Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Oldřich Bílek

Albert Einstein a Brownův pohyb

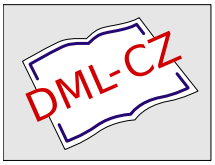
Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 50 (2005), No. 3, 177--181

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/141268

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2005

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

Albert Einstein a Brownův pohyb

Oldřich Bílek, Praha

Po Einsteinově přelomovém článku věnovaném teoretickému vysvětlení fotoelektrického jevu a zavedení světelných kvant se ve velmi krátkém čase, již 11. 5. 1905, objevila v Annalen der Physik jeho další zásadní práce [1], která je vnímána jako významný milník ve vývoji jiné oblasti fyziky — statistické fyziky. Je-li v literatuře zmiňována jen letmo, bez hlubší analýzy, bývá obvykle spojována s tzv. Brownovým pohybem. To vyvolává zdání, že ji A. Einstein napsal s úmyslem zaměřit se na vytvoření teorie Brownova pohybu. Článek však nese název *O pohybu malých částic suspendovaných v nehybné kapalině, předpokládaném molekulárně-kinetickou teorií tepla* a o Brownově pohybu v něm není ani zmínka. Svědčí to o tom, že Einstein měl zřejmě zpočátku jiný motiv pro jeho napsání a souvislost s Brownovým pohybem si uvědomil až během práce na něm. Přitom fenomén Brownova pohybu byl v roce 1905 znám již desítky let.

Pod názvem Brownův pohyb se skrývá specifický trhavý, neuspořádaný a v průběhu času neustávající pohyb mikroskopem pozorovatelných částic vznášejících se v kapalině, poprvé pozorovaný jako pohyb částic pylu suspendovaných ve vodě.

Pravý důvod vzniku Einsteinova slavného článku prozrazuje vedle jeho titulu hned první věta textu článku, která zní: *„V této práci ukážeme, že podle molekulárně-kinetické teorie tepla musí tělíska mikroskopických, ale viditelných rozměrů suspendovaná v kapalině uskutečňovat v důsledku molekulárně-tepelných pohybů posuvy takové velikosti, že je možné je snadno pozorovat pod mikroskopem.“* Albert Einstein totiž v období několika let před rokem 1905 věnoval pozornost budování molekulárně-kinetické teorie tepla založené na představě, že fyzikální systémy se skládají z atomů a molekul, které jsou v neustálém pohybu, a že statistickými metodami lze z chování obrovského počtu těchto částic získat makroskopický popis vlastností i chování systémů jako celku. Publikoval z této oblasti 3 články, které spolu s pracemi Boltzmannovými a Gibbsovými významně přispěly k vybudování statistické fyziky. K nim lze přiřadit i Einsteinovu disertační práci, obhájenou v roce 1905, v níž nalezl způsob, jak určit rozměry molekul a Avogadrovo číslo. Atomová hypotéza však v té době ještě nebyla všeobecně přijímána, a tak se stal naléhavým problém jejího experimentálního ověření nebo vyvrácení. Rozhodujícím impulzem pro naplnění tohoto úkolu se stal právě Einsteinův článek z roku 1905.

Vzhledem k tomu, že molekulární pohyb je experimentálně přímo nezjistitelný, upřel Einstein svou pozornost na hledání podmínek, za kterých by byl pozorovatelný alespoň nějaký důsledek molekulárního pohybu. Výsledkem jeho úvah je teoretická předpověď chování mikroskopicky viditelné, ale dostatečně malé částice, vznášející

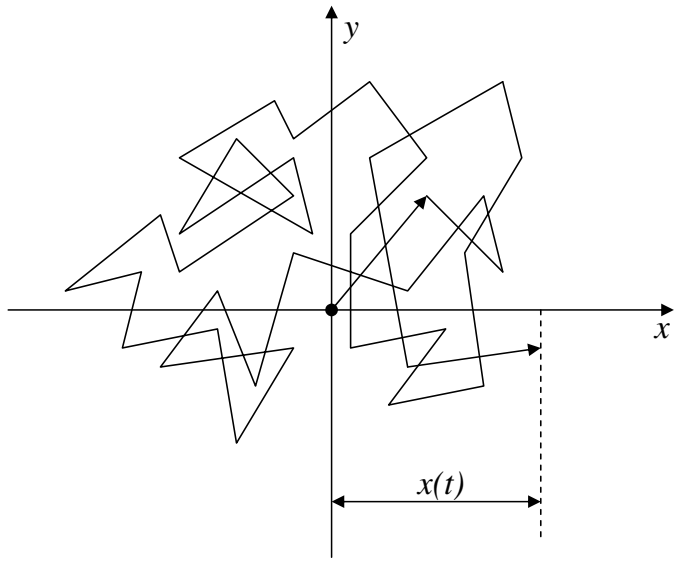
RNDr. Oldřich Bílek (1941), katedra chemické fyziky a optiky, Matematicko-fyzikální fakulta, Univerzita Karlova, Ke Karlovu 3, 121 16 Praha 2, e-mail: oldrich.bilek@mff.cuni.cz

se v kapalině, která by měla vlivem nárazů okolních molekul vykonávat chaotický trhavý pohyb. Je nesporné, že Einstein tak k testu molekulárně-kinetické teorie zvolil model plně odpovídající fenoménu Brownova pohybu, aniž by tento jev byl původním impulzem k napsání článku. To prozrazuje následující výrok, který je pokračováním již zmíněné úvodní části jeho textu: *„Je možné, že uvažovaný pohyb je totožný s tzv. Brownovým molekulárním pohybem. Protože však nemám o této záležitosti dostatečně přesné informace, nebudu k ní zde zaujímat žádné stanovisko.“* S trochou nadsázky lze k tomu poznamenat, že kdyby Brownův pohyb nebyl před rokem 1905 již tak dlouho pozorován, pak by ho Einstein bezpochyby svým článkem předpověděl. Spojování Einsteinovy práce s Brownovým pohybem je plně oprávněné, neboť autorem navržený fyzikální model pro otestování atomové hypotézy Brownovu pohybu plně odpovídá.

Brownův pohyb je termín pro specifický druh pohybu částic vznášejících se v kapalině nebo případně v plynu. Původně byl pozorován v podobě neustávajícího chaotického pohybu částic rostlinného pylu ve vodě. První důkladné a soustavné pozorování jevu se vztahuje k roku 1827 a zasloužil se o ně skotský lékař a později významný botanik Robert Brown. Historie Brownova pohybu zná bohatou škálu postupných pokusů o vysvětlení jeho příčin, které byly hledány nejprve uvnitř suspendované částice a teprve později spíše ve vlivu okolní kapaliny. Sám Brown, ovlivněn patrně skutečností, že první pozorování Brownova pohybu se týkalo výhradně částeček pocházejících z živých organismů, původně pracoval s hypotézou o „primitivních molekulách živé hmoty“. Později se však zjistilo, že stejný charakter pohybu lze pozorovat i u částeček anorganické hmoty, např. u prachových částic rozemletého materiálu. Brown původně přisuzoval i pohybu těchto tzv. „aktivních molekul“ v roztoku vnitřní zdroj, avšak uznal, že děj má převážně fyzikální povahu. Představy o aktivní roli suspendované částice se však staly neudržitelnými, když bylo experimentálně zjištěno, že Brownův pohyb v čase nikdy neustává.

Snahy o přisouzení původu Brownova pohybu dějům v okolním kapalném prostředí byly pochopitelně nejprve založeny na předpokladu o jeho spojitém charakteru a nepravidelný pohyb částice byl spojován se spontánním narušováním homogenity kapaliny, např. s fluktuacemi hustoty kapaliny, její teploty nebo elektrického náboje, popřípadě s fluktuacemi intenzity světla dopadajícího na vzorek při pozorování jevu. Teprve s nástupem atomové hypotézy se začaly prosazovat názory, že za Brownův pohyb by mohly být zodpovědné nárazy částic okolního prostředí chápaného jako soubor velkého počtu molekul, jejichž existence však tehdy nebyla zřejmá.

Po dlouhou dobu převažoval při bádání o Brownově pohybu kvalitativní přístup a nebyl k dispozici dostatečný soubor dat pro jeho teoretický popis. Pozoruhodné je, že např. v období let 1831–1857 neobsahuje odborná literatura ani jednu publikaci týkající se Brownova jevu. Teprve L. G. Gouy jako první shrnul v roce 1888 nejpodstatnější kvantitativní rysy Brownova pohybu, získané z experimentů prováděných do té doby. Jeho poznatky se týkaly jednak komplikovaného charakteru trajektorie brownovské částice (má chaotický charakter, je spojitá, avšak v žádném svém bodě nemá tečnu) a jednak závislosti chování brownovské částice na teplotě, viskozitě okolní kapaliny a velikosti částice.



Obr. 1. Příklad trajektorie brownovské částice.

Chaotický charakter trajektorie brownovské částice (viz obr. 1) vylučoval možnost určit měřením její časový průběh nebo pracovat s pojmem rychlosti částice. Ukázalo se, že pokusy stanovit rychlost částice vedly k nejednoznačným až nesmyslným výsledkům. Pozornost experimentátorů se tedy soustředila na sledování pohybu částice prostřednictvím zjišťování posloupnosti jejích okamžitých poloh v posloupnosti zvolených časových okamžiků. Z velkého počtu měření se tak dala určit střední hodnota kvadrátu vzdálenosti, kterou urazí částice za daný časový interval z pevně zvoleného počátečního bodu s polohovým vektorem $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$ do bodu s polohovým vektorem $\boldsymbol{r}(t)$, tj. veličina $\lambda(t) = \sqrt{\langle \boldsymbol{r}^2(t) \rangle}$ (závorkami $\langle\ \rangle$ je zde vyznačena střední hodnota získaná ze série měření). Ukázalo se dostatečně spolehlivě, že tato střední vzdálenost roste úměrně s odmocninou z času t. Bez jakéhokoliv zjednodušení problému stačí v izotropním prostředí měřit pouze průmět postupných poloh částice do jednoho vybraného směru, např. registrovat jen souřadnici $x(t)$ okamžité polohy (viz obr. 1) a místo $\lambda(t)$ tak získat veličinu $\lambda_x(t) = \sqrt{\langle x(t)^2 \rangle} = \lambda(t)/\sqrt{3}$, se kterou pracuje Einstein ve svém článku.

Pro teoretický výpočet $\lambda_x(t)$ Einstein použil postup, který je dnes běžný ve statistické fyzice. Nesoustředil se na popis trajektorií jednotlivých brownovských částic, ale pro sledování jejich polohy v prostoru zvolil rozdělovací funkci $f(x,t)$ a jejich přemísťování v prostoru popsal pomocí časové změny $f(x,t)$. Rozdělovací funkce $f(x,t)$ má význam hustoty pravděpodobnosti polohy x částice v časovém okamžiku t. Pro tuto funkci musí platit podmínka $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}x = 1$, a je-li známa, umožní počítat střední hodnoty všech veličin závislých na polohách částic. Pro $\lambda_x(t)$ tedy musí být $\lambda_x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x,t)\,\mathrm{d}x$.

Tento přístup odpovídá představě, že se místo postupného sledování pohybu jednotlivých brownovských částic zkoumá situace, v níž se v kapalině současně vznáší velký počet N částic, které např. v počátečním časovém okamžiku zahájí svůj pohyb

v počátku souřadnic. V dalších okamžicích se postupně utvoří mrak částic, který se jako celek rozptyluje. Přitom každá jednotlivá částice vykonává Brownův pohyb. Zavedeme-li funkci $\nu(x,t) = Nf(x,t)$, bude mít význam prostorové hustoty částic v časovém okamžiku t. Einstein si ve svém článku především položil otázku, co je aktivní příčinou pohybu jednotlivých suspendovaných částic a tedy i časových a prostorových změn funkcí $f(x,t)$ i $\nu(x,t)$. Dospěl k názoru, že jsou to prostorové změny osmotického tlaku úměrného v každém místě koncentraci částic $\nu(x,t)$. Velikost osmotického tlaku je v článku odvozena důsledně metodami kinetické teorie tepla na základě hypotézy o molekulární struktuře systému. Pomalé přemísťování částic je potom výsledkem dynamické rovnováhy mezi působením osmotických sil a brzdným účinkem odporu, který klade pohybu suspendované částice okolní kapalina. Pro zahrnutí odporu prostředí zvolil Einstein fenomenologickou Stokesovu formuli vystihující brzdnou sílu působící na jednu částici ve tvaru $F_{\mathrm{odp}} = -6\pi\nu a v$ (ν je viskozita kapaliny, a je poloměr částice, v je rychlost částice). Stokesův vzorec je převzat z klasické hydrodynamiky a Einsteinův přístup tak není ve všech detailech důsledně mikroskopický. Zahrnutím důsledků obou vlivů dospěl Einstein k odvození rovnice

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

pro určení rozdělovací funkce $f(x,t)$. Tato rovnice je rovnicí difuze a to znamená, že proces rozptylování brownovského mraku částic má difuzní charakter. Konstanta D je tzv. koeficient difuze, pro který Einstein odvodil formuli

$$D = kT\frac{1}{6\pi\eta a}\,,$$

kde $k = 1{,}3804 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J/K}$ je Boltzmannova konstanta a T je absolutní teplota.

A. Einstein nalezl řešení difuzní rovnice odpovídající situaci, kdy všechny částice „vyrazí“ v jednom okamžiku z jediného bodu a začnou se rozptylovat do nekonečného objemu kapaliny. Toto řešení má tvar

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\,\exp\Big(-\frac{x^2}{4Dt}\Big),$$

což potom pro střední posuv brownovské částice dává výsledek

$$\lambda_x(t) = \sqrt{2Dt} = \sqrt{\frac{RT}{3\pi N_A \eta a}\,t}$$

v souladu s experimentálními poznatky ($R = 8{,}3144\,\mathrm{J/(mol\cdot K)}$ je plynová konstanta, $N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}/\mathrm{mol}$ je Avogadrovo číslo). Měřením časového průběhu posuvů $\lambda_x(t)$ a tím i určením koeficientu difuze D se na základě předchozího vzorce otevírá možnost stanovit některou z veličin pod odmocninou na jeho pravé straně při znalosti ostatních. Sám Einstein použil svého výsledku v jedné z pozdějších prací k určení velikosti molekul cukru rozpuštěného ve vodě.

O experimentální ověření Einsteinových teoretických výsledků se zasloužil rozhodujícím způsobem J. B. Perrin, který v letech 1905–1911 studoval závislost Brownova pohybu na teplotě a velikosti částic a určil hodnotu Avogadrova čísla N_A. Einsteinova teorie a Perrinovy experimenty se shodovaly s takovou přesností, že znamenaly definitivní konec nedůvěry v existenci atomů, a to i u tak zásadních odpůrců atomové hypotézy, jakým byl např. německý chemik W. F. Ostwald.

Zdánlivě je Einsteinova práce o Brownově pohybu svým významem pouze ve stínu prací o fotoelektrickém jevu a teorii relativity, ale stojí za zmínku, že je ze všech tří prací nejvíce citována. Její klíčová role je především dána vypracováním teoretické báze pro pozdější přesvědčivý experimentální důkaz reálné existence atomů. K tomuto tvrzení stačí v návaznosti na výše uvedené dva citáty ocitovat ještě jeden odstavec Einsteinova článku: *„Bude-li uvažovaný pohyb skutečně pozorován, znamená to, že klasickou termodynamiku nelze považovat za plně platnou pro mikroskopicky rozlišitelné oblasti a že je tedy možné přesně určit skutečné rozměry atomů. Jestliže se naopak předpoklad o existenci takového pohybu nepotvrdí, bude to pádný argument proti molekulárně-kinetické představě o teple.“*

Zájem o experimentální i teoretické studium Brownova pohybu neustal ani později a dá se říci, že trvá dodnes. Einsteinův nepříliš rozsáhlý, ale klíčový článek však zřetelně rozdělil historii bádání o Brownově pohybu na období před Einsteinem a období po Einsteinovi. Sám Einstein publikoval po roce 1905 ještě několik prací věnovaných Brownovu pohybu a zahájil tak bohatou éru studia chování větších a složitějších systémů podmíněného chaotickým chováním jejich součástí nebo náhodnými vnějšími vlivy. Tento problém je natolik obecný, že se nestal předmětem zájmu zvláštního odvětví fyziky, ale prorůstá všemi jejími obory.

Je možné si představit celou škálu situací analogických podmínkám Brownova pohybu, kdy jsou větší částice podrobovány velkému počtu nárazů částic okolního prostředí. Může jít např. o částice v plynném prostředí (pevné nečistoty v ovzduší, drobné kapičky kapaliny rozprášené v plynu), olejové kapičky nebo vzduchové bublinky v kapalině, dokonce i roztavené drobné kapičky jednoho kovu (olova) ve slitině s jiným kovem (hliník), je-li teplota vzorku větší než teplota tání olova a menší než teplota tání hliníku a je-li koncetrace olova velmi malá. Příbuzný (nikoliv totožný) charakter má pohyb bakterií nebo nečistot z ovzduší po sliznici v nose nebo v ústní dutině. Zdánlivě vzdálenou analogií je např. proces tvorby ceny akcie na burze, kdy akcie (místo suspendované částice) je „atakována“ velkým počtem objednávek nákupů a prodejů účastníků akciového trhu (místo nárazů okolních molekul). Velmi podobný charakter má proces tvorby ceny zboží na trhu. Je zřejmé, že hlubší pochopení podstaty Brownova pohybu umožnilo uplatnit poznatky o něm nejen v mnoha oborech fyziky, ale i daleko za jejími hranicemi, zejména v ekonomii, biologii, lékařství, ekologii, teorii her nebo v oblasti nanotechnologií.

Literatura

[1] Einstein, A.: *Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen.* Annalen der Physik *17* (1905), 549–560.