemických sloučenin.

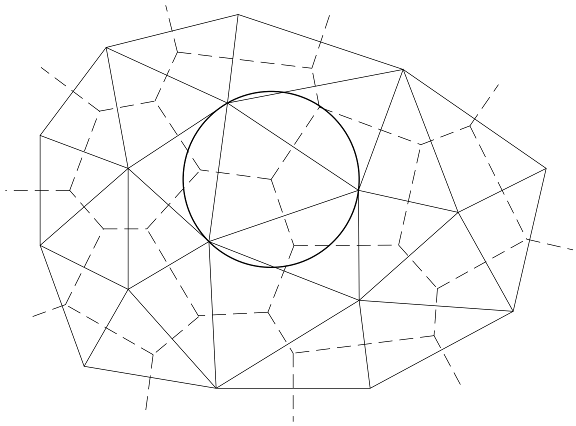
Definice. Nechť $D \subset \mathbb{R}^d$ je množina všech vrcholů simplexů dané triangulace. Jestliže vnitřky koulí opsaných každému simplexu z triangulace neobsahují body z D (srov. obr. 6), pak se taková triangulace nazývá *Delaunayova.*

Ve stěžejní práci B. N. Delaunayho[7]) *Sur la sphère vide* (viz [10]) je ukázáno, že pro n bodů, které neleží v jedné nadrovině, taková specifická triangulace vždy existuje. Pokud navíc žádných $d + 2$ bodů z D neleží na povrchu d-rozměrné koule, je Delaunayova triangulace určena jednoznačně. Jiné ekvivalentní, leč konstruktivní definice Delaunayovy triangulace jsou např. v [37], [38], [44].

Je pozoruhodné, že jeden ze 4 zmíněných algoritmů vycházejících z krystalové mříže speciálních chemických sloučenin (zeolitů) dává maximální stěnový úhel jen 74,2° (viz [11]). Člověk se tak opět poučil od přírody. Zatím není jasné, zda lze tento maximální úhel v ostroúhlých triangulacích $\mathbb{R}^3$ ještě zmenšit. Jeho hodnota zřejmě nemůže klesnout pod hranici 72°. Platí totiž následující věta, která má dva zajímavé důsledky (viz [29]).

[6]) Voronoiovy buňky jsou konvexní mnohostěny (polytopy) v $\mathbb{R}^d$. Jejich vlastnostmi se zabýval ruský matematik Georgij Voronoi (1868–1908) např. v práci [48]. Již dříve je ale definoval P. G. L. Dirichlet (1805–1859).

[7]) Boris Nikolajevič Delone (1890–1980) byl význačný ruský geometr a algebraik. Jeho francouzsky znějící příjmení se všeobecně v zahraniční literatuře přepisuje Delaunay.



Obr. 6. Voronoiovy buňky v $\mathbb{R}^2$ jsou znázorněny čárkovaně. Jim odpovídá duální Delaunayova triangulace, jejíž vrcholy nejsou obsaženy uvnitř žádné kružnice opsané jednotlivým trojúhelníkům. Tato triangulace maximalizuje minimální úhel trojúhelníků mezi všemi triangulacemi se stejnými vrcholy pro $d = 2$.

Věta. *V každé triangulaci $\mathbb{R}^3$ existuje hrana, která je obklopena alespoň šesti čtyřstěny, a hrana, která je obklopena nejvýše pěti čtyřstěny.*

Důsledek 1. *Pro libovolné přirozené číslo m neexistuje triangulace $\mathbb{R}^3$ taková, že by každá hrana byla obklopena právě m čtyřstěny.*

Důsledek 2. *V každé triangulaci $\mathbb{R}^3$ existuje stěnový úhel menší nebo rovný $60°$ a stěnový úhel větší nebo rovný $72°$.*

Odtud je mj. také okamžitě vidět, proč Aristotelovo tvrzení neplatí. V článku [11] je popsán algoritmus, který umožňuje rozdělit nekonečnou vrstvu (desku) o konstantní tloušťce na ostroúhlé čtyřstěny s maximálním stěnovým úhlem 87,7°. Dělení libovolného mnohostěnu na ostroúhlé čtyřstěny je však stále otevřený problém. Rovněž není známo, jak tyto triangulace zjemňovat tak, aby všechny stěnové úhly zůstaly ostré. Hlavní potíží je to, že nelze užít bisekce přímého úhlu 180°, protože pak by alespoň jeden ze vzniklých úhlů nebyl ostrý.

Na závěr této kapitoly ještě poznamenejme, že dihedrální úhel pravidelného simplexu v $\mathbb{R}^d$ je

$$\alpha(d) = \arccos \frac{1}{d} < 90°.$$

Pro $d \geqq 4$ je tento úhel větší než $72°$, neboť posloupnost $\{\alpha(d)\}_{d=2}^{\infty}$ je rostoucí a $\alpha(4) \approx 76°$. Platí tedy $k\alpha(d) \neq 360°$ pro libovolné přirozené k a $d > 2$. Vícerozměrné eukleidovské prostory tedy také nelze vyplnit shodnými pravidelnými simplexy. Platí ale mnohem překvapivější tvrzení.

Věta. *Pro $d > 4$ neexistuje ostroúhlá triangulace prostoru $\mathbb{R}^d$.*

Důkaz lze provést indukcí podle d (viz [30]). My si jej naznačíme jen pro $d = 5$. Předpokládejme naopak, že taková ostroúhlá triangulace existuje, a uvažujme libovolný vrchol A. Položme

$$P = \bigcup_{i=1}^{s} S_i,$$

kde $S_1, \dots, S_s$ jsou všechny simplexy z triangulace obsahující A. Lze ukázat, že P je konvexní polytop, jehož čtyřrozměrný povrch je tvořen ostroúhlými simplexy. Platí tedy známá Eulerova-Poincaréova formule [35]

$$v + t + s = h + c + 2,$$

kde v, h, t, c a s postupně označují počet vrcholů, hran, trojúhelníků, čtyřstěnů a čtyřrozměrných simplexů z hranice ∂P. Protože hranice čtyřrozměrného simplexu je tvořena 5 čtyřstěny a každý čtyřstěn z ∂P patří právě do dvou sousedních čtyřrozměrných simplexů, platí[8])

$$2c = 5s.$$

Eulerovu-Poincaréovu formulku lze tedy zredukovat na tvar

$$5v + 5t = 5h + 3c + 10. \tag{1}$$

Tím jsme získali vztah, kde vystupují jen počty nejvýše trojrozměrných simplexů. Protože S_i jsou ostroúhlé, je každá trojúhelníková stěna z ∂P sdílena alespoň 5 čtyřstěny z ∂P, tj.[9])

$$5t \leqq 4c. \tag{2}$$

Není těžké ukázat, že součet všech stěnových úhlů v libovolném čtyřstěnu je větší než 360°. Navíc z konvexity P plyne, že součet stěnových úhlů čtyřstěnů kolem libovolné hrany z ∂P je nejvýše 360°. Odtud dostáváme horní a dolní odhad pro součet Σ všech stěnových úhlů všech čtyřstěnů z ∂P, tj.

$$360^\circ c < \Sigma \leqq 360^\circ h. \tag{3}$$

Protože každý čtyřstěn má 4 vrcholy a každý vrchol je obklopen alespoň 5 čtyřstěny, platí[10]) $5v \leqq 4c$. Odtud, z (2), (1) a (3) dostáváme, že

$$8c < 5h + 3c + 10 = 5v + 5t \leqq 8c,$$

což je spor. $\square$

V pětirozměrném prostoru tedy nemůže být bod obklopen jen ostroúhlými simplexy. Naproti tomu ve čtyřrozměrném prostoru může být daný bod obklopen nejméně 600 ostroúhlými simplexy (viz poznámku pod čarou [3])). Pro $d = 4$ tedy nelze použít předchozí argumentaci založenou na lokálních vlastnostech triangulací.

---

[8]) Pro $d = 2, 3, 4$ mají podobné rovnosti postupně tvar $2v = 2h$, $2h = 3t$ a $2t = 4c$. Zde záměrně nekrátíme dvěma, aby bylo patrné, že se daný vztah týká dvou sousedních simplexů, které mají společnou právě jednu celou $(d-2)$-rozměrnou stěnu.

[9]) Pro $d = 2, 3, 4$ mají podobné nerovnosti postupně tvar $5 \leqq v$, $5v \leqq 2h$ a $5h \leqq 3t$.

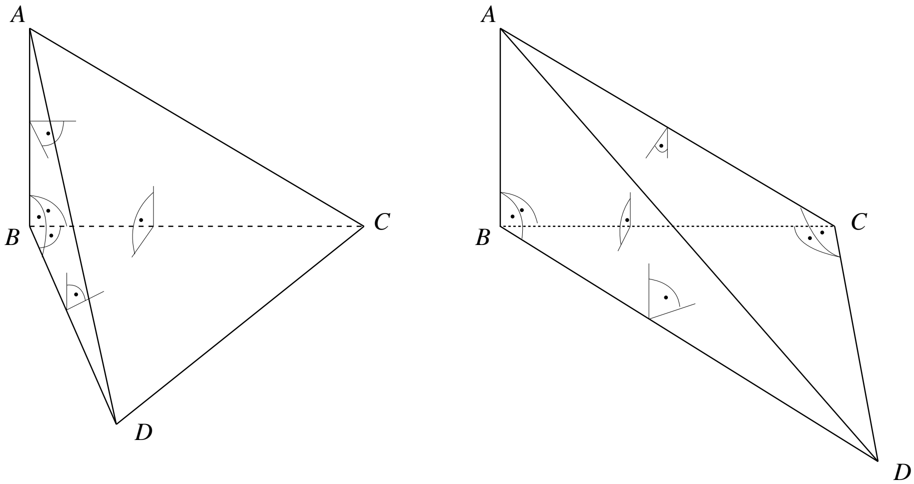
[10]) Tento odhad je ve skutečnosti velmi pesimistický. Pro netupoúhlé triangulace můžeme podobně jako v [31, s. 168] odvodit, že libovolný vrchol z ∂P je obklopen alespoň 16 čtyřrozměrnými simplexy a alespoň 32 čtyřstěny, tj. $8c \geqq v$. Pro ostroúhlé triangulace lze tento odhad ještě zlepšit.

Domněnka. *Neexistuje ostroúhlá triangulace prostoru* $\mathbb{R}^4$.

3. Pravoúhlé simplexy a netupoúhlé triangulace

Nejprve uveďme definice dvou pojmů, které v české matematické literatuře ještě nemají ustálené názvy.[11])

Definice. *Ortosimplexem* v $\mathbb{R}^d$ nazveme jakýkoliv simplex, který má d vzájemně ortogonálních hran. *Pravoúhlým simplexem* v $\mathbb{R}^d$ nazveme každý ortosimplex, jehož d ortogonálních hran tvoří cestu (ve smyslu teorie grafů); speciálně pro $d = 3$ budeme hovořit o *pravoúhlém čtyřstěnu.*



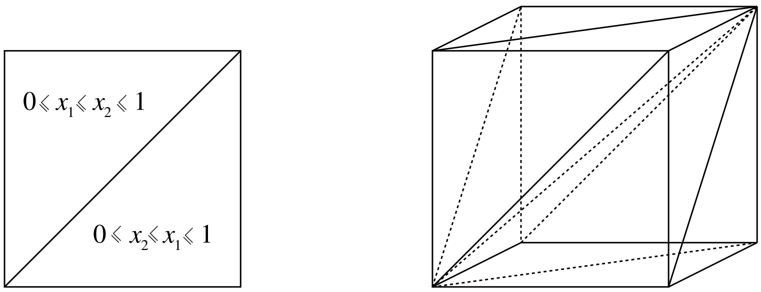
Obr. 7. Dva základní typy ortosimplexů v $\mathbb{R}^3$. Pravý z nich je pravoúhlý čtyřstěn, jehož 3 vzájemně ortogonální hrany AB, BC a CD tvoří cestu. Všechny jeho stěny jsou pravoúhlé trojúhelníky.

Příklady. Ortosimplexem a zároveň pravoúhlým simplexem v $\mathbb{R}^2$ je pravoúhlý trojúhelník. Na obr. 7 vidíme dva odlišné typy ortosimplexů v $\mathbb{R}^3$. První má tři vzájemně kolmé hrany, které sdílejí společný bod B. Tři stěny tohoto čtyřstěnu jsou pravoúhlé trojúhelníky a čtvrtá stěna je ostroúhlý trojúhelník. Druhý typ ortosimplexu (na obr. 7 vpravo) má všechny stěny pravoúhlé trojúhelníky. Vidíme, že jeho 3 ortogonální hrany tvoří cestu. Proto je to pravoúhlý čtyřstěn.

Indukcí lze dokázat (viz např. [3], [6], [15], [26]) platnost následujících vět (srov. obr. 7).

---

[11]) Ani v anglické literatuře není pojmenování těchto objektů zdaleka jednotné. Například L. Schläfli v [41] nazývá ortosimplex *d-orthoscheme*, Lobačevskij *pyramidou* pro $d = 3$, Wythoff *double-rectangular* pro $d = 3$, Schoute *polygonometry* v $\mathbb{R}^d$, v numerické matematice (v kontextu generování triangulací) se pravoúhlý simplex nazývá většinou *path simplex* v $\mathbb{R}^d$ (viz [11]).



Obr. 8. Dělení čtverce, resp. krychle na 2, resp. 6 pravoúhlých simplexů.

Věta. *Každý ortosimplex je netupoúhlý.*

Věta. *Je-li simplex netupoúhlý, pak každá jeho m-rozměrná stěna je rovněž netupoúhlý simplex pro $m \in \{2, \dots, d-1\}$.*

Věta. *Je-li simplex pravoúhlý, pak každá jeho m-rozměrná stěna je rovněž pravoúhlý simplex pro $m \in \{2, \dots, d-1\}$.*

Na ukázku uveďme několik dalších zajímavých výsledků. Snadno nahlédneme, že levý čtyřstěn z obr. 7 neobsahuje střed koule jemu opsané.[12]) Naproti tomu střed koule opsané pravému čtyřstěnu leží na úsečce AD. V $\mathbb{R}^d$ platí obecná věta (viz [3, s. 194]):

Věta. *Ortosimplex obsahuje střed opsané koule právě tehdy, když je pravoúhlým simplexem.*

V roce 1994 Rajan dokázal (viz [40, s. 200]) jiné pozoruhodné tvrzení.

Věta. *Jestliže každý simplex dané triangulace v $\mathbb{R}^d$ obsahuje střed koule jemu opsané, pak je tato triangulace Delaunayova.*

Speciálně je tedy každá netupoúhlá triangulace v rovině Delaunayova (srov. obr. 6). Obrácená implikace ale neplatí! Tj. existuje Delaunayova triangulace obsahující tupé úhly. Kombinace předchozích dvou vět má následující elegantní důsledek.

Důsledek. *Triangulace na pravoúhlé simplexy je Delaunayova triangulace.*

Další zajímavou větu dokázal Freudenthal ve své práci [16] z roku 1942.

Věta. *Jednotkovou d-rozměrnou krychli $[0,1]^d$ lze rozdělit na $d!$ pravoúhlých simplexů.*

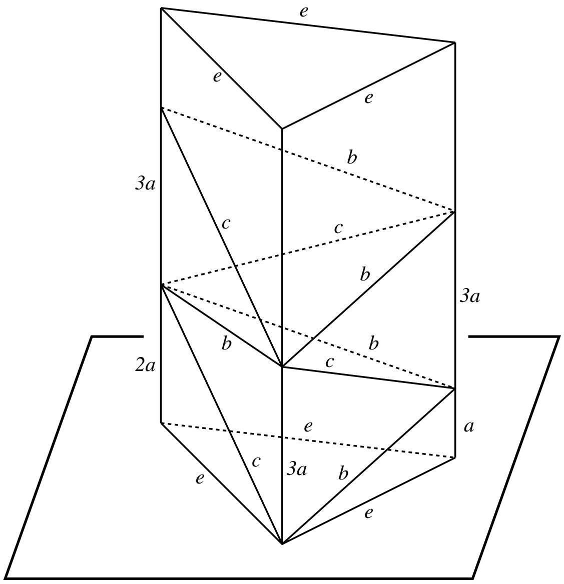
Hlavní myšlenka důkazu je založena na následující konstrukci. Označíme Σ^d symetrickou grupu všech $d!$ permutací čísel $1, 2, \dots, d$. Pak pravoúhlé simplexy z předchozí věty lze definovat takto (viz obr. 8 pro $d = 2, 3$):

$$S_\sigma = \{x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \colon 0 \leqq x_{\sigma(1)} \leqq \dots \leqq x_{\sigma(d)} \leqq 1\},$$

kde $\sigma \in \Sigma^d$.

[12]) Vztah pro výpočet poloměru koule opsané libovolnému simplexu v $\mathbb{R}^d$ je odvozen např. v [13].

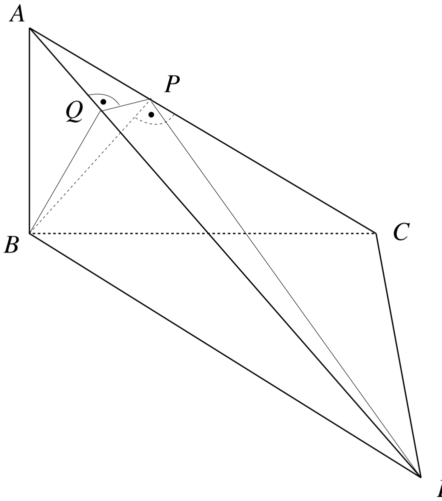
Prostor $\mathbb{R}^d$ lze tedy snadno rozdělit na pravoúhlé simplexy. K tomu stačí jej nejprve rozdělit na d-rozměrné krychle a použít předchozí větu. Poznamenejme ještě, že Freudenthalovo dělení se též nazývá Kuhnova triangulace podle zásadního článku [32]. Jinou vtipnou myšlenku publikoval Michael Goldberg v práci [19]. Rozdělil prostor $\mathbb{R}^3$ na nekonečné trojboké hranoly, jejichž průřez je rovnostranný trojúhelník. Pak každý hranol rozdělil na shodné simplexy (viz obr. 9), které mohou být zvoleny netupoúhlé. Pokud dělení každého trojbokého hranolu je zrcadlovým obrazem dělení sousedního hranolu, dostaneme netupoúhlou triangulaci trojrozměrného prostoru ve smyslu definice z kap. 1. Speciální vykrývací čtyřstěn, jehož shodnými kopiemi lze vyplnit celý prostor, našel již v roce 1923 Sommerville (viz [19]). Tento čtyřstěn má dvě protilehlé hrany[13]) délky 2 a ostatní hrany mají délku $\sqrt{3}$. Lze jej snadno rozdělit na čtyři pravoúhlé čtyřstěny.



Obr. 9. Goldbergovo dělení pravidelného nekonečného trojbokého hranolu na shodné čtyřstěny. Pokud $\sqrt{2}\,b \geqq c$, žádný stěnový úhel nepřesahuje 90° (viz [19, s. 353]).

Poznamenejme, že každý pravoúhlý simplex v $\mathbb{R}^d$ lze dále dělit na menší pravoúhlé simplexy. Je-li $d = 2$, pak každý pravoúhlý trojúhelník lze výškou na přeponu zřejmě rozdělit na dva menší pravoúhlé trojúhelníky. Dělení pravoúhlého čtyřstěnu na 3 menší pravoúhlé čtyřstěny (viz obr. 10) popsal Coxeter [9] v roce 1989. V článku [6] předkládáme algoritmus, kterým lze každý pravoúhlý simplex v $\mathbb{R}^d$ rozdělit na d menších pravoúhlých simplexů. Geometrická interpretace tohoto algoritmu připomíná známý Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces aplikovaný na d lineárně nezávislých vektorů.

[13]) Stěnové úhly u dvou delších hran jsou pravé, zatímco u ostatních čtyř hran jsou rovny 60°.

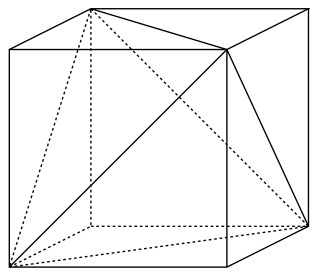


Obr. 10. Coxeterova trisekce pravoúhlého čtyřstěnu $ABCD$ na menší pravoúhlé čtyřstěny. Bod P, resp. Q je ortogonální projekcí bodu B, resp. P na úsečku AC, resp. AD.

Podle předchozí Freudenthalovy věty lze d-rozměrnou krychli rozdělit na $d!$ pravoúhlých simplexů (srov. obr. 8). Nejmenší počet simplexů, na něž je možné rozdělit d-rozměrnou krychli, je ale dán čísly (viz [5], [22]):

$$1,\ 2,\ 5,\ 16,\ 67,\ 308,\ 1493,\ \ldots$$

Čtyřrozměrnou krychli lze tedy rozdělit na 16 simplexů a tento počet nelze snížit (viz [21], [50]). Na obr. 11 vidíme dělení krychle na 5 čtyřstěnů. Jeden z nich je pravidelný čtyřstěn. Ostatní 4 jsou ortosimplexy, které ale nejsou pravoúhlými čtyřstěny, neboť neobsahují střed koule jim opsané. Ten leží uprostřed krychle a je společný všem pěti čtyřstěnům.



Obr. 11. Dělení krychle na 5 čtyřstěnů.

V roce 1957 Hugo Hadwiger [20] vyslovil následující domněnku:

Domněnka. *Každý simplex v $\mathbb{R}^d$ lze rozdělit na konečný počet pravoúhlých simplexů.*

Její platnost je prověřena jen pro „malá“ d. Je-li $d = 2$, pak každý trojúhelník lze zřejmě rozdělit na 2 pravoúhlé trojúhelníky pomocí výšky k nejdelší straně.

V roce 1960 pro $d = 3$ Lenhardt [33] popsal, jak lze každý čtyřstěn rozdělit na nejvýše 12 pravoúhlých čtyřstěnů.

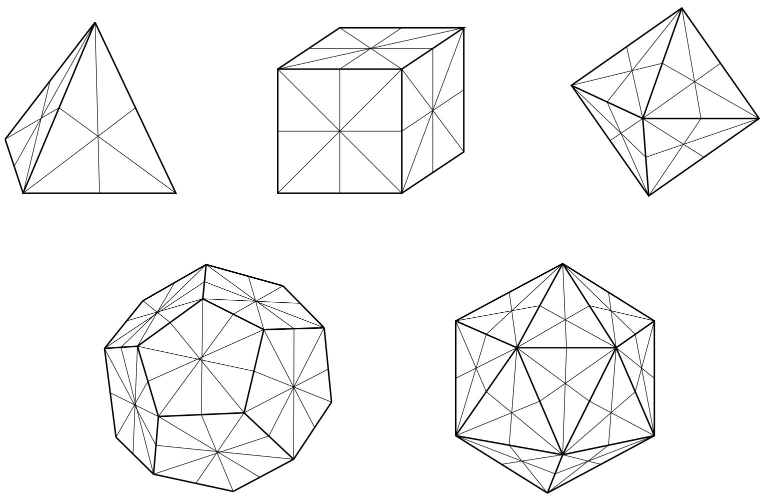
Případ $d = 4$ se podařilo rozřešit až v roce 1982, kdy A. B. Charsischwili rozdělil obecný čtyřrozměrný simplex na nejvýše 730 pravoúhlých simplexů (viz [23]). Tento vysoký počet v roce 1986 snížil H. Kaiser na 610 pravoúhlých simplexů (viz [24]) a v roce 1993 paní Katrin Tschirpke na 500 pravoúhlých simplexů (viz [45]). Dodnes ale není znám jejich obecně nejmenší možný počet.

K. Tschirpke se rovněž zabývala případem $d = 5$. V práci [47] (opírající se o její dizertaci [46]) ukázala, že je zapotřebí nejvýše 12 598 800 pravoúhlých simplexů.

4. Aplikace

S ostroúhlými a netupoúhlými simplexy se setkáváme v řadě oborů:

I. Algebra. Uvažujme grupy symetrií platonských těles a jejich generátory. Např. pro krychli existují 4 generátory. Odpovídající roviny symetrie definují pravoúhlý čtyřstěn, který se nazývá fundamentální oblast. Podobně jsou všechna platonská tělesa rozdělena svými rovinami symetrie na pravoúhlé čtyřstěny (viz obr. 12).



Obr. 12. Dělení platonských těles na pravoúhlé čtyřstěny.

II. Matematická analýza. Ortosimplexy mohou sloužit jako prostředek k výpočtu některých určitých integrálů. Např. pomocí trisekce pravoúhlého čtyřstěnu (viz obr. 10) na 3 menší pravoúhlé čtyřstěny Coxeter dokázal [9], že

$$\int_1^6 \frac{\sec^{-1} x}{(x+2)\sqrt{x+1}} \left(\frac{1}{\sqrt{x+3}} + 2\right) \mathrm{d}x = \frac{2}{15}\,\pi^2.$$

Na pravoúhlých simplexech lze také názorně ilustrovat platnost známé Parsevalovy rovnosti (zobecnění Pythagorovy věty). Speciálně pro pravý čtyřstěn z obr. 7 má tato rovnost tvar

$$|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 = |AD|^2.$$

III. Diskrétní geometrie. Velké množství geometrických aplikací netupoúhlých simplexů (zejména pravoúhlých čtyřstěnů) lze najít v *Geometry Junkyard* na adrese [51].

IV. Teorie grafů. V nedávno publikované Fiedlerově knize [15, kap. 14] je ukázáno, jak lze netupoúhlé simplexy používat ke zjišťování struktury elektrických obvodů. Uvádí se věta opírající se o práci [14], která dává odpověď na otázku, jaké jsou všechny možné elektrické soustavy složené výhradně z odporů uvnitř „černé skříňky“, která má $n \in \{2, 3, \ldots\}$ vývodů (přičemž se předpokládá, že vývody jsou uvnitř úplně propojené přes různě rozmístěné odpory).

V. Numerická matematika. S velkým množstvím aplikací netupoúhlých triangulací se setkáváme v numerické matematice. Protože takové triangulace mají všechny dihedrální úhly menší nebo rovné 90°, má podle teorie metody konečných prvků Lagrangeův či Hermiteův interpolační operátor optimální řád aproximace. Navíc standardní referenční simplex je ortosimplex. Netupoúhlé, resp. ostroúhlé triangulace umožňují také splnit tzv. diskrétní princip maxima při řešení Poissonovy rovnice, polovodičových rovnic [50], resp. rovnice konvekce-difuze pomocí lineárních konečných prvků. Příslušná matice tuhosti[14]) A je totiž monotónní (tj. A^{-1} existuje a $A^{-1} \geqq 0$). S takovými úlohami pro $d > 3$ se setkáváme také ve finanční matematice či teoretické fyzice. V článku [27] se rekurzívně používá Coxeterova trisekce z obr. 10 pro konstrukci lokálních zjemňování triangulací v blízkosti rohů oblasti pomocí pravoúhlých čtyřstěnů. Kuhnova triangulace je vhodná pro předpodmiňování rozsáhlých úloh více sítí (viz [2], [4]). V práci [7] se také používá pro získání superkonvergence gradientů lineárních konečných prvků.

VI. Geodézie. Čím více se tvar trojúhelníků užívaných v geodetických sítích blíží rovnostranným trojúhelníkům, tím přesněji lze pomocí měření délek stran (a úhlů) stanovit souřadnice jednotlivých triangulačních bodů.

Netupoúhlé simplexy se také používají v matematické genetice [25, s. 67], v metodě Monte Carlo pro řešení parciálních diferenciálních rovnic [49, s. 210] aj.

Poděkování. Práce byla podpořena grantem č. 201/04/1503 GA ČR a Academy Research Fellowship No. 208 628 of the Academy of Finland. Autoři děkují Mgr. Ing. Jakubu Šolcovi za podnětné připomínky a Ing. Pavlu Křížkovi za zhotovení obrázků.

L i t e r a t u r a

[1] Aristote: *Du ciel.* Text établi et traduit par Paul Moraux, Les Belles Lettres, Paris 1965.

[14]) Znaménko prvků matice tuhosti závisí (viz [28]) na kosinech jednotlivých dihedrálních úhlů v triangulaci.

[2] Axelsson, O., Blaheta, R.: *Two simple derivations of universal bounds for the C. B. S. inequality constant.* Appl. Math. *49* (2004), 57–72.

[3] Bern, M., Chew, P., Eppstein, D., Ruppert, J.: *Dihedral bounds for mesh generation in high dimensions.* Proc. 6th AMC-SIAM Sympos. on Discrete Algorithms 1995, 189 až 196.

[4] Blaheta, R.: *Nested tetrahedral grids and strengthened CBS inequality.* Numer. Linear Alg. Appl. *10* (2003), 619–637.

[5] Bliss, A., Su, F. E.: *Lower bounds for simplicial covers and triangulations of cubes.* Discrete Comput. Geom. *33* (2005), 669–686.

[6] Brandts, J., Korotov, S., Křížek, M.: *On the right triangle and its higher dimensional generalizations.* Nieuwe Wiskrant *24e* (2004), No. 2, 12–16.

[7] Brandts, J., Křížek, M.: *Gradient superconvergence on uniform simplicial partitions of polytopes.* IMA J. Numer. Anal. *23* (2003), 489–505.

[8] Cassidy, C., Lord, G.: *A square acutely triangulated.* J. Recreational Math. *13* (1980), 263–268.

[9] Coxeter, H. S. M.: *Trisecting an orthoscheme.* Computers Math. Applic. *17* (1989), 59–71.

[10] Delaunay, B.: *Sur la sphère vide.* Izd. Akad. Nauk SSSR, Otdel. Mat. Estestv. Nauk *7* (1934), 793–800.

[11] Eppstein, D., Sullivan, J. M., Üngör, A.: *Tiling space and slabs with acute tetrahedra.* Comput. Geom. *27* (2004), 237–255.

[12] Frank, F. C., Kasper, J. S.: *Complex alloy structures regarded as sphere packings, Parts I and II.* Acta Crystall. *11* (1958), 184–190; *12* (1959), 483–499.

[13] Fiedler, M.: *Geometrie simplexu v E_n.* Časopis Pěst. Mat. *XII* (1954), 297–320.

[14] Fiedler, M.: *Aggregation in graphs.* Coll. Math. Soc. J. Bolyai *18* (1976), 315–330.

[15] Fiedler, M.: *Matice a grafy v euklidovské geometrii.* DIMATIA MFF UK, Praha 2001.

[16] Freudenthal, H.: *Simplizialzerlegungen von beschränkter Flachheit.* Ann. Math. Sci. Engrg. *43* (1942), 580–582.

[17] Gardner, M.: *Mathematical games.* Scient. Amer. *202* (1960), 172–186.

[18] Gerver, J. L.: *The dissection of a polygon into nearly equilateral triangles.* Geom. Dedicata *16* (1984), 93–106.

[19] Goldberg, M.: *Three infinite families of tetrahedral space-fillers.* J. Comb. Theory (A) *16* (1974), 348–354.

[20] Hadwiger, H.: *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie.* Die Grundlehren der Math. Wissenschaften 93. Springer-Verlag, Berlin 1957.

[21] Haiman, M.: *A simple and relatively efficient triangulation of the N-cube.* Discrete Comput. Geom. *6* (1991), 287–289.

[22] Hughes, R. B., Anderson, M. R.: *Simplexity of the cube.* Discrete Math. *158* (1996), 99–150.

[23] Charsischwili, A. B.: *Orthogonale Simplexe im vierdimensionalen Raum.* Mitt. Akad. Wiss. der Georgischen SSR *88* (1982), 33–36.

[24] Kaiser, H.: *Zum Problem der Zerlegbarkeit von Simplexen in Orthoscheme.* Studia Sci. Math. Hungarica *21* (1986), 227–242.

[25] Katrnoška, F.: *Genetické algebry.* PMFA *50* (2005), 62–74.

[26] Korotov, S., Křížek, M.: *Acute type refinements of tetrahedral partitions of polyhedral domains.* SIAM J. Numer. Anal. *39* (2001), 724–733.

[27] Korotov, S., Křížek, M.: *Global and local refinement techniques yielding nonobtuse tetrahedral partitions.* Comput. Math. Appl. *50* (2005), 1105–1113.

[28] Korotov, S., Křížek, M., Neittaanmäki, P.: *Weakened acute type condition for tetrahedral triangulations and the discrete maximum principle.* Math. Comp. *70* (2001), 107–119.

[29] Křížek, M.: *Superconvergence phenomena on three-dimensional meshes.* Internat. J. Numer. Anal. Model. *2* (2005), 43–56.

[30] Křížek, M.: *There is no face-to-face partition of R^5 into acute simplices.* Submitted in 2005, 1–9.

[31] Křížek, M., Šolc, J.: *Acute versus nonobtuse tetrahedralizations.* In: Conjugate Gradient Algorithms and Finite Element Methods, Springer-Verlag, Berlin 2004, 161–170.

[32] Kuhn, H. W.: *Some combinatorial lemmas in topology.* IBM J. Res. Develop. *45* (1960), 518–524.

[33] Lenhard, H. C.: *Zerlegung von Tetraedern in Orthogonaltetraeder.* Elem. Math. *15* (1960), 106–107.

[34] Lindgren, H.: *Geometric dissections.* Van Nostrand, Princeton, New Jersey 1964.

[35] Lyusternik, L. A.: *Convex figures and polyhedra.* Dover Publications, Inc., New York 1963; Moscow 1956.

[36] Manheimer, W., Federico, J. P. et al.: *Dissecting an obtuse triangle into acute triangles.* Amer. Math. Monthly *67* (1960), 923.

[37] Møller, J.: *Lectures on random Voronoi tessellations.* Springer, New York 1994.

[38] Okabe, A., Boots, B., Sugihara, K.: *Spatial tessellations. Concepts and applications of Voronoi diagrams.* John Wiley & Sons, New York 1992.

[39] Penrose, R.: *Pentaplexity: a class of nonperiodic tilings of the plane.* Math. Intelligencer *2* (1979/80), 32–37.

[40] Rajan, V. T.: *Optimality of the Delaunay triangulation in R^d.* Discrete Comput. Geom. *12* (1994), 189–202.

[41] Schläfli, L.: *Theorie der vielfachen Kontinuität* (aus dem Jahre 1852). Aufträge der Denkschriften-Kommission der Schweizer naturforschender Gesellschaft, Zurcher & Furre 1901. In: Gesammelte mathematische Abhandlungen, Birkhäuser, Basel 1950.

[42] Stillwell, J.: *Stodvacetistěn v R^4.* PMFA *46* (2001), 265–280.

[43] Struik, D. J.: *Het probleem „De impletione loci".* Nieuf Archief voor Wiskunde, 2nd series, *15* (1925), 121–134.

[44] Stoyan, D., Kendall, W. S., Mecke, J.: *Stochastic geometry and its applications.* John Wiley & Sons, New York 1985, 1995.

[45] Tschirpke, K.: *On the dissection of simplices into orthoschemes.* Geom. Dedicata *46* (1993), 313–329.

[46] Tschirpke, K.: *Orthoschemzerlegungen fünfdimensionaler Simplexe in Räumen konstanter Krümmung.* Dissertation, Univ. Jena 1993.

[47] Tschirpke, K.: *The dissection of five-dimensional simplices into orthoschemes.* Beiträge zur Algebra und Geometrie *35* (1994), 1–11.

[48] G. Voronoï: *Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques. Recherches sur les parallélloedres primitifs.* J. Reine Angew. Math. *134* (1908), 198–287.

[49] Zhu, Q., Lin, Q., Liu, L.: *Monte Carlo finite element method.* Sborník semináře Programy a algoritmy numerické matematiky, MÚ AV ČR, Praha 1996, 210–217.

[50] Zlámal, M.: *Finite element solution of the fundamental equations of semiconductor devices, Parts I and II.* Math. Comp. *49* (1986), 27–43; Appl. Math. *46* (2001), 251–294.

[51] `www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/all.html`