Jiří Anděl; Karel Zvára

Přijímací zkouška z matematiky na MFF v roce 2004

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 50 (2005), No. 2, 148--161

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/141263`

Přijímací zkouška z matematiky na MFF v roce 2004

Jiří Anděl a Karel Zvára, Praha

1. Úvod

V roce 2004 bylo ke studiu na MFF podáno celkem 2069 přihlášek. Z toho v 596 případech byla přijímací zkouška prominuta. Proto by se zdálo, že k přijímacím zkouškám mělo být pozváno 1473 uchazečů. Někteří si však podali přihlášku na dva nebo dokonce na tři studijní programy. Tomu se stručně říká duplicity. Ale v takovém případě skládá uchazeč přijímací zkoušku pouze jednou. Její výsledky se mu zanášejí do všech jeho přihlášek. Proto k přijímacím zkouškám bylo pozváno pouze 1388 uchazečů.

Zkoušky se konaly v jediném dnu, a to v pondělí 14. června 2004. Jednotný termín zkoušek zaručuje, že všichni uchazeči mají zkoušky stejně obtížné, protože všichni dostanou stejná zadání úloh. (Pro úplnost poznamenejme, že 7. července byl náhradní termín přijímacích zkoušek. Bylo na něj pozváno 85 uchazečů. Dostavilo se jich 53. Údaje o náhradním termínu nejsou zahrnuty do rozboru provedeného v tomto příspěvku.) Přehled o počtu uchazečů zkoušených v řádném termínu v jednotlivých posluchárnách podává tabulka 1.

Data z jednotlivých poslucháren jsou formou krabicového grafu znázorněna na obrázku 1. Připomeňme, že dolní strana obdélníku (čili krabice) odpovídá dolnímu kvartilu (takže pod ní je čtvrtina počtu pozorování), horní strana odpovídá hornímu kvartilu (nad ní je také čtvrtina počtu pozorování). Prostřední úsečka v krabicovém grafu odpovídá mediánu. Posluchárny jsou seřazeny vzestupně podle průměru. Toto uspořádání nemusí být totožné s uspořádáním podle mediánu (a v našem případě také není).

2. Písemka z matematiky

Uvedeme nyní zadání písemky z matematiky v řádném termínu dne 14. 6. 2004. U každé úlohy je uvedeno, jaký maximální počet bodů z ní bylo možno získat. V případě neúplného řešení byl přidělen pouze alikvotní počet bodů. Z písemky bylo možno získat maximálně 50 bodů. Pro kontrolu uvádíme výsledky jednotlivých úloh.

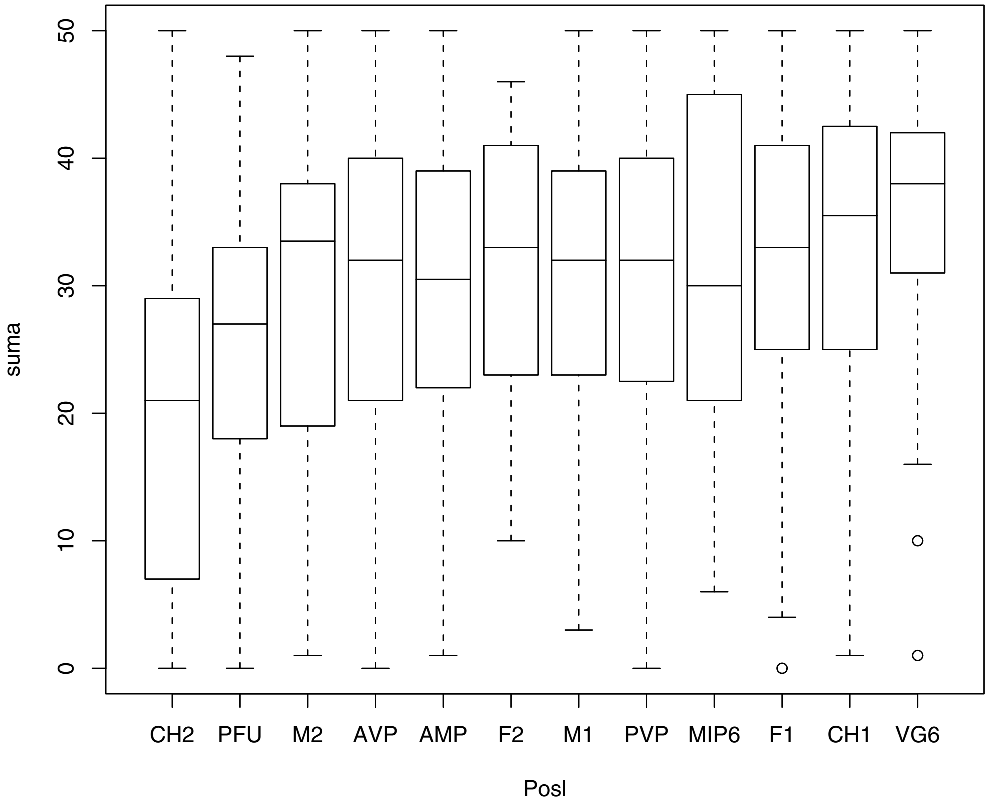
Prof. RNDr. Jiří Anděl, DrSc. (1939), Matematicko-fyzikální fakulta UK, katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky, Sokolovská 83, 186 00 Praha 8, e-mail: `jiri.andel@mff.cuni.cz`; doc. RNDr. Karel Zvára, CSc. (1943), Matematicko-fyzikální fakulta UK, katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky, Sokolovská 83, 186 00 Praha 8, e-mail: `karel.zvara@mff.cuni.cz`

TAB. 1. Přehled poslucháren.

Posl.	Kapac.	Pozv.	Uchazeči o	n	Body	Úl. 1	Úl. 2	Úl. 3	Úl. 4
M1	190	154	PS F	114	31,22	8,37	8,16	7,83	6,86
M2	70	57	PS F, KS F	36	29,17	8,25	7,75	7,56	5,61
F1	170	73	duplicity	57	32,25	7,89	7,88	7,68	8,79
F2	75	32	UMD, UMI	22	31,05	7,77	8,41	7,00	7,86
VG6	150	125	PS M	93	36,49	9,02	9,01	8,66	9,81
MIP6	60	43	KS M	27	31,37	8,19	8,85	7,74	6,59
CH1	180	142	PS M	104	34,60	8,90	8,86	8,07	8,77
CH2	50	39	UFM	29	21,14	6,52	6,55	3,69	4,38
PVP	320	271	PS I	191	31,25	8,27	8,32	7,21	7,45
PFU	120	79	KS I	57	24,56	7,05	6,56	5,88	8,07
AMP	200	167	PS I	126	30,76	8,04	8,04	7,10	7,59
AVP	250	206	PS I	157	30,41	7,82	8,09	7,49	7,01
Celkem	1838	1388		1013	31,19	8,16	8,17	7,40	7,46

Vysvětlivky:
Posl. = označení posluchárny
Kapac. = kapacita posluchárny (počet míst)
Pozv. = počet pozvaných uchazečů do posluchárny
PS = prezenční studium
KS = kombinované studium
F = fyzika
I = informatika
M = matematika
UMD = učitelství matematika a deskriptivní geometrie
UMI = učitelství matematika a informatika
UFM = učitelství fyzika a matematika
Body = průměrný celkový počet bodů
Úl. 1 = průměrný počet bodů za 1. úlohu (podobně dále)
M1, M2 = posluchárny v budově Ke Karlovu 3
F1, F2 = posluchárny v budově Ke Karlovu 5
VG6 = velká geologická posluchárna, Albertov 6
MIP6 = mineralogická posluchárna, Albertov 6
CH1, CH2 = posluchárny v budově chemie
PVP = Purkyňův ústav, velká posluchárna
PFU = posluchárna Farmakologického ústavu
AMP = Anatomický ústav, malá posluchárna
AVP = Anatomický ústav, velká posluchárna

První dvě úlohy zadavatelé i vedení fakulty pokládali za lehčí. Proto jsou hodnoceny pouze menším počtem bodů. Třetí úloha je geometrická a ze zkušenosti je známo, že i jednoduché geometrické úlohy činí uchazečům potíže. Konečně čtvrtá úloha vyžaduje hlavně logické usuzování. Proto bylo bodové hodnocení posledních dvou úloh vyšší.



Obr. 1. Výsledky zkoušky z matematiky v posluchárnách podle průměru.

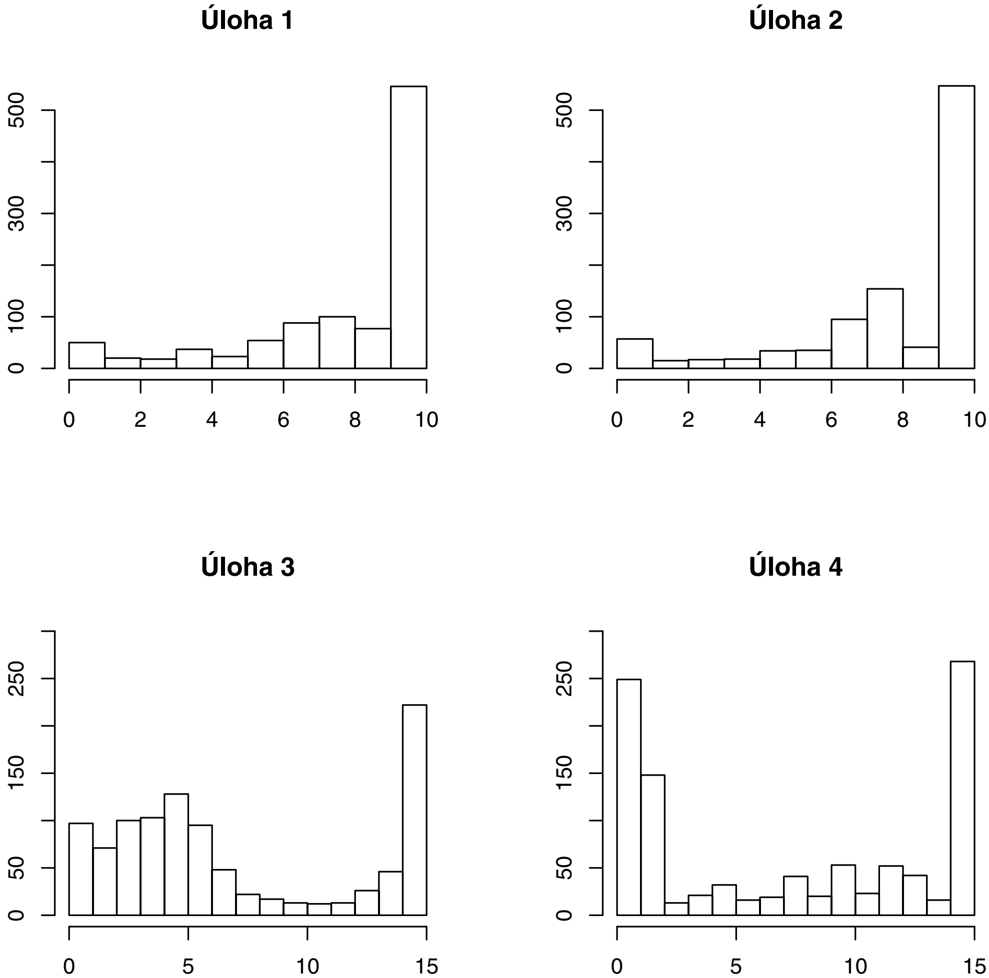
Zadání přijímací zkoušky z matematiky

U každé úlohy je nutno uvést celý postup řešení, nestačí napsat pouze výsledek.

1. Řešte v $\mathbb{R}$ rovnici $|x^2 - 3x| = 1 + |x|$. (10 bodů)
2. V oboru reálných čísel řešte rovnici $\frac{3}{2}\cos x = \sin^2 x$. (10 bodů)
3. Určete střed kružnice, která se dotýká obou přímek $y = x$ a $y = -x$ a prochází bodem $[3, 5]$. Najděte všechna řešení. (15 bodů)
4. M je množina všech přirozených čísel menších než 50 000, v jejichž dekadickém zápisu není žádná z číslic 0, 3, 4, 6, 8 a každá ze zbývajících je v něm nejvýše jednou. Určete počet sudých a počet lichých čísel v množině M. (15 bodů)

Výsledky

1. Rovnice má právě tři řešení, a to $x_1 = 2 + \sqrt{5}$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1 - \sqrt{2}$.
2. Řešením jsou všechna x tvaru $x = \frac{1}{3}\pi + 2k\pi$, $x = \frac{5}{3}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
3. Střed má souřadnice $[0, m]$, kde $m = 10 \pm 4\sqrt{2}$.
4. Sudých čísel je 47, lichých je 206.

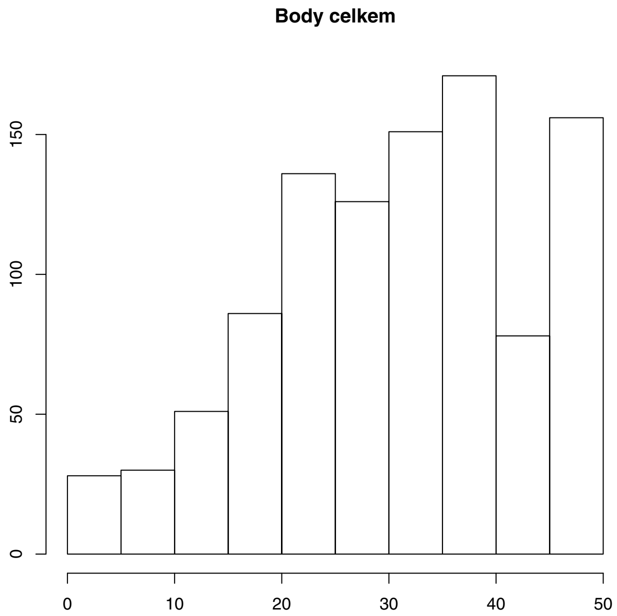


Obr. 2. Histogramy bodů za jednotlivé úlohy.

Histogramy na obr. 2 ukazují rozdělení počtu bodů za jednotlivé úlohy a za jejich součet.

Povšimněme si, že histogramy za jednotlivé úlohy mají vícemodální charakter. Nejsilněji je obsazena třída odpovídající maximálnímu počtu bodů. U čtvrté úlohy je patrné lokální maximum u nulové třídy. To se jeví i u ostatních úloh, i když mnohem méně zřetelně. Pak bývá vidět i lokální maximum uvnitř celého intervalu. Z toho lze usuzovat, že se uchazeči zpracovávající určitou úlohu zhruba člení do tří skupin. V první jsou ti, kterým úloha nečiní potíže a dostávají maximální počet bodů. Ve druhé jsou uchazeči, kteří si s úlohou nevědí rady a nedostávají za ni žádné body, nebo jen minimální počet. Třetí skupina je mezi oběma těmito krajnostmi. Tento charakter je však setřen u celkového počtu bodů (viz histogram na obr. 3).

Základní statistické charakteristiky počtu bodů za jednotlivé úlohy i za jejich součet jsou uvedeny v tab. 2.



Obr. 3. Histogram součtu bodů za všechny úlohy.

Tab. 2. Statistické charakteristiky počtu získaných bodů.

	Medián	Průměr	Směrodatná odchylka
Úloha 1	10	8,16	2,71
Úloha 2	10	8,17	2,73
Úloha 3	6	7,40	5,17
Úloha 4	8	7,46	6,08
Celkem	32	31,19	12,21

3. Analýza rozptylu

Ke zjištění případného rozdílu mezi posluchárnami (tj. studijními směry) byla použita analýza rozptylu aplikovaná na celkový dosažený počet bodů uchazečů o studium. Výsledkem je tabulka analýzy rozptylu

```
             Df   Sum Sq   Mean Sq   F-value       P(>F)
Posl         11     9590       872    6.1809   6.763e-10   ***
Residuals  1001   141196       141
```

Jiné varianty analýzy rozptylu včetně Kruskalova-Wallisova testu dávají obdobné výsledky. Testy na homogenitu rozptylů vycházejí nevýznamně, i když se jejich dosažená hladina blíží hladině 0,05. Z provedené analýzy rozptylu tedy vyplývá, že existuje vysoce signifikantní rozdíl mezi posluchárnami. Tukeyovým HSD testem zjistíme, které posluchárny se od sebe signifikantně liší. Výsledky jsou uvedeny v tab. 3. Křížek v příslušném políčku znamená, že se odpovídající dvojice poslucháren od sebe liší na hladině 0,05.

TAB. 3. Výsledky Tukeyova HSD testu.

	CH2	PFU	M2	AVP	AMP	F2	M1	PVP	MIP6	F1	CH1	VG6
CH2												
PFU												
M2												
AVP	x											
AMP	x											
F2												
M1	x	x										
PVP	x	x										
MIP6												
F1	x	x										
CH1	x	x										
VG6	x	x		x	x			x				

Z tab. 3 vyplývá, že se od řady jiných poslucháren signifikantně liší CH2, PFU (kde je celkový počet bodů malý) a VG6 (kde je celkový počet bodů velký). Nahlédnutím do tab. 1 zjistíme, že v CH2 psali písemku uchazeči o učitelství matematika-fyzika. V PFU šlo o uchazeče do kombinovaného studia informatiky, což bývají lidé s několika léty odborné praxe, tedy s časovým odstupem od středoškolského studia. Naproti tomu ve VG6 byli uchazeči o prezenční studium odborné matematiky, u nichž se dá čekat, že budou mít o matematiku zvlášť velký zájem. Zjištěné statistické rozdíly mají tedy věcné vysvětlení.

4. Cronbachovo alfa

U testů se zjišťuje jejich reliabilita a validita (viz [2]).

Validita se zabývá stanovováním toho, zda procedura měření či zjišťování skutečně měří to, co je předmětem výzkumu. Tato záležitost je triviální tam, kde se zjišťovaná charakteristika měří přímo, i když třeba s určitou chybou (jako je třeba výška a váha člověka). Může však jít o komplikovaný problém v případě osobnostních charakteristik (jako je třeba paměť, nebo v našem případě znalost určitých oblastí středoškolské matematiky).

Reliabilita (čili spolehlivost) znamená stupeň shody měření prováděných na stejném objektu za stejných podmínek. V případě testů skládajících se z několika položek pak reliabilita odpovídá konzistenci hodnot různých podmnožin položek mezi sebou. Pokud vycházíme z představy, že výsledek měření (v našem případě tedy počet bodů získaných za danou úlohu) je dán součtem měřené hodnoty (např. znalosti určité látky) a chyby měření, pak reliabilita říká, jak velký díl variability výsledných měření je dán samotnou variabilitou měřených hodnot. Čím je reliabilita blíže k jedné, tím méně je výsledek ovlivňován jeho chybovou složkou.

Reliabilita je někdy hodnocena ukazatelem, který se nazývá Cronbachovo alfa (viz [1]). Protože tento pojem nemusí být každému čtenáři znám, připomeneme jeho definici a základní vlastnosti.

Nechť se u každého z n jedinců měří k znaků. Tyto znaky bývají většinou bodová ohodnocení nějakých k testů, kterým byli zmínění jedinci podrobeni. Výsledky se shrnou do tab. 4.

TAB. 4. Výsledky měření.

Jedinec	1. znak	...	k-tý znak	Součet
1	x_{11}	...	x_{1k}	y_1
...	...	...	...	...
n	x_{n1}	...	x_{nk}	y_n
průměr	$\bar{x}_1$	...	$\bar{x}_k$	$\bar{y}$
s^2	s_1^2	...	s_k^2	s_{sum}^2

Základní statistické charakteristiky jsou

$$\bar{x}_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij}, \qquad s_j^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_{ij}-\bar{x}_j)^2,$$

$$y_i = \sum_{i=1}^{k} x_{ij}, \qquad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i, \qquad s_{\mathrm{sum}}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2.$$

Cronbachovo alfa je definováno vzorcem

$$\alpha = \frac{k}{k-1}\left(1 - \frac{1}{s_{\mathrm{sum}}^2}\sum_{i=1}^{k} s_i^2\right).$$

Jsou-li znaky nezávislé, pak rozptyl jejich součtu je roven součtu rozptylů. Jelikož s_i^2 je nestranný odhad odpovídajícího rozptylu, bude α blízké nule. Budou-li všechny znaky totožné, dostaneme výsledky uvedené v tab. 5.

TAB. 5. Výsledky identických měření.

Jedinec	1. znak	...	k-tý znak	Součet
1	x_1	...	x_1	kx_1
...	...	...	...	...
n	x_n	...	x_n	kx_n
průměr	$\bar{x}$	...	$\bar{x}$	$k\bar{x}$
s^2	s_1^2	...	s_1^2	$k^2 s_1^2$

Zde

$$1-\frac{1}{s_{\mathrm{sum}}^2}\sum_{i=1}^{k}s_i^2 = 1-\frac{ks_1^2}{k^2s_1^2} = \frac{k-1}{k}\,.$$

Koeficient $k/(k-1)$ je tedy ve vzorci pro α uveden proto, aby v případě identických znaků bylo α rovno jedné.

V nedávné době jsme byli svědky toho, že kvalita přijímacích zkoušek měla být hodnocena zejména pomocí Cronbachova alfa. Tuto tendenci pokládáme za zavádějící. Samotná hodnota Cronbachova alfa se mění v závislosti na tom, jaká je reliabilita jednotlivých položek a jaký je počet položek. Uvažujme model analýzy rozptylu dvojného třídění bez interakcí, kdy střední hodnotu x_{ij} vysvětlujeme součtem efektu jedince a efektu znaku. Platí vzorec (viz [3])

$$\alpha = 1-\frac{1}{F_A},$$

kde F_A je testová statistika pro test hypotézy, že mezi jedinci není rozdíl. Kdykoliv je tato statistika menší než 1, což naznačuje, že mezi jedinci nemusí být rozdíl, Cronbachovo alfa vyjde záporné. Čím je rozdíl mezi jedinci průkaznější (a tedy statistika F_A větší), tím více se Cronbachovo alfa blíží jedné.

Reliabilita tedy vypovídá nejen o kvalitě měření (testů), ale také o variabilitě měřeného znaku v testované populaci. Ukážeme to na příkladě. Zajímali jsme se o reliabilitu písemné zkoušky z fyziky uchazečů o studium fyziky na MFF UK v roce 2000, která byla měřena právě pomocí Cronbachova alfa. Když se tento ukazatel počítal pouze z dat uchazečů přijatých ke studiu, vyšlo $\alpha = 0{,}55$. Pokud se vzala data všech studentů, kteří písemku psali, dostalo se $\alpha = 0{,}73$. Vyšší hodnota tohoto ukazatele nemá nic společného s lepší konstrukcí písemné zkoušky (ta přece byla stejná), ale je důsledkem větší variability znalostí fyziky ve větším souboru uchazečů. Přitom MFF UK přijímá zhruba polovinu studentů bez přijímací zkoušky na základě jejich vynikajících výsledků na střední škole. Lze očekávat, že kdyby také tito studenti museli psát písemnou zkoušku z fyziky, byla by hodnota alfa ještě podstatně větší, než zmíněné číslo 0,73.

Cronbachovo alfa bylo navrženo pro ty situace, kde je potřeba zjišťovat míru určité vlastnosti (např. kvalitu lidské paměti), přičemž tuto vlastnost nelze měřit přímo. Je-li k dispozici několik metod na určování dané vlastnosti (např. několik testů), je třeba zabezpečit, aby všechny tyto metody stanovovaly velikost téže vlastnosti. To však není případ přijímací zkoušky z matematiky. Tam každá úloha zjišťuje schopnost uchazeče řešit problémy z určité oblasti matematiky. Poměrně často se stává, že uchazeč umí pracovat s výrazy, které obsahují absolutní hodnotu, ale má potíže třeba s kombinatorikou. Proto řešení jednotlivých úloh vypovídají o znalostech uchazečů v příslušných oblastech matematiky, nikoli o znalosti matematiky jako celku. Další podrobnosti o Cronbachově alfa se najdou v článku [3] nebo v poslední kapitole druhého vydání knihy [5].

5. Položková analýza

Výsledky dosažené jednotlivými uchazeči se zapisují do matice. Tato matice má čtyři sloupce. Do nich se zapisují počty bodů dosažených uchazeči za jednotlivé příklady. Počet řádků je roven počtu uchazečů, kteří psali písemku. V položkové analýze se pro každou položku počítají tyto charakteristiky:

$mean$ ... průměr položky
SD ... směrodatná odchylka položky
$s.mean$ ... průměr součtu ostatních položek
$s.SD$ ... směrodatná odchylka součtu ostatních položek
$s.\alpha$ ... Cronbachovo alfa pro soubor ostatních položek
$s.r$ ... korelační koeficient mezi položkou a součtem ostatních položek
$r2.det$ ... koeficient determinace mezi položkou a zbývajícími položkami

Kromě toho se uvádí také Cronbachovo alfa pro všechny položky.

TAB. 6. Položková analýza původních dat.

úloha	$mean$	SD	$s.mean$	$s.SD$	$s.\alpha$	$s.r$	$r2.det$
1	8,16	2,71	23,03	10,64	0,56	0,49	0,31
2	8,17	2,73	23,02	10,57	0,55	0,52	0,34
3	7,40	5,17	23,79	8,95	0,53	0,45	0,23
4	7,46	6,08	23,74	8,44	0,62	0,40	0,16

Cronbachovo alfa je 0,63.

TAB. 7. Položková analýza normovaných dat.

úloha	$mean$	SD	$s.mean$	s.SD	$s.\alpha$	$s.r$	$r2.det$	obtížnost
1	0,82	0,27	1,81	0,77	0,60	0,51	0,31	0,18
2	0,82	0,27	1,81	0,76	0,58	0,54	0,34	0,18
3	0,49	0,34	2,13	0,73	0,61	0,47	0,23	0,51
4	0,50	0,41	2,13	0,70	0,68	0,40	0,16	0,50

Cronbachovo alfa je 0,68.

TAB. 8. Položková analýza standardizovaných dat.

úloha	$mean$	SD	$s.mean$	$s.SD$	$s.\alpha$	$s.r$	$r2.det$
1	0	1	0	2,26	0,62	0,53	0,31
2	0	1	0	2,24	0,60	0,56	0,34
3	0	1	0	2,30	0,65	0,48	0,23
4	0	1	0	2,37	0,70	0,40	0,16

Cronbachovo alfa je 0,71.

V tab. 6 je uvedena položková analýza aplikovaná na původní data. Maximální počet bodů dosažitelný u jednotlivých úloh však není stejný. Proto v tab. 7 je uvedena položková analýza pro normovaná data, což jsou hodnoty položek dělené maximálním dosažitelným počtem bodů v dané úloze. Poznamenejme, že obtížnost položky je definována jako $1 - mean$, kde $mean$ je průměr položky počítaný z normovaných dat. V posledním sloupci tab. 7 je proto uvedena i obtížnost jednotlivých úloh. Konečně v tab. 8 je prezentována položková analýza pro standardizovaná data, kdy se u každé položky odečte její průměr a výsledek se dělí její směrodatnou odchylkou.

Z tab. 6 vyplývá, že průměrný bodový zisk z 1. i z 2. úlohy je téměř stejný. Také průměry bodů z 3. a 4. úlohy se liší jen málo, ale tyto průměry jsou nižší než u prvních dvou úloh. To je pozoruhodné zejména proto, že maximální možný počet bodů je u posledních dvou úloh vyšší než u prvních dvou. Směrodatné odchylky u 3. a 4. úlohy jsou větší než u úloh 1 a 2. Charakteristiky označené jako $s.mean$ a $s.SD$ jsou u všech úloh téměř stejné. Největší hodnota $s.\alpha$ je u 4. úlohy. To znamená, že by z hlediska Cronbachova alfa bylo nejvýhodnější vynechat 4. úlohu, pokud by se některá úloha musela vynechávat. To je zcela v rozporu s tím, že právě tato úloha ukazuje úroveň logického myšlení uchazečů, které je pro úspěšné studium na MFF nezbytné. Hodnoty korelačních koeficientů $s.r$ a $r2.det$ jsou poměrně malé. To znamená, že výsledek žádné úlohy není příliš determinován výsledky ostatních úloh. Konečně z tab. 7 vyplývá, že obtížnost úloh 1 a 2 je stejná a také obtížnost úloh 3 a 4 je přibližně stejná, a to vyšší než u prvních dvou úloh. Tím je prokázáno, že stejné bodové hodnocení úloh 1 a 2 a také stejné bodové hodnocení úloh 3 a 4 bylo plně oprávněné. Zrovna tak oprávněné bylo to, že úlohy 3 a 4 byly oceněny vyšším počtem dosažitelných bodů.

TAB. 9. Korelační koeficienty mezi body za jednotlivé úlohy.

úloha	1	2	3	4
1	1,00	0,52	0,37	0,31
2	0,52	1,00	0,41	0,32
3	0,37	0,41	1,00	0,32
4	0,31	0,32	0,32	1,00

V tab. 9 jsou uvedeny korelační koeficienty mezi dosaženými body za jednotlivé úlohy. Nejvíce jsou korelovány body získané za úlohu 1 a 2. Příslušný korelační koeficient činí 0,52.

6. Pořadí odevzdávaných písemek

Můžeme si položit otázku, zda se v pořadí odevzdávaných písemek nějak promítá kvalita jejich zpracování. Jde o to, zda uchazeči s vyšším počtem bodů spíše odevzdávají své písemky mezi prvními, nebo naopak mezi posledními. Písemky jsou při odevzdávání kódovány, protože jejich opravy jsou anonymní. Součástí kódu je i pořadí, ve kterém byla písemka odevzdána. To umožňuje vypočítat Spearmanův korelační koeficient r_S mezi pořadím odevzdání a celkovým počtem dosažených bodů. Výsledky jsou uvedeny v tab. 10. V této tabulce je zároveň v posledním sloupci uvedena i signifikance Spearmanova korelačního koeficientu.

TAB. 10. Spearmanův korelační koeficient.

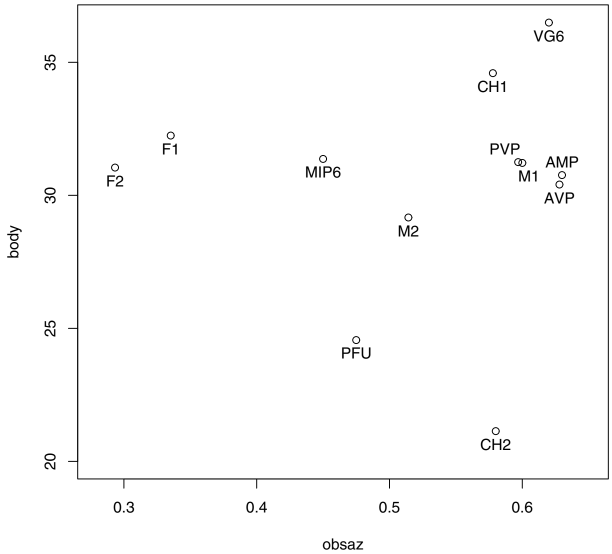
Posluchárna	r_S	Signifikance
M1	−0,19	0,04
M2	−0,11	0,54
F1	−0,08	0,57
F2	−0,23	0,29
VG6	−0,11	0,30
MIP6	−0,50	0,01
CH1	−0,13	0,18
CH2	−0,33	0,08
PVP	0,06	0,44
PFU	−0,21	0,11
AMP	0,08	0,36
AVP	−0,08	0,31

Z tab. 10 vyplývá, že signifikantní závislost mezi pořadím při odevzdání písemky a dosaženým počtem bodů je prokázána pouze u poslucháren M1 a MIP6. Jde přitom o negativní závislost, takže nejdřív odevzdávají své písemky uchazeči s vyšším počtem bodů. Z tabulky vidíme, že jen u dvou poslucháren z 12 je Spearmanův korelační koeficient kladný. Tak malý počet kladných koeficientů je statisticky významný — oboustranný znaménkový test má dosaženou hladinu testu $p = 0{,}039$. To také potvrzuje, že uchazeči s lepšími výsledky odevzdávají své práce dřív. Absolutní hodnoty Spearmanových korelačních koeficientů jsou však velmi malé (s výjimkou posluchárny MIP6).

7. Závislost počtu bodů na obsazenosti posluchárny

V tab. 1 je uvedena kapacita poslucháren a počet uchazečů n, kteří v nich psali písemku z matematiky. Definujme obsazenost posluchárny jako podíl počtu uchazečů píšících písemku a kapacity dané posluchárny. Stručně obsazenost označíme jako *obs*. Závislost proměnné *suma* na *obs* byla hodnocena pomocí lineární regrese. Dosažená hladina testu založeného na odpovídající F statistice činí 0,2179. Lineární závislost mezi dosaženým počtem bodů a obsazeností posluchárny tedy nebyla statisticky prokázána. (Byly totiž obavy, že v hodně obsazených posluchárnách by uchazeči mohli snáze opisovat. To by se projevilo vyšším počtem dosažených bodů.)

Spearmanův korelační koeficient mezi proměnnými *suma* a *obs* je 0,026 a jeho signifikance činí pouze $p = 0{,}4046$. Obyčejný (Pearsonův) korelační koeficient je 0,039 a má signifikanci $p = 0{,}2179$. Na obr. 4 je znázorněna závislost mezi průměrným počtem bodů v posluchárnách a jejich obsazeností. Ani z grafického znázornění není patrná žádná závislost mezi oběma ukazateli.



Obr. 4. Závislost průměrného počtu bodů na obsazenosti posluchárny.

8. Aplikace metody hlavních komponent

Zhruba řečeno, hlavní komponenty nás informují o tom, jaké lineární kombinace proměnných podávají o těchto proměnných nejvíc informace. V praxi se používají dvě varianty metody hlavních komponent. Jedna metoda spočívá v rozboru původních naměřených dat. Protože se někdy stává, že jednotlivé proměnné jsou neporovnatelné co do velikosti (jako např. výška, váha, tep, krevní tlak), druhá metoda se opírá o standardizovaná data. Začneme tedy prvním případem, kdy se za vstupní údaje berou přímo body dosažené v jednotlivých úlohách.

Výpočtem se zjistilo, že první hlavní komponenta vyčerpává 59 % rozptylu, druhá pak 27 %. První dvě hlavní komponenty dohromady tudíž vyčerpávají 86 % rozptylu, a proto se při rozboru můžeme prakticky omezit jen na ně. Přitom první hlavní komponenta c_1 a druhá hlavní komponenta c_2 jsou dány vzorci

$$c_1 = 0{,}196 \times uloha1 + 0{,}207 \times uloha2 + 0{,}528 \times uloha3 + 0{,}800 \times uloha4,$$
$$c_2 = 0{,}120 \times uloha1 + 0{,}139 \times uloha2 + 0{,}789 \times uloha3 - 0{,}586 \times uloha4,$$

kde *uloha*1 znamená dosažený bodový výsledek za 1. úlohu, *uloha*2 za druhou atd.

Kvalita uchazečů byla posuzována na základě součtu bodů ze všech příkladů. S přihlédnutím k výsledkům by se variabilita nejvíce popsala údajem c_1, tedy váženým součtem bodů z jednotlivých úloh, přičemž by váhy bodů za úlohy 1 a 2 byly zhruba 0,2, u třetí úlohy 0,5 a u čtvrté 0,8. (Je zajímavé, že tyto váhy jsou dosti podobné obtížnosti jednotlivých úloh, jak bylo vypočteno v položkové analýze.)

Poslední dvě úlohy vnášejí mezi uchazeče největší rozlišení. První komponenta se vyznačuje tím, že všechna znaménka koeficientů jsou stejná. Popisuje tudíž jakousi celkovou matematickou úroveň uchazeče. Ve druhé komponentě je znaménko koeficientu u čtvrté úlohy jiné než u prvních tří úloh. Přitom koeficienty u úloh 1 a 2 jsou malé. Dá se zhruba říci, že další ukazatel určitého rozlišení uchazečů je rozdíl mezi jejich výsledkem ve 3. a ve 4. úloze.

Metoda hlavních komponent aplikovaná na standardizovaná data dává obdobné výsledky.

9. Bodování úloh založené na metodě hlavních komponent

Vraťme se znovu k problému stanovení optimálního bodového hodnocení jednotlivých úloh. Místo součtu bodových zisků budeme hledat takovou jejich lineární kombinaci, která mezi uchazeči co nejlépe rozlišuje. Jak známo, řešením je vlastní vektor odpovídající největšímu vlastnímu číslu varianční matice, tedy první hlavní komponenta. Musíme však vycházet z výsledků bodovaných na stejné stupnici, např. od nuly do jedné. Pak pomocí programu R dostaneme

```
Importance of components:
                          Comp.1    Comp.2    Comp.3     Comp.4
Standard deviation     0.4814616 0.3162313 0.2519964 0.18781336
Proportion of Variance 0.5383513 0.2322482 0.1474794 0.08192105
Cumulative Proportion  0.5383513 0.7705995 0.9180789 1.00000000

Loadings:
        Comp.1 Comp.2 Comp.3 Comp.4
uloha1   0.349 -0.273  0.575  0.688
uloha2   0.364 -0.297  0.504 -0.725
uloha3   0.507 -0.577 -0.639
uloha4   0.698  0.710
```

Když normujeme první sloupec části `Loadings` tak, aby součet složek dal 50, dostaneme výsledek

$$opt = 9{,}099 \times uloha1 + 9{,}494 \times uloha2 + 13{,}215 \times uloha3 + 18{,}192 \times uloha4,$$

která není daleko od skutečně použitých bodových hodnocení.

Různé volby vah lze mezi sebou porovnat pomocí rozptylu výsledného celkového bodového hodnocení. Největší rozptyl, tedy nejlepší rozlišení, dá právě určená kombinace *opt*. Originální bodování $(10, 10, 15, 15)$ je pouze 94,6 % tohoto maxima. Prostý součet při rovnoměrném bodování (každá úloha 12,5 bodu) by dal 87,5 %. Jak je patrné, použitý způsob bodování se v tomto rozboru jeví jako velice vhodný.

10. Závěr

V tomto příspěvku byly hodnoceny čtyři úlohy použité při přijímacích zkouškách na MFF co do obtížnosti i vzájemné konzistence. Informace o úspěšnosti budoucího studia přijatých uchazečů nejsou k dispozici, takže vztah mezi výsledky přijímacího řízení a úspěšností dalšího studia nemohl být vyhodnocen. Poznamenáváme, že takový rozbor na základě dřívějších dat je publikován v článku [4].

Poděkování. Práce na tomto článku byla podpořena výzkumným záměrem MSM 0021620839 Metody moderní matematiky a jejich aplikace a projektem č. 362 Konstrukce a analýza didaktických testů.

L i t e r a t u r a

[1] Cronbach, L. J.: *Essentials of Psychological Testing.* 4th Edition. Harper & Row, 1984. (Table 6.2, p. 170; formula 2.4.)
[2] Hendl, J.: *Přehled statistických metod zpracování dat. Analýza a metaanalýza dat.* Portál, s. r. o., Praha 2004.
[3] Zvára, K.: *Měření reliability aneb bacha na Cronbacha.* Inf. Bull. České statist. společnosti *13* (2002), č. 2, 13–20.
[4] Zvára, K., Anděl, J.: *Souvislost výsledků přijímacího řízení s úspěšností studia na MFF.* Pokroky mat. fyz. astronom. *46* (2001), č. 4, 304–312.
[5] Zvára, K., Štěpán, J.: *Pravděpodobnost a matematická statistika.* 2. vydání. MATFYZPRESS, Praha 2001.