Ivan Hlaváček; Oldřich John; Alois Kufner; Josef Málek; Š. Nečasová; Jana Stará; Vladimír Šverák

Matematik Jindřich Nečas

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 49 (2004), No. 4, 302–317

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/141242`

Matematik Jindřich Nečas

I. Hlaváček, O. John, A. Kufner, J. Málek, Š. Nečasová, J. Stará, V. Šverák

V prosinci 2004 si připomeneme nedožité sedmdesáté páté narozeniny profesora Karlovy univerzity Jindřicha Nečase, předního českého matematika a světově uznávaného odborníka v oboru parciálních diferenciálních rovnic. Jindřich Nečas byl vskutku renesanční osobností: kromě matematiky a fyziky se zajímal o hudbu, filozofii, historii a další obory. Vše, co dělal, dělal s obrovským zaujetím. Jeho přirozená schopnost inspirovat ostatní a jeho zdánlivě nevyčerpatelná energie měly nezastupitelnou úlohu při vzniku moderní české školy parciálních diferenciálních rovnic. Mnoho matematiků vděčí za úspěšné začátky své dráhy jeho hlubokým znalostem, přehledu o vývoji teorie diferenciálních rovnic a jeho pozoruhodné intuici pro výběr správných problémů.

Mezi jeho důležité výsledky patří

(i) regularita slabých řešení eliptických systémů v okolí lipschitzovské hranice (v šedesátých letech byl Jindřich Nečas průkopníkem metody, jejímž základním kamenem byly rovnosti, které jsou dnes často nazývané Rellichovy-Nečasovy identity);

(ii) přínos k řešení problému regularity variačních integrálů, tj. k řešení 19. Hilbertova problému (Jindřich Nečas zkonstruoval v r. 1977 příklad, který ukázal, že odpověď na Hilbertovu otázku je negativní v dimenzi $n \geqq 5$);

(iii) zásadní příspěvek k teorii Navierových-Stokesových rovnic (Jindřich Nečas vyřešil mimo jiné problém takzvaných samopodobných řešení, který zformuloval v r. 1934 J. Leray).

Pokusme se alespoň trochu podrobněji Nečasův matematický vývoj popsat. Začněme stručným životopisem osobním.

Redakční rada časopisu Mathematica Bohemica nás vyzvala, abychom připravili článek o Jindřichovi Nečasovi, který by popsal tak podrobně, jak je na prostoru věnovaném jednomu článku možné, jeho matematické výsledky. Zdálo se nám vhodné, aby tento materiál byl dostupný i v češtině, a proto jsme se obrátili na redakční radu Pokroků matematiky, fyziky a astronomie s prosbou o otištění české verze tohoto článku. Považovali jsme za nutné, aby o jednotlivých obdobích Nečasova vývoje psali lidé, kteří se příslušnými oblastmi aktivně zabývají. Tak vznikl autorský kolektiv, který uvádíme v abecedním pořadí (v závorce jsou témata, kterým se každý jednotlivý autor věnoval): I. Hlaváček (mechanika, pružnost a plasticita, jednostranné úlohy v mechanice kontinua), O. John (regularita, nelineární teorie), A. Kufner (začátky Nečasova působení, prostory funkcí, lineární teorie, závěrečná úprava textu), J. Málek (mechanika tekutin), Š. Nečasová (mechanika tekutin, biografické a bibliografické podklady), J. Stará (regularita, nelineární teorie), V. Šverák (lineární teorie, regularita, mechanika tekutin). Rádi bychom poděkovali M. Feistauerovi za poznámky o vztahu Jindřicha Nečase k numerické matematice. Článek „In memoriam Jindřich Nečas", uveřejněný v časopise Mathematica Bohemica *129* (2004), 421–446, obsahuje úplnou bibliografii Jindřicha Nečase a odkazy na citované práce jiných autorů. Vzhledem k tomu, že celý seznam je velmi dlouhý, uvádíme zde pouze seznam monografií a odkazujeme zájemce o podrobnější studium na anglickou verzi.

Curriculum vitae

Jindřich Nečas se narodil v Praze 14. prosince 1929. Mládí prožil v Mělníku, kam se vždy rád vracel. V letech 1948–1952 studoval na Přírodovědecké fakultě Karlovy univerzity. Po krátkém intermezzu na Českém vysokém učení technickém (ČVUT) se stal aspirantem I. Babušky v Matematickém ústavu ČSAV (MÚ ČSAV). V r. 1957 obhájil kandidátskou práci a již v r. 1960 založil v MÚ ČSAV vlastní oddělení. V r. 1964 se stal docentem matematiky. Dalším mezníkem bylo v r. 1966 získání hodnosti doktora věd a v r. 1967 vydání první knihy. V témže roce se stal externím vedoucím katedry matematické analýzy na Matematicko-fyzikální fakultě UK (MFF UK) a v r. 1977 odešel z MÚ ČSAV na MFF UK definitivně. Ačkoliv byl dlouhá léta doma i v zahraničí uznávanou vědeckou osobností, politické poměry neumožňovaly, aby se stal profesorem. Profesorský titul získal až v r. 1990. Poslední léta svého života pracoval částečně v Praze (MFF UK) a v DeKalbu (University of Northern Illinois), kam posléze přešel natrvalo. V DeKalbu také dne 5. prosince 2002 po dlouhé a těžké nemoci zemřel.[1])

Na jeho odborný vývoj měly nepochybně značný vliv četné zahraniční pobyty. Jmenujme alespoň několik dlouhodobých a zvláště významných: Francie (Nancy 1962, Paříž 1981 a 1985), Itálie (Pisa 1966 a 1979, Řím 1977), USA (Chicago 1969–1970, DeKalb 1989 a posléze od r. 1991). Díky své otevřené povaze nacházel snadno cestu k lidem a získával si řadu přátel doma i v zahraničí. Nečasovy vědecké i lidské kvality byly oceňovány nejen v okruhu jeho spolupracovníků a žáků, ale i v širších souvislostech. Dne 28. 10. 1998 mu prezident České republiky Václav Havel udělil medaili za zásluhy. Byl držitelem čestného doktorátu Technické univerzity v Drážďanech a emeritním profesorem Univerzity Karlovy. Na univerzitě v Illinois se mu dostalo uznání udělením významného titulu Presidential Research Professor. Projednávání návrhu na udělení čestného doktorátu univerzity v Bayreuthu bylo přerušeno zprávou o Nečasově smrti.

Jak jsme řekli, vše, co Jindřich Nečas podnikal, podnikal s plným zaujetím. Pro všechny, kteří se s ním setkávali, bylo zdrojem optimizmu jeho nakažlivé a neutuchající nadšení pro matematiku. Novými nápady a idejemi doslova hýřil, někdy až marnotratně, a tak zasáhl do celé řady oblastí matematiky i aplikací, založil nejednu vědeckou školu a ovlivnil několik generací matematiků nejen doma v Čechách. Některé myšlenky se po jisté době vyčerpaly, jiné však zůstaly v centru jeho zájmu trvale.

[1]) V době úmrtí prof. Nečase bylo v České republice vzhledem k časovému posunu již 6. prosince. Proto některé zdroje uvádějí toto datum.

Začátky

Ihned po nástupu k I. Babuškovi do oddělení parciálních diferenciálních rovnic Matematického ústavu ČSAV se Jindřich Nečas zapojil do práce na tehdy průkopnické monografii „Matematické metody v teorii rovinné pružnosti“ [BRV] a do činnosti týkající se projektu, jímž tehdy žilo celé oddělení, totiž do prací, souvisejících — prakticky, ale i s výrazným teoretickým přínosem — s výstavbou vodního díla Orlík. Tato činnost ho přivedla jednak k mechanice, jíž zůstal vlastně věrný po celý život (a jež byla spolu s problematikou regularity jednou ze dvou konstant v jeho vědecké kariéře), jednak k aplikacím matematiky vůbec.

V souvislosti s projektem Orlík vznikly i jeho první česky psané práce [C1], [C2] a práce [C3], [C4] věnované Laplaceově transformaci. Z této aplikační partie Nečasova působení vychází i jeho kandidátská disertace o biharmonickém problému pro konvexní mnohoúhelníky. Obhájil ji v r. 1957 a její výsledky publikoval v článcích [C5], [C6] a [C8], v nichž se pomocí integrálních transformací řeší biharmonický problém na nekonečném konvexním a posléze i nekonvexním klínu. Těmito pracemi končí období Nečasových prvních kroků v matematice. Další výsledky jsou již publikovány ve světových jazycích.

Lineární teorie

Již v počátcích Nečasova odborného působení se začíná projevovat jeho příklon k obecnějšímu, abstraktnějšímu, teoretičtějšímu pohledu na zkoumané problémy. Práce [C9] ještě vychází z jeho předcházejícího výzkumu, když zkoumá okrajové podmínky pro biharmonický problém v rovinné oblasti s úhlovými body, ale je již výrazně poznamenána moderním pojetím. Za stěžejní rysy Nečasova postupu lze považovat:

(i) variační (hilbertovský) přístup k okrajovým úlohám (často se užívá také termín „přímé metody“);

(ii) užití metod, které lze aplikovat i na systémy rovnic a rovnice vyššího řádu;

(iii) regularita slabých řešení v oblastech, které nemají hladkou hranici, např. v lipschitzovských oblastech.

Motivací a prototypem studované úlohy pro Nečasovu práci na tematice z bodů (ii) a (iii) je Laméův systém lineární pružnosti na lipschitzovských oblastech, tj. na oblastech, jejichž hranice je lokálně grafem lipschitzovské funkce.[2])

Variační přístup spočívá v reformulaci okrajové úlohy jako abstraktní rovnice ve vhodném Hilbertově prostoru. Abstraktní rovnice může být často vyřešena díky obecným výsledkům (takovým výsledkem je např. Rieszova věta o reprezentaci nebo její

[2]) Ještě dnes zůstává mnoho základních otázek spojených s hraniční regularitou slabých řešení této úlohy otevřených. Hraniční regularita řešení eliptických systémů v oblastech s hladkou hranicí byla v zásadě vyřešena v sérii článků S. Agmona, A. Douglise a L. Nirenberga [ADN].

zobecnění, kterým je Laxovo-Milgramovo lemma). Řešení získané tímto postupem se nazývá slabé (zobecněné) řešení a často je možné dokázat i jeho jednoznačnost. Tento krok bývá obvykle relativně snadný. Podstatně obtížnější je zpravidla druhý krok, tj. důkaz, že slabé řešení je i řešením klasickým. Ve většině případů to znamená dokázat, že slabé řešení je dostatečně hladké — dostatečně regulární.[3])

Přímé metody jsou spojeny s pojmem Sobolevových prostorů. Pracovníci Babuškova oddělení v té době studují intenzivně základní Sobolevovu knihu [S]. Jindřich Nečas se ovšem i při tomto výzkumu výrazně osamostatňuje a jde svou vlastní cestou, poněkud odlišnou od Sobolevova přístupu, který je založen na reprezentaci funkcí pomocí integrálů typu potenciálu. K vyšetřování Sobolevových prostorů Jindřich Nečas využívá modernějšího Gagliardova přístupu.

Důležitou úlohu v Nečasově studiu hraniční regularity slabých řešení hraje Rellichova identita a její zobecnění. V nejjednodušším případě Laplaceova operátoru má Rellichova identita tvar

$$
\begin{aligned}
(1)\quad & \int_{\partial\Omega} (h_k\delta_{ij} - h_i\delta_{kj} - h_j\delta_{ik}) \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} n_k \, \mathrm{d}S = \\
& = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial h_k}{\partial x_k} \delta_{ij} - \frac{\partial h_i}{\partial x_k} \delta_{kj} - \frac{\partial h_j}{\partial x_k} \delta_{ik} \right) \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \, \mathrm{d}x - 2 \int_{\Omega} h_i \frac{\partial v}{\partial x_i} (\Delta v) \, \mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

kde $v \in W^{2,2}(\Omega)$, $h_i \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $i = 1, \ldots, n$. Jindřich Nečas tuto rovnost dokázal nezávisle, zobecnil ji a s úspěchem ji použil ke studiu hraniční regularity. Je-li např. u řešením rovnice $-\Delta u = f$ s okrajovou podmínkou $u = 0$ na lipschitzovské oblasti Ω, lze integrací per partes z (1) odvodit, že normálová derivace funkce u je integrovatelná s kvadrátem na hranici. Z duality pak lze dokázat řešitelnost Dirichletovy úlohy pro okrajové podmínky, které jsou v L^2. Tyto myšlenky se objevují v [C11].

Jindřich Nečas později zobecnil tyto výsledky v [C14] a [C24] a obě práce jsou dobře známé. Často se v této souvislosti užívá i názvu Nečasovy-Rellichovy rovnosti. Výzkum hraniční regularity slabých řešení na lipschitzovských oblastech je stále velmi aktuální.

Článek [C28] obsahuje další z významných výsledků J. Nečase. Týká se ekvivalence norem v Sobolevových prostorech na lipschitzovských oblastech. Nejjednodušší případ lze popsat nerovností

$$\|u - c\|_{L^2(\Omega)} \leqq C \|\nabla u\|_{W^{-1,2}(\Omega)},$$

kde c je průměr funkce u přes oblast Ω a Ω je omezená lipschitzovská oblast. Nerovnost lze chápat jako velmi podstatné zobecnění Poincaréovy nerovnosti a byla s úspěchem použita při řešení problémů z různých oborů.

K orientaci Jindřicha Nečase na nové metody řešení lineárních okrajových úloh nepochybně přispěly i jeho pobyty mj. u E. Magenese v Itálii a u J.-L. Lionse ve Francii. Stává se nadšeným propagátorem moderního přístupu, přednáší o nových metodách na MFF UK, přitahuje k sobě mladé lidi a lze říci, že zakládá svou první

[3]) Typickým příkladem věty o regularitě je Weylovo lemma (1940), které říká, že slabě harmonická funkce je už nutně hladká, a tudíž analytická.

vlastní školu. Je to vyjádřeno i formální změnou: Jindřich Nečas, nyní již skutečně výrazná vědecká osobnost, odchází v r. 1960 z oddělení I. Babušky a stává se vedoucím nového oddělení Matematického ústavu ČSAV, příznačně nazvaného oddělení teorie parciálních diferenciálních rovnic.

V práci [C18] se poprvé v Nečasově práci objevují Sobolevovy prostory s vahou. Podotkněme v této souvislosti, že Jindřich Nečas vždy zdůrazňoval důležitost volby vhodného prostoru funkcí, v němž hledáme řešení, tak, aby dobře odpovídal studované úloze. Inspiroval řadu matematiků, aby se věnovali speciálně studiu prostorů funkcí. To byl jeden z podnětů ke vzniku knihy [KJF] i ke vzniku semináře věnovaného prostorům funkcí, který založili Nečasovi žáci. Seminář s touto tematikou pracuje v Matematickém ústavu Akademie věd dodnes a jeho význam přesahuje rámec České republiky. Mezi jeho aktivity patří od r. 1978 i organizování pravidelných jarních škol, z nichž jsou vydávány sborníky — zmiňme alespoň první [P1] a poslední [P2] z nich.

Jindřich Nečas se ovšem zabýval teorií Sobolevových prostorů nejen proto, aby získal nové výsledky, ale i z hlediska metodiky jejich výkladu. Ukazuje to především práce [C17] z r. 1962, která — ač bývá poněkud opomíjená — má pro vyšetřování Sobolevových prostorů funkcí fundamentální význam. Jindřich Nečas v ní po dlouhém uvažování a hledání našel velmi účinnou a užitečnou formu popisu geometrie oblastí, na nichž se tyto prostory a okrajové úlohy studují. Tento popis pak důsledně využíval nejen on, ale i jeho žáci a pokračovatelé. Nebudeme zde podávat podrobný výklad jeho „oblastí typu $\mathcal{N}$“, uveďme jen, že velmi těsně souvisejí s tím, čemu se dnes říká „oblast s lipschitzovskou hranicí“ nebo „oblast s vlastností kužele“. V uvedené práci dokázal rovněž existenci „regularizované vzdálenosti od hranice“ pro oblasti tohoto typu, tj. funkce $\sigma \in C^\infty(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, která je ekvivalentní vzdálenosti $\operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$ a pro niž platí

$$|D^\alpha \sigma| \leqq C\sigma^{1-|\alpha|}.$$

(Stojí za zmínku, že mnohem později můžeme tento výsledek najít v [TR], [ST] pro vzdálenost od zcela obecných množin.)

J. Nečas svůj přístup, který je aktuální i dnes, široce používal ve svých přednáškách od r. 1962. Text přednášek z r. 1962–63 byl rozmnožen a vydán v MÚ ČSAV (viz [B2]). Tyto přednášky tvoří jeden ze základních stavebních kamenů jeho první monografie [A1] z r. 1967, v níž shrnul kromě vlastních výsledků vyčerpávajícím způsobem i tehdejší stav lineární teorie. Monografie [A1] je vyvrcholením lineární etapy v tvorbě Jindřicha Nečase, vyvrcholením výzkumu v oblasti okrajových úloh pro lineární eliptické rovnice. Podstatné je také, že představuje současně i jednu z prvních učebnic teorie Sobolevových prostorů, jež vyšla osm let před monografií Adamsovou z r. 1975. Jindřich Nečas napsal knihu ve své oblíbené francouzštině, i když v této době již začínala převládat v komunikaci v matematice angličtina. Přesto měla veliký ohlas a stala se jedním z nejcitovanějších děl české matematiky. Je škoda, že nevyšla její anglická verze ani překlad do ruštiny, o které Jindřich Nečas usiloval.

Již během lineárního období, brilantně završeného uvedenou monografií, dostávaly se do popředí Nečasova zájmu dvě úzce související oblasti: funkcionálně analytický přístup k nelineárním úlohám a hledání odpovědi na otázku regularity slabých řešení.

Nelineární období

Jindřich Nečas se začal věnovat nelineárním úlohám ve druhé polovině šedesátých let; první práce na toto téma ([C25]–[C28]) vyšly již v r. 1966. Příklon k nelineární problematice jistě ovlivnily i Nečasovy zahraniční cesty (účast na letní škole o nelineárních rovnicích v Montrealu v r. 1965, setkání s F. E. Browderem jednak na této škole a jednak v r. 1966 a rovněž setkání s J. Lerayem v r. 1966). Na montrealské škole přednášel Jindřich Nečas také o svých výsledcích o ekvivalentních normách v Sobolevových prostorech se zápornými derivacemi ([C28]), jejichž důležitost prokázala teprve budoucnost. Spolu se svými žáky organizuje J. Nečas v tomto období letní školy, na něž zve přední odborníky. Zdůrazněme, že i když školy měly svou jasně určenou tematiku, nebyl výběr přednášejících nikdy příliš úzký. Jindřich Nečas vždy chtěl, aby tematika byla osvětlena z různých hledisek a nahlížena v nečekaných souvislostech. Na přátelskou atmosféru těchto škol lze jen těžko zapomenout. Připomeňme některé z nich i s jejich význačnými přednášejícími:

- Richtrovy boudy (1966): J. Leray. M. M. Vajnberg, R. Finn, E. Giusti, G. Da Prato;
- Tupadly (1969): E. Heinz, W. Jäger, W. E. Fleming, R. Payne, E. Giusti;
- Babylon (1970): Melvyn S. Berger a Marion S. Berger, G. Prodi, S. Spagnolo, E. S. Citlanadze, A. Pultr, H. Triebel;
- Podhradí nad Sázavou (1973): G. Anger, V. Barbu, H. Brézis, S. Dümmel, J. Král, S. N. Kružkov, I. Vrkoč.

Od konkrétních nelineárních úloh (viz např. [C38] či nelineární úlohy Sturmovy-Liouvilleovy pro rovnice 2. a 4. řádu v [C44], [C45]) však Jindřich Nečas brzy přešel k obecným otázkám existence řešení nelineárních rovnic, především ke spektrální teorii nelineárních operátorů. Té byla věnována monografie [A2], kterou vydal se třemi spoluautory (S. Fučíkem a J. a V. Součkovými) v r. 1973. Okruh studovaných otázek je obdobný jako v případě lineárních operátorů a můžeme ho shrnout do dvou skupin:

1. Řešitelnost rovnice

$$\lambda x - A(x) = f. \tag{2}$$

2. Zkoumání množiny Λ všech vlastních čísel.

Klasická funkcionální analýza dává v lineárním případě odpověď ve Fredholmově alternativě: Je-li A kompaktní lineární, nezáporný a samoadjungovaný operátor na reálném Hilbertově prostoru H, pak je rovnice (2) jednoznačně řešitelná pro každou pravou stranu $f \in H$ právě tehdy, když má rovnice $\lambda x - A(x) = 0$ pouze triviální řešení, tj. λ není vlastní číslo operátoru A. Množina Λ je nejvýše spočetná množina nezáporných čísel, jejím jediným možným hromadným bodem je nula, a seřadíme-li prvky množiny Λ do nerostoucí posloupnosti $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, platí Courantův-Weinsteinův princip

$$\lambda_n = \max_{H_n \in M} \min_{\substack{x \in H_n \\ x \neq 0}} \frac{\big(A(x), x\big)}{(x, x)}\,,$$

kde M je množina všech n-rozměrných podprostorů prostoru H.

V nelineárním případě jde o rovnici

$$\lambda T(x) - S(x) = f. \tag{3}$$

V případě, že T a S jsou a-homogenní a liché operátory z Banachova prostoru X do Banachova prostoru Y a předpokládáme-li, že S je spojitý a kompaktní a T se chová „jako identita“ (přesněji T je homeomorfismus X na Y a existují kladná čísla K, L, a tak, že $L\|x\|_X^a \leqq \|T(x)\|_Y \leqq K\|x\|_X^a$), platí o řešitelnosti rovnice (3) analogie první části Fredholmovy alternativy: rovnice má řešení pro každou pravou stranu $f \in Y$ právě tehdy, když má rovnice $\lambda T(x) - S(x) = 0$ pouze jediné řešení $x = 0$. Obdobné výsledky platí i pro operátory blízké homogenním. Velmi účinné zde byly topologické metody důkazů: Lerayův-Schauderův stupeň zobrazení, Ljusternikovy-Šnirelmanovy kategorie a studium kritických bodů funkcionálů na sférách. V monografii je definován stupeň zobrazení v nekonečněrozměrném prostoru a jsou dokázány jeho základní vlastnosti (homotopie, Borsukova věta) a zobecnění řady výsledků z lineární funkcionální analýzy (nelineární verze Fredholmovy alternativy). V Nečasových článcích i v článcích jeho spolupracovníků S. Fučíka, M. Kučery je v řadě netriviálních případů zkoumána otázka řešitelnosti úlohy (3) v případě, že λ je vlastním číslem dvojice operátorů T, S.

Zcela zásadní částí monografie jsou výsledky v oboru charakterizace množiny vlastních čísel. Uveďme další důsledek Courantova-Weinsteinova principu. Označíme-li pro lineární symetrický operátor A na Hilbertově prostoru H

$$g(x) = \big(A(x), x\big), \quad f(x) = (x, x), \quad \forall x \in H,$$

potom je vlastní vektor x_n kritickým bodem funkcionálu g vzhledem ke sféře $M_1 = \{x \in X\colon f(x) = 1\} = \{x \in X\colon \|x\| = 1\}$ a $\lambda_n/2$ je kritickou hodnotou funkcionálu g. Buďte f, g dva nelineární funkcionály na Banachově prostoru X a f' a g' jejich Fréchetovy derivace. Řekneme, že λ je vlastní číslo dvojice f', g' a x ($\|x\|_X = r$) je příslušný vlastní vektor, jestliže

$$\lambda f'(x) - g'(x) = 0.$$

Pro kvadratické funkcionály je pak množina všech takto definovaných vlastních čísel $1/r$-násobkem množiny všech kritických hodnot funkcionálu g na varietě $M_r(f) = \{x \in X\colon f(x) = r\}$. Obdobný vztah platí pro homogenní funkcionály. Analogií Courantova-Weinsteinova principu je Ljusternikova-Šnirelmannova teorie. Pojem dimenze lineárního podprostoru je nahrazen pojmem kategorie množiny, který je topologickým invariantem (byl definován L. Šnirelmannem). Užitím této teorie bylo možné dokázat, že množina kritických hodnot na každé varietě $M_r(f)$ s kladným r je alespoň spočetná. V monografii [A2] a v článcích J. Nečase se S. Fučíkem a J. a V. Součkovými je dokázán velice zajímavý výsledek, který dává horní odhad množiny kritických hodnot. Odhad je založen na hlubokém zobecnění Morseovy-Sardovy věty pro reálně analytické funkce v nekonečněrozměrných prostorech. Obecnou teorii autoři aplikovali na širokou škálu problémů od okrajových úloh pro obyčejné a parciální diferenciální rovnice až po rovnice integrální a integro-diferenciální.

Zájem o mechaniku kontinua a o jednostranné úlohy přivedl Jindřicha Nečase k jiné nelineární disciplíně — k variačním nerovnicím. Tato oblast se vymyká teorii, kterou jsme zde popsali, protože nejsou splněny základní předpoklady — lichost a hladkost příslušných nelineárních operátorů. I zde je ale možné definovat vlastní čísla a studovat jejich existenci a počet, jakož i jejich souvislost s řešitelností nerovnice. Nečas opět dosáhl originálních výsledků a přivedl k této problematice M. Kučeru a později P. Quittnera, kteří se stali uznávanými odborníky v tomto oboru.

Práce Jindřicha Nečase z tematiky nelineárních operátorů a nelineárních eliptických systémů vznikají až do osmdesátých let, ale stále více se prolínají s dalšími oblastmi jeho zájmu. Vedle teoretického výzkumu jsou to hluboké problémy v matematických modelech mechaniky kontinua, v modelech popisujících proudění stlačitelných i nestlačitelných tekutin a především v pružnosti a plasticitě. Jisté vyvrcholení jeho výzkumu v oblasti nelineárních eliptických systémů představuje monografie [A6], která vyšla v r. 1983 u Teubnera a ve druhém vydání v r. 1986 u Wileyho. Část knihy shrnuje získané poznatky o nelineárních operátorech (Fredholmova alternativa, problémy v rezonanci), větší část knihy však tvoří výsledky o regularitě slabých řešení eliptických systémů, o kterých pojednáme v dalším odstavci.

Regularita

Už jsme se zmínili o tom, že studium zobecněných řešení okrajových úloh pro parciální diferenciální rovnice přivedlo Jindřicha Nečase již v počátcích jeho vědecké dráhy ke zkoumání jejich kvalitativních vlastností, především ke zjišťování regularity těchto slabých řešení. Tato úloha úzce souvisí s klasickým 19. a 20. Hilbertovým problémem a zaměstnávala celou řadu matematiků světových jmen.

19. a 20. Hilbertův problém se týká existence a regularity funkcí minimizujících (za vhodných podmínek) variační integrál

$$\int_{\Omega} F(x, u, \nabla u)\, \mathrm{d}x \tag{4}$$

a analogických úloh vyššího řádu. (Takové funkce budeme v dalším textu nazývat minimizéry.) Jindřich Nečas začal v tomto oboru aktivně pracovat v r. 1965, inspirován sérií přednášek F. Browdera na letní škole v Montrealu.

První Nečasův důležitý výsledek ([C33]) může být interpretován jako vysoce netriviální zobecnění zásadního výsledku Ch. B. Morreyho z r. 1938. Morrey dokázal úplnou regularitu minimizérů funkcionálu (4) v rovině za předpokladu, že F má kvadratický růst (a splňuje některé další předpoklady). J. Nečas v [C33] tento výsledek dokázal pro velkou třídu funkcionálů s růstem $p > 1$, které mohou záviset i na derivacích vyššího řádu. Základním kamenem důkazu je verze známého Meyersova $L^{2+\varepsilon}$-odhadu pro rovnice vyššího řádu, která je rovněž dokázána v [C33]. Nečasova metoda důkazu byla s úspěchem použita i v jiných situacích, například při důkazu regularity stacionárních řešení některých modelů mechaniky tekutin.

Důležitým milníkem ve studiu regularity minimizérů integrálů (4) v dimenzích větších než 2 byl vynikající výsledek E. De Giorgiho a J. Nashe z r. 1957. Oběma autorům se podařilo nezávisle na sobě dokázat regularitu minimizérů v libovolné dimenzi za předpokladu, že neznámé funkce u jsou skalární. Metodou důkazu bylo precizní studium případu lineární rovnice s nehladkými koeficienty pro skalární funkci u. (Různé podstatné aspekty problému, jakými je např. optimální závislost funkce F na proměnné u, byly objasněny později O. A. Ladyženskou a N. N. Uralcevou.) Tyto výsledky nechaly otevřený případ vektorové neznámé funkce u v prostorech dimenze alespoň tři. V r. 1968 E. De Giorgi a V. G. Maz'ja nezávisle na sobě zkonstruovali příklady ukazující, že odhady řešení lineárních rovnic, které umožnily důkaz regularity ve skalárním případě, pro vektorové funkce neplatí. Tyto příklady později prohloubili E. Giusti a M. Miranda, nicméně původní problém zůstal otevřen až do r. 1977. V tomto roce J. Nečas ukázal, že v prostorech o dimenzi alespoň pět lze zkonstruovat analytickou funkci F, která nezávisí na x a u, je stejnoměrně konvexní v ∇u, má omezené druhé derivace a minimizér integrálu (4) je singulární. Poznamenejme, že konvexita F zaručuje jednoznačnost minimizéru pro Dirichletovu okrajovou úlohu a umožňuje identifikovat minimizér se slabým řešením odpovídající okrajové úlohy.

Nečasův protipříklad je stejně překvapující dnes jako v r. 1977, kdy se poprvé objevil. Další výsledky související s tímto problémem lze nalézt v [C103], [C172], [MA], [SOU], [SJ]. Mnoho základních otázek, týkajících se regularity minimizérů ve vektorovém případě, zůstává stále otevřeno. Nejsou např. známy žádné příklady nehladkých minimizérů ve třídách funkcí, které zobrazují třírozměrnou oblast Ω do $\mathbb{R}^3$ (za adekvátních předpokladů na funkci F). Další výsledky v tomto směru lze najít v článcích [SY] a [MS].

V r. 1979 J. Nečas s M. Giaquintou v [C96] dokázali zajímavou souvislost mezi regularitou řešení nelineárních eliptických systémů a analogií Liouvilleovy podmínky. V kontextu variačních integrálů typu (4) s $F(x,u,\nabla u) = F(\nabla u)$ lze myšlenku zformulovat takto: regularita minimizérů integrálu (4) je ekvivalentní tomu, že každé lipschitzovské řešení příslušné Lagrangeovy-Eulerovy rovnice v celém prostoru je nutně lineární. (Věty podobného zaměření se objevily dříve i v teorii minimálních ploch.)

Užití Liouvilleovy podmínky k důkazu regularity minimizérů samo o sobě nevypadá příliš nadějně. Jindřich Nečas však ukázal, že některé doplňující předpoklady o struktuře koeficientů systému verifikaci Liouvilleovy podmínky umožňují. Ve společné práci [C112] s P.-L. Lionsem a I. Netukou podal nový důkaz regularity soustav, které studovala K. Uhlenbecková a jejichž koeficienty závisejí pouze na $|\nabla u|$. V přednáškách [B7] ze Scuoly Normale Superiore di Pisa, vydaných v r. 1979 v ediční řadě této instituce, pak publikoval nový důkaz některých výsledků A. I. Koševela týkajících se soustav, pro něž zobrazení $\nabla u \to F(x,u,\nabla u)$ je dostatečně blízké k $|\nabla u|^2$. Jednoduššími metodami důkazu obdobných tvrzení se zabýval v [A6]. Mnoho fundamentálních problémů souvisejících s touto myšlenkou zůstává stále otevřeno.

Nelineárními soustavami parabolického typu se začal J. Nečas zabývat poměrně pozdě a intenzivně se jim věnoval krátkou dobu. I zde však přispěl k rozvoji problematiky zásadním způsobem. V roce 1991 publikoval společně s V. Šverákem článek

([C151]), který se zabývá regularitou slabých řešení soustavy

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}\big(A\nabla u)\big), \tag{5}$$

kde $u = \big(u_1(z), u_2(z), \ldots, u_N(z)\big)$, $z = (x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$ a A je silně monotonní zobrazení.[4]) V článku, který byl vzápětí hojně citován, je dokázána lokální hölderovskost slabých řešení pro $n \leqq 4$ a lokální hölderovskost prostorového gradientu v případě $n \leqq 2$. (Důsledkem je pak úplná regularita řešení.) Důkaz je založen na velmi netriviálním zobecnění Meyersova $L^{2+\varepsilon}$-odhadu (viz [MEY]) pro parabolické systémy. Tyto odhady umožňují převést časovou derivaci na pravou stranu rovnice a užít technik známých pro eliptický případ.

Poznamenejme, že je stále otevřený problém, zda v případě dvou prostorových dimenzí lze z $L^{2+\varepsilon}$-odhadu dokázat hölderovskost řešení. (Odtud by samozřejmě plynula úplná regularita, podobně jako je tomu v eliptickém případě.) V prostorové dimenzi $n \geqq 3$ eliptické i parabolické příklady ukazují, že podobné tvrzení nemůže platit.

Mechanika a proudění

Nečasovy počátky, kdy byl veden ke studiu matematických základů teorie pružnosti, se projevily tím, že mechanice kontinua zůstal věrný po celý svůj život a vždy znovu a znovu se k ní vracel. Již v r. 1977 založil seminář mechaniky kontinua, který pravidelně navštěvovali studenti, učitelé a vědečtí pracovníci UK, ČVUT, ČSAV i výzkumných ústavů, a na MFF UK přednášel teorii pružnosti. Tato přednáška spolu se seminářem dala podnět ke vzniku úspěšné knihy [A4], obsahující řadu výsledků J. Nečase a jeho spolupracovníků.

Jindřich Nečas se většinou soustředil na nelineární problémy fyziky a techniky, ale i zde byl jeho přínos k lineární teorii podstatný. V pracích [C42], [C43] našel relativně jednoduché algebraické kritérium, ekvivalentní s koercivitou obecného systému lineárních diferenciálních operátorů. Tento výsledek, představující příspěvek k problému nerovností Kornova typu, má mnoho aplikací, neboť umožňuje ověřit elipticitu okrajových úloh pro soustavy parciálních diferenciálních rovnic mechaniky, matematické fyziky a techniky. Práce [C75] představuje příspěvek k řešitelnosti nelineárních von Kármánových rovnic pro velké deformace pružných desek.

Mezi Nečasova oblíbená témata v mechanice patřily jednostranné úlohy, které mohou být modelovány variačními nerovnostmi. To je další z oblastí, v nichž J. Nečas dosáhl důležitých výsledků. Spolu s J. Haslingerem, I. Hlaváčkem a J. Lovíškem napsali monografii [A5], která vyšla ve slovenštině a byla přeložena do ruštiny a angličtiny. Kniha je vynikajícím úvodním textem v oboru, ale obsahuje i řadu hlubokých původních výsledků autorů. Zdá se, že zde a také v [C100] byla poprvé dokázána existence řešení modelu kvazistatického jednostranného kontaktu s Coulombovým

[4]) Pokud A splňuje pouze Legendreovu-Hadamardovu podmínku, tvrzení o regularitě neplatí ani pro řešení u nezávislá na t.

třením. Semikoercivní jednostranné kontaktní problémy jsou diskutovány a řešeny v [C74].

Jindřich Nečas také podstatně přispěl k matematické analýze tečení plastických materiálů, když dokázal existenci a jednoznačnost řešení modelů dokonale plastických těles a modelů s izotropním nebo kinematickým zpevňováním. Jako velmi efektivní důkazová metoda se ukázala metoda penalizace.

V r. 1977 se živě zajímal o existenční teorii publikovanou J. Ballem. S P. G. Ciarletem studovali možnost rozšíření této teorie na jednostranné kontaktní úlohy (viz [C120], [C122], [C123]).

Jindřich Nečas se zajímal o zvládnutí matematických modelů nejrůznějších materiálů. Z následujícího výčtu je patrna šíře jeho záběru. Zabýval se dynamikou pružně plastických těles a dokázal existenci a jednoznačnost řešení v [C92]. Později se věnoval nelineární termoelasticitě ([C143], [C147], [C140]). V práci [C143] diskutuje problém tuhnutí jako úlohu s pohyblivou hranicí. V [C142] a [C156] analyzuje viskoelastické materiály a nestlačitelné multipolární materiály.

Jindřich Nečas přispěl i k přibližným metodám řešení problémů mechaniky pevných látek. Často byly důkazy teoretických výsledků založeny na metodách, které naznačovaly cestu k přibližným metodám řešení (např. Kačanovova metoda v práci [C65] a její použití v nelineární teorii plastických deformací [C117], Galerkinova metoda v [A11]).

Budeme-li se při zjišťování doby, kdy se Jindřich Nečas začal zabývat mechanikou tekutin, řídit pouze seznamem publikací, můžeme získat dojem, že jeho přínos tomuto oboru začal v osmdesátých letech při studiu transonického potenciálního proudění.[5]) Podrobnosti lze nalézt v knize [GR] pro hilbertovskou strukturu, obecněji v [AG] a v přednáškách L. Tartara [TA].

Nečasův zájem o problematiku transonického proudění podnítil v Praze J. Polášek, který se touto tematikou dlouhodobě zabýval, a ve Francii R. Glowinski a O. Pironneau, s nimiž se J. Nečas setkal v r. 1981 při pobytu v Paříži. Nečas se zabýval myšlenkou Glowinského a Pironneaua (viz [GP]), že podmínky entropie vyloučí „nefyzikální“ řešení modelu transonického proudění. Tato myšlenka našla vyjádření ve formě aposteriorních podmínek entropie ve článcích [C119], [C121], [C124], [C126] a [C127]. Výsledky byly posléze shrnuty v Nečasově monografii ([A10]) a jsou stručně shrnuty i v monografii M. Feistauera ([FE]).

Studium modelů transonického proudění vedlo k důležitým pozitivním výsledkům, ale Nečas si byl dobře vědom i jeho nedostatků. I to je důvod, proč se ve druhé polovině osmdesátých let jeho zájem obrací k úplnému systému rovnic mechaniky tekutin, zahrnujícímu zákony zachování hmoty, hybnosti i energie. Obtížnost této soustavy rovnic je notoricky známá. První významnou prací z této oblasti je [C139],

---

[5]) Povšimněme si však, že dva z důležitých výsledků teoretické mechaniky tekutin — existence tlaku pro stacionární proudění nestlačitelných kapalin a řešitelnost rovnice

$$\operatorname{div} u = f \quad \text{na } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{na } \partial\Omega,$$

lze získat jako důsledek Nečasovy věty o ekvivalentních normách v Sobolevově prostoru se záporným exponentem, publikované již v r. 1966 v [C28].

ukazující, jak je tento problém v celé své hloubce neobyčejně složitý. Východiskem, které Jindřich Nečas zvolil, bylo zobecnění konstitutivních rovnic. Přesněji řečeno byly studovány tekutiny, jejichž Cauchyův tenzor napětí závisí (kromě prvního) i na vyšších gradientech rychlosti. Bylo samozřejmě velmi důležité, aby toto zobecnění bylo v souladu s fyzikálními principy. Spolu s M. Šilhavým vytvořil J. Nečas teorii multipolárních stlačitelných tekutin i pevných pružných těles, která je v souladu s druhým termodynamickým zákonem a respektuje z fyzikálního hlediska zcela přirozený princip nezávislosti na pozorovateli. V práci [C150] J. Nečas a M. Šilhavý klasifikovali takové modely (viz též [C146]). V rámci této teorie bylo možné ve vhodných prostorech dokázat globální existenci řešení spolu s jeho kvalitativními vlastnostmi (viz [C138], [C154], [C156]).

Velkou výzvou teorie nelineárních parciálních diferenciálních rovnic zůstávala a stále zůstává otázka existence hladkého řešení evolučních Navierových-Stokesových rovnic a jednoznačnost takového řešení ve třech prostorových dimenzích. (To je opět jeden z problémů regularity, o nichž jsme hovořili již dříve.) Tento fundamentální a stále nevyřešený problém byl v centru zájmu Jindřicha Nečase v posledních deseti letech.[6])

Vraťme se ještě k historii tohoto problému. Jean Leray v r. 1939 [LE] nejen zkonstruoval globální slabé řešení Navierových-Stokesových rovnic, ale navrhl i postup, jak zkonstruovat singulární slabé řešení v takzvaném samopodobném tvaru. Povšiml si totiž, že vznik singularity ve třírozměrných Navierových-Stokesových rovnicích je kompatibilní se všemi v té době známými vlastnostmi rovnic. Uvědomil si, že nelze vyloučit ani singularity tvaru

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{T-t}}\, U\Big(\frac{x}{\sqrt{T-t}}\Big), \qquad p(x,t) = \frac{1}{T-t}\, P\Big(\frac{x}{\sqrt{T-t}}\Big),$$

kde T je čas dosažení neomezené rychlosti (stále častěji užívaný termín je „čas, v němž dochází k blow up řešení“) a funkce U, P jsou řešením systému rovnic

$$\operatorname{div} U = 0; \qquad U + y_k U_{,y_k} + U_k U_{,y_k} - \Delta U + \nabla P = 0. \tag{6}$$

Je zřejmé, že pokud nalezneme netriviální řešení tohoto systému rovnic splňující jisté růstové podmínky v nekonečnu, získáme kladnou odpověď na otázku existence řešení, které v konečném čase T vyvine singularitu a které je kompatibilní se všemi do té doby známými vlastnostmi Navierových–Stokesových rovnic. Mimo jiné jsou takové singularity kompatibilní s disipací energie způsobenou viskozitou, jsou kompatibilní

[6]) Připomeňme, že jde o třetí ze seznamu sedmi „Millenium Prize Problems“ (viz internetovou adresu `http://www.claymath.org/millenium/`), které zveřejnil Clay Mathematics Institute. Cenu v hodnotě až jednoho milionu dolarů získá ten, kdo dokáže jedno z následujících tvrzení: (i) Pro libovolnou počáteční podmínku u_0 hladkou na $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ existuje řešení u okrajové úlohy pro Navierovy-Stokesovy rovnice hladké na $\Omega \times (0,\infty)$. (Existence a jednoznačnost hladkého řešení.) (ii) Existuje hladká počáteční funkce u_0 na $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ taková, že odpovídající řešení u Navierových-Stokesových rovnic na $\Omega \times (0,T)$ pro nějakou okrajovou úlohu dosáhnou v konečném čase T neomezené rychlosti. (Existence singulárního řešení.) Nečasův názor na to, která z obou těchto protichůdných otázek má kladnou odpověď, velmi kolísal a tyto změny byly jeho oblíbeným zdrojem žertů.

i se všemi výsledky o regularitě řešení, které byly dokázány perturbačními technikami (mezi takové podmínky patří např. Ladyženské, Serrinovy a Prodiho podmínky nebo kritéria regularity z práce Caffarelliho, Kohna, Nirenberga a Sheffera). Není však zřejmé, zda netriviální řešení systému (6) existuje. Odpověď zůstala neznámá více než 60 let. Jindřich Nečas spolu s M. Růžičkou a V. Šverákem v [C171] postřehli, že je-li dvojice U, P řešením soustavy (6), pak pro veličinu $\frac{1}{2}|U|^2 + P + y \cdot U$ platí princip maxima. Z této skutečnosti a za různých předpokladů na chování U a P v nekonečnu lze odvodit, že neexistuje netriviální Lerayovo řešení na celém prostoru. (Mezi takové postačující předpoklady patří např. $U \in W^{1,2}(\mathbb{R}^3)$, $U \in L^3(\mathbb{R}^3)$, resp. $U \in L^q(\mathbb{R}^3)$ pro $q > 3$; viz [C175], [C171], [TS].) (Podobný výsledek na poloprostoru byl jinými metodami dokázán v práci [ESS].)

Je možná na místě citovat zde z dopisu, který napsal Jean Leray J. Nečasovi a jeho spoluautorům v r. 1996 poté, co dostal článek s tímto výsledkem.

„... En 1934 j'avais prouvé qu'en dimension spatiale 3, pour Navier-Stokes, le problème de Cauchy sans bord possède toujours au moins une solution, régulière ou non; (si elle est régulière, elle est unique; elle est régulière en dimension spatiale 2. Je croyais avoir trouvé, en dimension spatiale 3, un moyen de construire, peut-être, une solution non régulière «self-similar». Votre note et votre texte plus détaillé réussissent à prouver très ingénieusement qu'une telle solution «self-similar» n'existe pas. Je vous en félicite vivement.

J'ai longuement réfléchi, après votre lettre, à ma question de 1934: pour Navier-Stokes la solution du problème de Cauchy peut-elle être non-régulière? A mon grand regret il est sage que je cesse d'y penser. Henri Lebesgue me l'avait conseillé dès 1935!“

S otázkou „blow up“ pro Navierovy-Stokesovy rovnice přirozeně souvisí i obdobný problém pro Eulerovu rovnici. J. Nečas se živě zajímal o tuto problematiku. Numerické výsledky, ukazující blow-up pro Eulerovu rovnici, lze nalézt v [C180]. Další příspěvek ke studiu Eulerovy rovnice obsahuje [C184].

Na závěr se zmíníme ještě o jednom výsledku, k němuž přivedl Jindřicha Nečase jeho dlouholetý zájem o regularitu slabých řešení. O. A. Ladyženská ([LA]) iniciovala studium nestlačitelných tekutin, jejichž viskozita ν není konstantní, ale závisí na symetrickém gradientu rychlosti D:

$$\nu(|D|^2) = \nu_0 + \nu_1 |D|^{r-2}, \quad \nu_0, \nu_1 > 0, \tag{7}$$

a dokázala existenci globálních slabých řešení pro odpovídající evoluční systém ve třech dimenzích za předpokladu, že $r \geqq \frac{11}{5}$. Uvědomíme-li si, že globální slabé řešení pro Navierův-Stokesův systém (odpovídá případu $r = 2$, $\nu_1 = 0$) rovněž existuje, lze očekávat, že i pro viskozity ve tvaru (7) by řešení mělo existovat pro $r \geqq 2$. Tento výsledek se podařilo dokázat v sérii článků [C160], [C162], [C178] a v knize [A11].

Použijeme-li vhodných aproximací Navierovy-Stokesovy soustavy, je základním problémem v důkazu existence řešení limitní přechod v nelineárním členu nahrazujícím Laplaceův operátor v klasických Navierových-Stokesových rovnicích. Tento limitní přechod je obvykle důsledkem kompaktnosti ve vhodných prostorech. Stejnoměrný odhad druhých derivací rychlosti by sice limitní přechod umožnil, ale je otevřenou otázkou srovnatelnou s problémem (i) výše, zda takový odhad platí. Limitní přechod byl vyřešen díky vtipnému odhadu

$$\int_0^T \frac{\|\nabla^2 v^\varepsilon(t)\|_2^2}{(1+\|\nabla v^\varepsilon(t)\|_2^2)^\lambda}\,\mathrm{d}t \leqq C,$$

kde C nezávisí na ε.

Nečasova klíčová úloha v parciálních diferenciálních rovnicích stejně jako jeho snaha o umožnění nových kontaktů pro mladé matematiky vedla k zahájení (a úspěšnému pokračování) série jarních škol o mechanice tekutin v Pasekách nad Jizerou. Jindřich Nečas spolu s J. Málkem a M. Rokytou byli pravidelnými organizátory této série. O její úspěšnosti svědčí nejen řada vynikajících matematiků mezi přednášejícími a bohatá domácí i zahraniční účast, ale i sborníky vycházející v renomovaných nakladatelstvích.

V souvislosti s aktivitami Jindřicha Nečase v mechanice a v jiných aplikacích je třeba se zmínit o jeho vztahu k numerické matematice. Pro Jindřicha Nečase bylo typické, že se neuzavíral do světa čisté matematiky a neobklopoval se pouze spolupracovníky zabývajícími se funkcionální analýzou a parciálními diferenciálními rovnicemi. Vždy ho velice zajímala praktická realizace modelů, kterými se zabýval z teoretického hlediska. Zvláště vřelý vztah měl proto k numerické matematice. To bylo důvodem, proč právě mezi numeriky v Čechách i v zahraničí nacházel řadu přátel a spolupracovníků.

Svými teoretickými pracemi, zejména v oblasti slabých řešení parciálních diferenciálních rovnic, silně ovlivnil řadu odborníků zabývajících se metodou konečných prvků.

Na závěr

Jindřich Nečas byl vynikající matematik a jeden ze zakladatelů české školy moderní teorie parciálních diferenciálních rovnic. Jeho schopnost inspirovat pomáhala mladým matematikům v jejich odborné kariéře. Jeho optimismus a nadšení pro matematiku si budou pamatovat mnozí, kteří jej potkali. Jeho výsledky budou ovlivňovat vývoj parciálních diferenciálních rovnic ještě dlouhou dobu.

Předchozí text byl především pokusem o popis přínosu Jindřicha Nečase české i světové matematice, a jen něco málo zde čtenář mohl najít i o tom, jak ho viděli jeho žáci a spolupracovníci a co všechno pro ně znamenal. Tato fakta, jakož i zhodnocení Jindřichova vlivu na jeho žáky a vlivu žáků Jindřicha Nečase na jejich žáky, vyžadují ještě další časový odstup. Zakončeme alespoň vzpomínkou, kterou několik zahraničních přátel věnovalo Jindřichově památce.

Ch. Simader, Bayreuth: … The scientific community of the whole world, not only that from the Czech Republic or from the Charles University lost an outstanding mathematician who influenced decisively with his fundamental contributions for more than half a century central fields of real analysis like partial differential equations, functional analysis and function spaces. His skill in teaching and his friendly attitude towards students made him an extremely successful academic teacher too. I liked him so much. Let me mention another thing: I often talked with J. N. on recent history and I estimated highly that I never felt resentments against me as a German. Although he was a representative of a generation who very much suffered from the war and the occupation by Germans and as a consequence of this war, by 40 years of communism. ...

J. Heywood, Vancouver: ... He was very important to our community, for his scientific contributions, of course, and also, I am especially thinking now, for his friendship, and for his enthusiasm for our subject. I'll always remember the enthusiastic greeting and hug he gave me on my arrival for my first Paseky Winter School in 1993. That school was a wonderful occasion for getting to know each other, and beginning a real friendship. ... His influence on me goes way back to my first exposure to his 1967 book on "Direct methods in the theory of elliptic equations", which pioneered the direction I've been fortunate to follow. Of course, we enjoyed our agreements and disagreements about "global regularity". ...

W. Jäger, Heidelberg: ... For me he was an outstanding scientist and a unique personality. Last year, Olga Oleinik died, who we both considered as a friend. Now Jindřich Nečas! Two bright names in the scientific world, especially important for European science. Jindřich has given important contributions and impulses and was one of the main people to rebuild science in Europe which suffered a lot under the hot and cold war. I always has hoped that he will return to Europe and to Prague. I am very sad that he will not return alive. ...

Literatura

[A1] Nečas, J: *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques.* Academia, Prague, and Masson et Cie, Éditeurs, Paris 1967.

[A2] Fučík, S., Nečas, J., Souček, J., Souček, V.: *Spectral analysis of nonlinear operators.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 346., Springer-Verlag, Berlin 1973.

[A3] Fučík, S., Nečas, J., Souček, V.: *Einführung in die Variationsrechnung.* Teubner-Texte zur Mathematik, BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1977.

[A4] Nečas, J., Hlaváček, I.: *Mathematical theory of elastic and elasto-plastic bodies: an introduction,* vol. 3. Studies in Applied Mechanics, Elsevier Scientific Publishing Co., Amsterdam 1980. České vydání v SNTL Praha, 1983.

[A5] Hlaváček, I., Haslinger, J., Nečas, J., Lovíšek, J.: *Riešenie variačných nerovností v mechanike.* Alfa — Vydavateľstvo Technickej a Ekonomickej Literatúry, Bratislava 1982. Slovensky; ruské vydání viz [A7] a anglické vydání viz [A9].

[A6] Nečas, J.: *Introduction to the theory of nonlinear elliptic equations,* vol. 52. Teubner-Texte zur Mathematik, BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1983.

[A7] Hlaváček, I., Haslinger, J., Nečas, J., Lovíšek, J.: *Reshenie variatsionnykh neravenstv v mekhanike.* „Mir“, Moscow 1986. Ruské vydání [A5].

[A8] Nečas, J.: *Introduction to the theory of nonlinear elliptic equations.* A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons Ltd., Chichester 1986. Druhé vydání [A6] u jiného nakladatele.

[A9] Hlaváček, I., Haslinger, J., Nečas, J., Lovíšek, J.: *Solution of variational inequalities in mechanics,* vol. 66. Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York 1988. Anglický překlad [A5].

[A10] Nečas, J.: *Ecoulements de fluide: compacité par entropie,* vol. 10. Research Notes in Applied Mathematics, Masson, Paris 1989.

[A11] Málek, J., Nečas, J., Rokyta, M., Růžička, M.: *Weak and measure-valued solutions to evolutionary PDEs,* vol. 13. Applied Mathematics and Mathematical Computation. Chapman & Hall, London 1996.
[A12] Haslinger, J., Hlaváček, I., Nečas, J.: *Numerical methods for unilateral problems in solid mechanics.* Handbook of Numerical Analysis *4* (1996), 313–485.

Odkazy na skripta [B∗], na Nečasovy původní vědecké práce [C∗] a další literaturu jsou uvedeny v Math. Bohem. *129* (2004), 421–446.

O jednoznačnosti a nejednoznačnosti řešení rovnic

Michal Křížek, Praha

Jedním z nejdůležitějších úkolů při vyšetřování problémů matematické fyziky je zabývat se otázkou existence a jednoznačnosti jejich řešení. K tomu je nutno nejprve přesně stanovit množinu, v níž budeme řešení hledat. Ilustrujme to nejprve na jednoduché algebraické rovnici.

Nechť $\mathbb{S}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ a $\mathbb{H}$ postupně označují množinu sudých, přirozených, celých, racionálních, reálných a komplexních čísel a množinu kvaternionů. Pro rovnici

$$x^2 + y^2 = 2$$

zřejmě neexistuje dvojice $(x, y) \in \mathbb{S} \times \mathbb{S}$, která by ji splňovala. Na druhé straně na množině $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ má tato rovnice právě jedno řešení $(1, 1)$ a na množině $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ čtyři různá řešení $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(1, -1)$ a $(-1, -1)$. Na množině $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ ovšem existují ještě další [např. $(\frac{1}{5}, \frac{7}{5})$, $(\frac{7}{13}, \frac{17}{13})$, $(\frac{7}{17}, \frac{23}{17})$] a je jich spočetně mnoho. Konečně na množinách $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ a $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ existuje nespočetně mnoho řešení.

Podobně je tomu při vyšetřování diferenciálních rovnic. Nejprve je třeba přesně specifikovat třídu funkcí, v níž budeme řešení hledat. Například známá Poissonova rovnice $-\Delta u = f$ s nulovými okrajovými podmínkami na ohraničené d-rozměrné oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ a $f \in L^2(\Omega)$ nemusí mít klasické řešení na prostoru funkcí, které mají spojité druhé derivace na uzávěru vyšetřované oblasti. Na druhé straně podle Rieszovy věty bude existovat právě jedno (slabé) řešení v tzv. Sobolevových prostorech funkcí.[1])

[1]) Slabé řešení $u \in V$ je definováno vztahem $(\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v) = (f, v)$ pro všechna $v \in V$, kde $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ je L^2-skalární součin a V je Sobolevův prostor funkcí z $L^2(\Omega)$, které mají první (zobecněné) derivace také v $L^2(\Omega)$ a které jsou v jistém smyslu nulové na hranici oblasti Ω.

Prof. RNDr. Michal Křížek, DrSc., (1952), Matematický ústav AV ČR, Žitná 25, 115 67 Praha 1, e-mail: `krizek@math.cas.cz`, `http://www.math.cas.cz/~krizek`