Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Ján Andres

Šarkovského věta a diferenciální rovnice

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 49 (2004), No. 2, 151–159

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/141221`

Šarkovského věta a diferenciální rovnice

Jan Andres, Olomouc

1. Úvod

Šarkovského věta [Š] je typickou ukázkou matematiky oceňovaných hlubokých výsledků s jednoduchou formulací a technicky náročným důkazem. V době svého zveřejnění — v roce 1964 — nevzbudila žádný mimořádný ohlas. Navíc, jak se později ukázalo, obsahoval její důkaz (byť odstranitelné) chyby.

Do povědomí vstoupila a za svoji současnou popularitu paradoxně vděčí článku [LY] J. A. Yorka a jeho tehdejšího doktoranda T.-Y. Liho „až“ z roku 1975, kdy byl nezávisle zveřejněn podobný výsledek, který však představuje jen velmi speciální případ Šarkovského věty. O celé historii, včetně úsměvného setkání A. N. Šarkovského s J. A. Yorkem na konferenci v Německu, se zájemce může dočíst např. v [G]. Poznamenejme rovněž, že moderní důkazy obou dnes již klasických tvrzení (spojené zejména se jmény L. Alsedy, L. S. Blocka, W. A. Coppela, J. Guckenheimera, J. Llibreho, M. Misiurewicze, P. Štefana, ...) je možno nalézt v téměř všech učebnicích teorie chaosu a dynamických systémů (viz např. [KH], [R]) a že existuje celá řada zobecnění Šarkovského věty ([A1], [A2], [AFJ], [AJ], [AJP], [AP1], [AP2], [B], [BK], [H], [KSS], [Ka], [Kl], [M1], [M2], [S], [Y], [Z1], [Z2], ...).

My se o dvou takových zobecněních za chvíli zmíníme, a to v souvislosti s možnou aplikací na obyčejné diferenciální rovnice. Hlavní cíl příspěvku tedy spočívá v upozornění, že — navzdory nemožnosti aplikovat klasickou Šarkovského větu na obyčejné diferenciální rovnice — existuje možnost takto aplikovat jisté modifikované (zejména mnohoznačné) verze této věty.

Nejdříve však stručně připomeneme samotnou Šarkovského větu a některé její speciální případy, založené na následujícím novém uspořádání přirozených čísel:

Šarkovského uspořádání (přirozených čísel).

$$3 \rhd 5 \rhd 7 \rhd 9 \rhd \cdots \rhd 2 \cdot 3 \rhd 2 \cdot 5 \rhd 2 \cdot 7 \rhd 2 \cdot 9 \rhd \cdots \rhd 2^2 \cdot 3 \rhd 2^2 \cdot 5 \rhd 2^2 \cdot 7 \rhd 2^2 \cdot 9 \rhd \cdots$$
$$\cdots 2^n \cdot 3 \rhd 2^n \cdot 5 \rhd 2^n \cdot 7 \rhd 2^n \cdot 9 \rhd \cdots \rhd 2^n \rhd \cdots \rhd 2^2 \rhd 2 \rhd 1$$

Prof. RNDr. Jan Andres, CSc. (1954), katedra matematické analýzy a aplikací matematiky, PřF UP, Tomkova 40, 779 00 Olomouc-Hejčín, e-mail: andres@risc.upol.cz

Definice 1. Číslo $a \in \mathbb{R}$ je *periodickým bodem* s periodou $m \in \mathbb{N}$ (tj. m-periodickým bodem) spojité funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jestliže $f^m(a) = a$ a současně $f^j(a) \neq a$ pro $j \in \{1, \dots, m-1\}$, kde f^m značí m-tou iteraci funkce f, tj.

$$f^m = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{m-\text{krát}}.$$

Ekvivalentně:

Definice 2. Číslo $a \in \mathbb{R}$ určuje *primární m-orbitu* $\mathcal{O} = \big\{a, f(a), \dots, f^{m-1}(a)\big\}$, kde $f^m(a) = a$. Výrazem primární zdůrazňujeme vzájemnou odlišnost prvků tvořících orbitu $\mathcal{O}$.

Věta 1 (A. N. Šarkovskij (1964))**.** *Jestliže $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ má m-periodický bod, kde $m \rhd k$ (v Šarkovského uspořádání), pak má rovněž k-periodický bod.*

Následující tři tvrzení jsou speciálními případy věty 1 pro $k = 1$, 2 a $m = 3$.

Korolár 1. *Má-li funkce $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ nějaký periodický bod (ekv. nějakou primární orbitu), pak má i pevný bod.*

Korolár 2. *Má-li funkce $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ periodický bod, který není pevný (ekv. primární m-orbitu pro nějaké $1 \neq m \in \mathbb{N}$), pak má vždy 2-periodický bod (ekv. primární 2-orbitu).*

Poznamenejme, že elegantní krátký důkaz koroláru 2 je proveden v článku [BB].

Korolár 3 (T.-Y. Li, J. A. Yorke (1975))**.** *Má-li funkce $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 3-periodický bod (ekv. primární 3-orbitu), pak má rovněž body všech přirozených period (ekv. primární m-orbity pro všechna $m \in \mathbb{N}$).*

2. Aplikace na diferenciální rovnice (?)

Uvažujme nyní obyčejnou skalární diferenciální rovnici 1. řádu

$$x' = F(t, x), \qquad \text{kde } F(t, x) \equiv F(t+1, x), \tag{1}$$

a pro jednoduchost předpokládejme, že $F \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ a že F splňuje (globálně) nějakou podmínku jednoznačnosti (např. Lipschitzovu, Osgoodovu, Nagumovu, Kamkeho, Kibenkovu nebo Borůvkovu).

Je známo ([F], [Kr]), že jednoznačnost implikuje spojitou závislost řešení na počátečních podmínkách, a tím totální spojitost tzv. *Poincarého translačního operátoru* $T_m(x_0) := \{x(m, x_0)\colon x(\cdot, x_0)$ je řešením rovnice (1), přičemž $x(0, x_0) = x_0\}$; $m \in \mathbb{N}$.

Vzhledem ke zřejmé vzájemně jednoznačné korespondenci mezi m-periodickými řešeními rovnice (1) (tj. hladkými funkcemi $x(t) \equiv x(t+m)$ splňujícími rovnici (1), přičemž $x(t) \not\equiv x(t+j)$, kde $j \in \{1, \dots, m-1\}$), a pevnými body operátoru $T_m(x_0)$

bychom mohli snadno přeformulovat větu 1 pro rovnici (1) v termínech (subharmonických) k-periodických řešení, $k \in \mathbb{N}$.

Bohužel takové tvrzení by bylo prázdné, neboť je známo (viz např. [P]), že skalární rovnice (1) nemůže mít za podmínky jednoznačnosti m-periodická řešení pro žádné $m \neq 1$.

Otázkou je, *zdali odpovídající věta pro subharmonická řešení rovnice* (1) *může být neprázdná v případě nejednoznačnosti, resp. zdali lze zformulovat její analogii v* $\mathbb{R}^n$, *kde* $n > 1$. Na tyto otázky se nyní pokusíme alespoň částečně odpovědět.

Pokud tedy není splněna podmínka jednoznačnosti, což podle „generického“ výsledku W. Orlicze z r. 1932 nastává jen výjimečně (přesněji množina spojitých pravých stran f, pro které nesplňuje rovnice (1) podmínky jednoznačnosti, je „hubená“, tj. 1. Bairovy kategorie), pak se stává operátor $T_m(x_0)$ mnohoznačným. Naštěstí víme (viz např. [AG]), že jde o shora polospojité zobrazení (tj. pro každou otevřenou podmnožinu $I \subset \mathbb{R}$ je množina $\{x_0 \in \mathbb{R} \colon T_m(x_0) \subset I\}$ otevřená) a že množinami jeho hodnot jsou buď body, nebo kompaktní intervaly.

Definice 3. Mnohoznačné zobrazení $\varphi \colon \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}} \setminus \{\emptyset\}$, které je shora polospojité a takové, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ je množina hodnot $\varphi(x)$ buď jednobodová, nebo kompaktní interval, nazveme *M-zobrazením.*

Dříve než se pokusíme vhodně zformulovat první již zmíněný problém, připomeňme si ještě definici m-orbity pro M-zobrazení.

Defnice 4. Prohlásíme *m-orbitou* $\mathcal{O}$ M-zobrazení $\varphi \colon \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}} \setminus \{\emptyset\}$ posloupnost $\mathcal{O} = \{a_1, \dots, a_m\}$ bodů $a_i \in \mathbb{R}$ takových, že $a_{i+1} \in \varphi(a_i)$, $\quad i = 1, \dots, m$, přičemž platí $a_1 = a_{m+1}$, a současně, že $\mathcal{O}$ nelze zkonstruovat p-násobným zřetězením kratších r-orbit, kde $pr = m$. Jestliže body a_i, $i = 1, 2, \dots, m$, generující m-orbitu $\mathcal{O}$, jsou navíc různé (tj. $a_i \neq a_j$ pro $i \neq j$; $i, j = 1, \dots, m$), pak hovoříme o *primární* m-orbitě.

První již zmíněný problém tedy můžeme zformulovat pro M-zobrazení následovně:

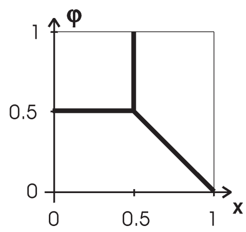
Problém 1. *Platí* (*Šarkovského*) *věta* 1 *pro M-zobrazení?*

Bohužel odpověď na tuto otázku je obecně záporná, protože existují (viz [AFJ], [AJP]) protipříklady, které v termínech m-orbit (pozn.: u mnohoznačných zobrazení φ je jejich užití mnohem vhodnější než pojem m-periodický bod) lze schematicky znázornit takto:

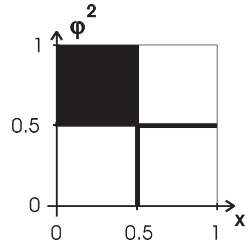
$$\boxed{3} \not\Rightarrow \boxed{2} \qquad \boxed{3} \not\Rightarrow \boxed{4} \qquad \boxed{3} \not\Rightarrow \boxed{6}$$

$$\boxed{5} \not\Rightarrow \boxed{4}$$

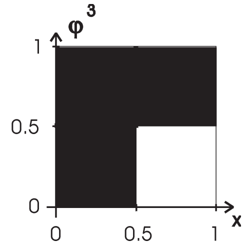
Např. první schéma znamená, že z existence 3-orbity nemusí obecně plynout existence 2-orbity. Jinými slovy: existují M-zobrazení φ mající 3-orbitu, nikoliv však 2-orbitu (viz obr. 1–3).



Obr. 1: φ



Obr. 2: φ^2



Obr. 3: φ^3

3. Mnohoznačná verze Šarkovského věty

Nicméně platí následující rozšíření Šarkovského věty 1 pro M-zobrazení.

Věta 2 ([AFJ], [AJP], [AP2])**.** *Nechť M-zobrazení* $\varphi : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}} \setminus \{\emptyset\}$ *má* m*-orbitu,* $m \in \mathbb{N}$. *Potom má* φ *— s nejvýše dvěma výjimkami — i* k*-orbitu pro každé* $k \lhd m$*. Je-li* m *liché, pak má* φ *— s případnou výjimkou pro* $k = 2$ *nebo* $k = 4, 6$ *—* k*-orbitu pro každé* $k \lhd m$*. Má-li* φ m*-orbitu, kde* $m \neq 3$ *je liché a přitom nemá žádnou primární* 3*-orbitu, pak má — případně kromě* $k = 4$ *— rovněž* k*-orbitu pro každé* $k \lhd m$*.*

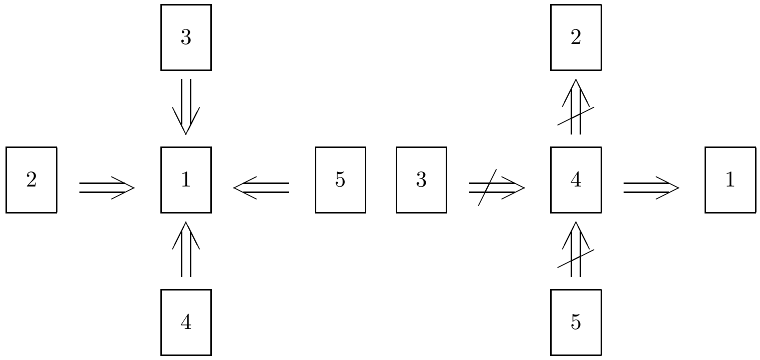
Podobně lze rozšířit i koroláry 1, 2 a 3.

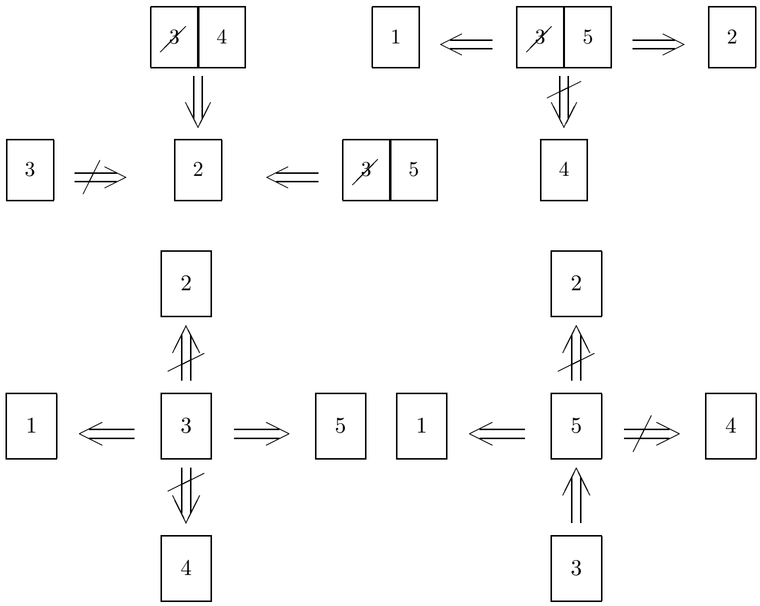
Korolár 4. *Má-li M-zobrazení* m*-orbitu pro nějaké* $m \in \mathbb{N}$*, pak má i* 1*-orbitu (pevný bod).*

Korolár 5 ([AJ]). *Nechť M-zobrazení nemá žádnou primární* 3*-orbitu, ale má* m*-orbitu, kde* $m \neq 1$*. Potom má i* 2*-orbitu.*

Korolár 6. *Má-li M-zobrazení* 3*-orbitu, pak má i* k*-orbitu, s případnou výjimkou pro* $k = 2$ *nebo* $k = 4, 6$*.*

Pro prvních pět přirozených čísel můžeme tyto výsledky schematicky znázornit takto:





Např. první schéma znamená, že existence 1-orbity (tj. pevného bodu) plyne z existence k-orbit pro $k \in \{2, 3, 4, 5\}$. Neplatným implikacím v dalších schématech odpovídají opět protipříklady.

Poznámka 1. Pro $m = 3$ je tedy možné obdržet mnohoznačnou analogii Li-Yorkovy věty. Tento výsledek přitom již nelze zlepšit. Pouze za jistých přirozených dodatečných předpokladů (viz [AFJ]) lze docílit platnosti pro $k \in \mathbb{N} \setminus \{4, 6\}$, tj. rozšířit i pro $k = 2$.

4. Vícerozměrná verze Li-Yorkovy věty

U druhého již zmíněného problému se omezíme pouze na jeho nejdůležitější speciální případ, kdy $m = 3$, tj. ptáme se, zdali lze docílit platnost koroláru 3 v $\mathbb{R}^n$:

Problém 2. *Platí (Li-Yorkův) korolár* 3 *v* $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ *?*

Bohužel ani zde není obtížné najít protipříklady (viz např. [Kl]), poukazující na neplatnost analogie koroláru 3 pro $n > 1$ bez dalších předpokladů. Předpokládejme proto ještě, že pro $F \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ existuje takový bod $\bar{X} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \in \mathbb{R}^n$, který splňuje alespoň pro jedno $i \in \{1, \dots, n\}$ podmínky:

$$
(2) \qquad \begin{cases} \sup F_i^3(x_1, \dots, x_{i-1}, \bar{x}_i, x_{i+1}, \dots, x_n) := \bar{z}_i \leqq \bar{x}_i \\ < \inf F_i(x_1, \dots, x_{i-1}, \bar{x}_i, x_{i+1}, \dots, x_n) := \bar{v}_i \\ \leqq \sup F_i(x_1, \dots, x_{i-1}, \bar{x}_i, x_{i+1}, \dots, x_n) := \bar{w}_i \\ < \inf F_i^2(x_1, \dots, x_{i-1}, \bar{x}_i, x_{i+1}, \dots, x_n) := \bar{y}_i \quad (< \infty), \end{cases}
$$

nebo

$$
(3)\qquad \begin{cases} \inf F_i^3(x_1,\dots,x_{i-1},\bar{x}_i,x_{i+1},\dots,x_n) := \bar{z}_i' \geqq \bar{x}_i \\ > \sup F_i(x_1,\dots,x_{i-1},\bar{x}_i,x_{i+1},\dots,x_n) := \bar{v}_i' \\ \geqq \inf F_i(x_1,\dots,x_{i-1},\bar{x}_i,x_{i+1},\dots,x_n) := \bar{w}_i' \\ > \sup F_i^2(x_1,\dots,x_{i-1},\bar{x}_i,x_{i+1},\dots,x_n) := \bar{y}_i' \quad (> -\infty), \end{cases}
$$

kde všechna infima a suprema v (2), (3) se uvažují vzhledem k množině všech $(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$,

$$
(4)\ \begin{cases} \forall \tilde{x}_i,\tilde{y}_i \in J_i^{(2)} \cap F_i(x_1,\dots,x_{i-1},J_i^{(2)},x_{i+1},\dots,x_n), \quad \tilde{x}_i \neq \tilde{y}_i, \\ \text{nezávisle na} \\ \quad (x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n) \in J_1^{(2)} \times \dots \times J_{i-1}^{(2)} \times J_{i+1}^{(2)} \times \dots \times J_n^{(2)}: \\ \quad |F_i(x_1,\dots,x_{i-1},\tilde{x}_i,x_{i+1},\dots,x_n) - F_i(x_1,\dots,x_{i-1},\tilde{y}_i,x_{i+1},\dots,x_n)| > \\ \qquad > |\tilde{x}_i - \tilde{y}_i|, \end{cases}
$$

a

$$
(5)\ \begin{cases} \forall (\mathbb{N} \ni)\ m > 1 \ \text{ a } \ \forall \tilde{x}_i,\tilde{y}_i \in J_i^{(1)} \cap F_i^m(x_1,\dots,x_{i-1},J_i^{(1)},x_{i+1},\dots,x_n), \quad \tilde{x}_i \neq \tilde{y}_i, \\ \text{nezávisle na} \\ \quad (x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n) \in J_1^{(1)} \times \dots \times J_{i-1}^{(1)} \times J_{i+1}^{(1)} \times \dots \times J_n^{(1)}: \\ \quad |F_i^m(x_1,\dots,x_{i-1},\tilde{x}_i,x_{i+1},\dots,x_n) - F_i^m(x_1,\dots,x_{i-1},\tilde{y}_i,x_{i+1},\dots,x_n)| > \\ \qquad > |\tilde{x}_i - \tilde{y}_i|, \end{cases}
$$

kde $J_i^{(1)} := [\bar{x}_i, \bar{v}_i]$, $J_i^{(2)} := [\bar{w}_i, \bar{y}_i]$, resp. $J_i^{(1)} := [\bar{v}_i', \bar{x}_i]$, $J_i^{(2)} := [\bar{y}_i', \bar{w}_i']$, a dále, že pro zbývající $(i \neq)\, j \in \{1,\dots,n\}$ platí:

$$
(6)\qquad \begin{cases} \sup F_j^2(x_1,\dots,x_{j-1},\bar{x}_j,x_{j+1},\dots,x_n) \leqq \bar{x}_j < \\ \quad < \inf F_j(x_1,\dots,x_{j-1},\bar{x}_j,x_{j+1},\dots,x_n) := \bar{v}_j \quad (< \infty), \end{cases}
$$

nebo

$$
(7)\qquad \begin{cases} (-\infty <)\ \bar{w}_j := \sup F_j(x_1,\dots,x_{j-1},\bar{x}_j,x_{j+1},\dots,x_n) < \bar{x}_j < \\ \quad < \inf F_j^2(x_1,\dots,x_{j-1},\bar{x}_j,x_{j+1},\dots,x_n), \end{cases}
$$

kde všechna infima a suprema v (6), (7) se opět berou vzhledem k množině všech $(x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ a

$$
(8)\ \begin{cases} \forall m \in \mathbb{N} \ \text{ a } \ \forall \tilde{x}_j,\tilde{y}_j \in I_j \cap F_j^m(x_1,\dots,x_{j-1},I_j,x_{j+1},\dots,x_n), \quad \tilde{x}_j \neq \tilde{y}_j, \\ \text{nezávisle na} \\ \quad (x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_n) \in I_1 \times \dots \times I_{j-1} \times I_{j+1} \times \dots \times I_n: \\ \quad |F_j^m(x_1,\dots,x_{j-1},\tilde{x}_j,x_{j+1},\dots,x_n) - F_j^m(x_1,\dots,x_{j-1},\tilde{y}_j,x_{j+1},\dots,x_n)| > \\ \qquad > |\tilde{x}_j - \tilde{y}_j|, \end{cases}
$$

kde $I_j := [\bar{x}_j, \bar{v}_j]$, resp. $I_j := [\bar{w}_j, \bar{x}_j]$.

Za těchto dodatečných podmínek můžeme rozšířit Li-Yorkův korolár 3 pro $F \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ následovně:

Věta 3 ([A2]). *Nechť pro $F \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ existuje takový bod $\bar{X} = (\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n) \in \mathbb{R}^n$, že jedna z podmínek* (2) *nebo* (3) *je splněna alespoň pro jedno $i \in \{1,\dots,n\}$ a že jedna z podmínek* (6) *nebo* (7) *platí i pro zbývající $j \in \{1,\dots,n\} \setminus \{i\}$. Dále předpokládejme, že pro $i \in \{1,\dots,n\}$, pro něž platí* (2) *nebo* (3)*, jsou splněny podmínky* (4), (5) *a že pro zbývající $j \in \{1,\dots,n\} \setminus \{i\}$ platí* (8)*. Potom má F m-periodické body pro všechna $m \in \mathbb{N}$, tj. $\hat{X} = F^m(\hat{X})$ a $\hat{X} \neq F^k(\hat{X})$, kde $1 \leqq k < m$.*

Poznámka 2. V původní formulaci Li-Yorkovy věty [LY] je užito nerovností (2) nebo (3) pro $i = n = 1$, které kromě dalších čtyř typů nerovností mohou nastat v případě existence 3-periodických bodů. Pro $n > 1$ však tyto nerovnosti nemusí být splněny.

Poznámka 3. Podmínky expanzivity (4), (5) a (8) lze nahradit obecnějšími podmínkami v termínech topologických dimenzí množin pevných a periodických bodů a jejich indexů složek zobrazení F (viz [A2]). V článku [A2] jsou rovněž uvedeny příklady vektorů perturbovaných stanových zobrazení (tent maps) majících periodické body všech period.

5. Aplikace na diferenciální rovnice

První dvě části věty 2 lze bezprostředně aplikovat na rovnici (1) (bez podmínky jednoznačnosti) následovně:

Věta 4. *Nechť funkce $F \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ splňuje nerovnost $|F(t,x)| \leqq \alpha + \beta|x|$ pro všechna $(t,x) \in \mathbb{R}^2$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Jestliže má* (1) *$m$-periodické řešení, $m \in \mathbb{N}$, pak má — s nejvýše dvěma výjimkami — také k-periodické řešení pro všechna $k \lhd m$. Je-li m liché, pak má rovnice* (1) *rovněž k-periodické řešení, s případnou výjimkou pro $k = 2$ nebo $k = 4, 6$. Speciálně, pokud nelze m vyjádřit jako mocninu dvojky, pak má rovnice* (1) *vždy nekonečně mnoho tzv. subharmonických periodických řešení.*

Podobně lze bezprostředně aplikovat i korolár 4 na rovnici (1):

Korolár 7. *Nechť funkce $F \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ splňuje nerovnost $|F(t,x)| \leqq \alpha + \beta|x|$ pro všechna $(t,x) \in \mathbb{R}^2$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Má-li rovnice* (1) *$k$-periodické řešení, $k \in \mathbb{N}$, pak má také 1-periodické* (*tzv. harmonické*) *řešení.*

Vzhledem ke zmíněnému „generickému“ výsledku W. Orlicze je přirozené se opět ptát, zda nejsou věta 4 a korolár 7 prázdné. Vhodnější je zřejmě jejich přeformulování pro nespojité měřitelné pravé strany, což však vede k řešení ve smyslu A. F. Filippova [F]. Přesněji, Filippovovým řešením rovnice (1) budeme mínit jakékoliv Carathéodoryho řešení $x(t) \in AC_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ diferenciální inkluze

$$x' \in \Phi(t,x) := \bigcap_{\delta > 0} \bigcap_{\substack{r \subset \mathbb{R} \\ \mu(r) = 0}} \overline{\operatorname{conv}}\, F\big(t, B(x,\delta) \setminus r\big),$$

kde $\mu(r)$ je Lebesgueova míra množiny r, tj. lokálně absolutně spojitou funkci $x \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vyhovující inkluzi (2) pro skoro všechna $t \in \mathbb{R}$.

Poněvadž je $\Phi \colon \mathbb{R}^2 \to 2^{\mathbb{R}} \setminus \{\emptyset\}$ carathéodoryovská multifunkce s kompaktními a konvexními množinami hodnot (viz [F]), lze ukázat (viz [AG]), že odpovídající Poincarého translační operátor je opět M-zobrazením. Můžeme proto jednoduše přeformulovat větu 4 a korolár 7 následovně:

Věta 4' a korolár 7'. *Tvrzení věty 4 a koroláru 7 zůstávají v platnosti i pro (pouze) měřitelné funkce* $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *s tím, že periodická řešení jsou nyní chápána ve smyslu Filippova.*

Je zřejmé, že případná aplikace věty 3 na (pro počáteční úlohu jednoznačně řešitelnou) soustavu obyčejných diferenciálních rovnic by byla velmi obtížná zejména vzhledem k praktickému ověření podmínek expanzivity odpovídajících Poincarého translačních operátorů, a to i v případě možnosti nahradit nerovnosti typu (2) nebo (3) samotnou existencí 3-periodických orbit (viz poznámku 2). Podobně je tomu i u jiných vícerozměrných verzí Šarkovského věty (viz např. [Ka], [KSS]). U dalších verzí (viz [Kl], [Z1], [Z2]) se opět vynořuje problém s jednoznačnou řešitelností jistých jednorozměrných principiálních částí pravých stran, zabraňující výskytu m-periodických řešení pro $m \neq 1$.

Zbývá proto buď se znovu pokusit o mnohoznačné verze tvrzení z [Kl], [Z1], [Z2] v intencích věty 2, nebo se omezit na aplikace volnějších variant Šarkovského věty v tom smyslu, že z výskytu konečně mnoha speciálních periodických trajektorií by plynula existence „alespoň“ nekonečně mnoha subharmonických periodických řešení (viz [A1], [M1]).

L i t e r a t u r a

[A1] ANDRES, J: *Nielsen number, Artin braids, Poincaré operators and multiple nonlinear oscillations.* Nonlin. Anal. *47*, 2 (2001), 1017–1028.

[A2] ANDRES: *Period three implications for expansive maps in* $\mathbb{R}^n$. J. Difference Eqns *10*, 1 (2004), 17–28.

[AFJ] ANDRES, J., FIŠER, J., JÜTTNER, L.: *On a multivalued version of the Sharkovskii theorem and its application to differential inclusions.* Set-Valued Anal. *10*, 1 (2002), 1–14.

[AG] ANDRES, J., GÓRNIEWICZ, L.: *Topological Fixed Point Principles for Boundary Value Problems.* Kluwer, Dordrecht 2003.

[AJ] ANDRES, J., JÜTTNER, L.: *Period three plays a negative role in a multivalued version of Sharkovskii's theorem.* Nonlin. Anal. *51* (2002), 1101–1104.

[AJP] ANDRES, J., JÜTTNER, L., PASTOR, K.: *On a multivalued version of the Sharkovskii theorem and its application to differential inclusions II.* Set-Valued Anal. (v tisku).

[AP1] ANDRES, J., PASTOR, K.: *On a multivalued version of the Sharkovskii theorem and its application to differential inclusions III.* Topol. Meth. Nonlin. Anal. *22* (2003), 369–386.

[AP2] ANDRES, J., PASTOR, K.: *A version of Sharkovskii's theorem for differential equations.* Proc. Amer. Math. Soc. (v tisku).

[B] BOYLAND, P.: *An analog of Sharkovski's theorem for twist maps.* Contemp. Math., vol. 81, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1988, 119–133.

[BB] BARTON, R., BURNS, K.: *A simple special case of Sharkovskii's theorem.* Amer. Math. Monthly *107*, 10 (2000), 932–933.

[BK] BOBOK, J., KUCHTA, M.: *X-minimal patterns and generalization of Sharkovskii's theorem.* Fund. Math. *156* (1998), 33–66.

[F] FILIPPOV, A. F.: *Differenciaľnyje uravnenija s razryvnoj pravoj častju.* Nauka, Moskva, 1985.

[G] GLEICK, J.: *Chaos.* Ando Publ., Praha 1996.

[H] Handel, M.: *The forcing partial order on three times punctured disk.* Ergod. Th. Dynam. Sys. *17* (1997), 593–610.

[Ka] Kampen, J.: *On fixed points of maps and iterated maps and applications.* Nonlin. Anal. *42* (2000), 509–532.

[KH] Katok, A., Hasselblatt, B.: *Introduction to the Modern Theory Dynamical Systems.* Cambridge Univ. Press, Cambridge 1995.

[Kl] Kloeden, P. E.: *On Sharkovsky's cycle coexisting ordering.* Bull. Austral. Math. Soc. *20* (1979), 171–177.

[Kr] Krasnoseľskij, M. A.: *Operator sdviga po trajektoriam differencialňych uravnenij.* Nauka, Moskva 1966.

[KSS] Kannan, V., Saradhi, P. V. S. P., Seshasai, S. P.: *A generalization of Sharkovskii theorem to higher dimensions.* J. Nat. Acad. Math. India (Special volume to dedicate Prof. Dr. R. S. Mishra on the occasion of his 80th birthday), *11* (1995), 69–82.

[LY] Li, T.-Y., Yorke, J.: *Period three implies chaos.* Amer. Math. Monthly *82* (1975), 985–992.

[M1] Matsuoka, T.: *The number and linking of periodic systems.* Invent. Math. *70* (1983), 319–340.

[M2] Matsuoka, T.: *Braids of periodic points and a 2-dimensional analogue of Sharkovskii's ordering.* In: *Dynamical Systems and Nonlinear Oscillations* (G. Ikegami, ed.), World Sci. Press, Singapore 1986, 58–72.

[O] Orlicz, W.: *Zur Theorie der Differentialgleichung* $y' = f(x, y)$. Bull. Akad. Polon. Sci., Sér. A, 00 (1932), 221–228.

[P] Pliss, V. A.: *Nelokaľnyje problemy teorii kolebanij.* Nauka, Moskva 1964.

[R] Robinson, C.: *Dynamical Systems.* CRC Press, Boca Raton, Fl. 1995.

[S] Schirmer, H.: *A topologist's view of Sharkovsky's theorem.* Houston J. Math. *11*, 3 (1985), 385–395.

[Š] Šarkovskij, A. N.: *Sosuščestvovanije ciklov nepreryvnogo otobraženija v sebja.* Ukrain. Matem. Žurn. *1* (1964), 61–71.

[Y] Ye, X.: *D-function of a minimal set and an extension of Sharkovskii's theorem to minimal sets.* Ergod. Th. Dynam. Sys. *12* (1992), 365–376.

[Z1] Zgliczynski, P.: *Sharkovskii theorem for multidimensional perturbations of one-dimensional maps I, II.* Ergod. Th. Dynam. Sys. *19*, 6 (1999), 1655–1684; Topol. Meth. Nonlin. Anal. *14*, 1 (1999), 169–182.

[Z2] Zgliczynski, P.: *Multidimensional perturbations of one-dimensional maps and stability of Šarkovskii ordering.* Internat. J. Bifurc. Chaos *9*, 9 (1999), 1867–1876.