Jan Kotůlek

Z historie inverzního variačního problému: Odvození podmínek silné variačnosti

*Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, Vol. 48 (2003), No. 3, 222–238

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/141181`

[28] Wang, J.: *Les enzymes qui modifient la topologie de l'ADN.* La science des nœuds, Pour la Science, Paris (2001), 130–142.
[29] Watson, J. D.: *Molecular biology of the gene.* W. A. Benjamin, Inc., Menlo Park 1976.
[30] Watson, J. D., Crick, F. H. C.: *A structure for deoxyribose nucleic acid.* Nature *171* (1953), 737–738.
[31] Watson, J. D., Crick, F. H. C.: *Genetic implications of the structure of deoxyribonucleic acid.* Nature *171* (1953), 964–969.
[32] Weinberg, W.: *Über den Nachweis der Vererbung beim Menschen.* Jahresber. Ver. vaterl. Naturk. in Würtenbg. *64* (1908), 368–372.
[33] Woese, C. R.: *The Genetic Code.* Harper and Row, New York 1967.


# Z historie inverzního variačního problému: Odvození podmínek silné variačnosti


*Jan Kotůlek, Opava*


## 1. Úvod

Variační počet je oblast matematiky, která se mimo jiné zabývá tzv. variačními integrály. Příkladem takového integrálu je

$$\int_{t_1}^{t_2} L\bigl(t,\, q(t),\, \dot{q}(t)\bigr)\, \mathrm{d}t,$$

kde integrand $L$, který se obvykle nazývá Lagrangeova funkce nebo lagrangián, závisí vedle nezávislé proměnné $t$ na diferencovatelné funkci (křivce) $q(t)$ a její derivaci $\dot{q}(t)$. Variační počet se zajímá především o extremály variačních integrálů, tedy křivky, na nichž je integrál nejmenší (resp. největší). Již J. L. Lagrange odvodil, že pro extremály platí podél křivky $q(t)$ rovnice

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0, \qquad \text{kde } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q}\,\dot{q} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}}\,\ddot{q}.$$

---


Mgr. Jan Kotůlek (1978), Matematický ústav v Opavě, Slezská univerzita v Opavě, Bezručovo nám. 13, 746 01 Opava, e-mail: `Jan.Kotulek@math.slu.cz`



Tato práce vznikla za podpory výzkumného záměru MSM 192400002 „Globální analýza“, řešeného v Matematickém ústavu SU v Opavě.

To je obyčejná diferenciální rovnice 2. řádu, která se nazývá Eulerova-Lagrangeova rovnice a je základem celého variačního počtu. Proto mají velký význam také diferenciální rovnice, které je možné na Eulerovy-Lagrangeovy rovnice převést. Takové rovnice se nazývají *variační*. Podmínky, za nichž je daný systém diferenciálních rovnic variační, definuje *inverzní variační problém*.

Jeho kořeny leží ve 2. polovině 19. století, kdy vznikly dvě základní formulace, dnes někdy označované jako silný a slabý inverzní variační problém. Méně obecný silný inverzní variační problém může být pro systém obyčejných diferenciálních rovnic 2. řádu zformulován následovně:

*Mějme dán systém obyčejných diferenciálních rovnic 2. řádu ve tvaru*

$$F_i(t, q^k, \dot{q}^k, \ddot{q}^k) = 0, \qquad i, k = 1, \ldots, m.$$

*Zjistěte, zda existuje funkce* $L(t, q^k, \dot{q}^k)$ *taková, že platí*

$$F_i = \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}, \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Obecnější slabý inverzní variační problém, nazývaný také problém existence integračních faktorů, se týká otázek existence a jednoznačnosti regulárních matic, jejichž součin se systémem nevariačních diferenciálních rovnic je variační (původní systém má pouze ekvivalentní řešení s nějakým systémem Eulerových-Lagrangeových rovnic). Zajímavé je, že obě tyto formulace (i jejich další zobecnění) jsou v zahraniční literatuře citovány shodně jako *the inverse problem in the calculus of variations.*

V tomto článku se zabýváme historií odvozování podmínek variačnosti pro obyčejné diferenciální rovnice libovolného řádu (tzv. Helmholtzových podmínek vyššího řádu). Pozornost budeme věnovat zejména pracím, které vznikly na přelomu 19. a 20. století. Jelikož existují dvě výborné studie o novější historii inverzního problému, Santilliho [20] a Morandiho a kol. [19], ponecháme další vývoj této problematiky stranou.

Za více než 100 let od formulace inverzního problému vzniklo na toto téma několik stovek prací a stále jich ročně několik desítek přibývá. Silný inverzní problém byl již sice kompletně vyřešen, ale přesto ještě existují velmi obecné formulace, na jejichž řešení se teprve čeká. Proto jsou potřebné přehledové práce, které by dosažené výsledky zrekapitulovaly. Autorovi jsou však známy pouze dvě takové publikace, již citované [19, 20].

### 1.1. Prameny a literatura

Mnohé starší prameny v národních jazycích jsou pro širší vědeckou komunitu jen velmi obtížně dostupné. Digitalizace časopisů se teprve rozbíhá a na digitalizaci dalších nezbytných historických pramenů (např. korespondence) si budeme muset ještě delší dobu počkat. Navíc je dnes v podstatě jedinou komunikační řečí matematiky angličtina, ale v 19. století se publikovalo v mnoha dalších jazycích, zejména v němčině, francouzštině, ruštině, italštině apod. V tomto směru může u nás dosud podceňovaná historie matematiky prokázat velké služby.

Dále bychom se rádi zmínili o několika významných projektech digitalizace zdrojů pro historii matematiky. Ze zdrojů bibliografických je to především projekt digitalizace recenzního časopisu *Jahrbücher über die Fortschritte der Mathematik* (dále JFM), řešený pod hlavičkou Evropské matematické společnosti, viz [28]. Postupně se tvoří databáze všech recenzí publikovaných v JFM v letech 1868–1942. V databázi lze vyhledávat podle několika kritérií, bohužel mezi nimi zatím chybějí klíčová slova a předmětová klasifikace (ty jsou doplňovány ex post). V prosinci 2002 se podařilo dokončit digitalizaci recenzí do roku 1915 a postupně jsou doplňována data až do roku 1930. Databáze navíc obsahuje více než 12 700 odkazů na digitální kopie knih a článků.

Jako archiv biografický je koncipován *The MacTutor History of Mathematics Archive*, viz [29]. Jeho autory jsou John O'Connor a Edmund Robertson z University of St. Andrews ve Skotsku. Ti zde soustředili přes 1500 krátkých (do 10 stran) životopisů slavných matematiků. Je to vhodný pomocník zejména pro první orientaci.

Značná část matematiků, kteří v 19. století posunuli výzkum inverzního problému kupředu, byla nějakým způsobem spojena s *Ruprechtovou-Karlovou univerzitou v Heidelbergu* (Helmholtz, Königsberger, Mayer a Böhm). Ve zdejší elektronické knihovně, viz [27], jsou nejen jejich biografie (většinou několik zdrojů — slovníkové biografie otištěné celé a odkazy na obsáhlejší práce), ale i mnoho dalších odkazů a doplňujících informací.

### 1.2. Terminologie a značení

V tomto exkursu do historie inverzního problému se pokoušíme nejen o rekapitulaci myšlenek, které vedly k formulaci Helmholtzových podmínek, ale také o vystižení dobových výrazových prostředků, tedy značení, terminologie a stylu.

Vývoj značení byl velmi bouřlivý, počínaje dnes již zcela překonaným systémem Helmholtzovým až po dnešní paralelní používání dvou systémů, jednoho motivovaného fyzikálními aplikacemi a druhého vycházejícího z klasického značení variačního počtu.

Fyzikální motivace, kterými byl nakonec veden i Helmholtz, vycházejí z toho, že obyčejnou diferenciální rovnici 2. řádu lze interpretovat jako pohybovou rovnici nějakého mechanického systému. Uvažuje se tedy čas $t$ jako nezávislá proměnná, křivky $q(t)$ jako zobecněné souřadnice, $\dot{q}(t)$ rychlosti a $\ddot{q}(t)$ zrychlení. Jenže Helmholtz ve svých pracích neuvažoval explicitní závislost na čase, souřadnice značil $p_a$, rychlosti $q_a = \mathrm{d}p_a/\mathrm{d}t$ a zrychlení $q'_a = \mathrm{d}q_a/\mathrm{d}t$, srov. [7–9]. Tento systém je velmi nepřehledný. Navíc označení souřadnic koliduje s označením pro hybnosti $p_i = \partial L/\partial \dot{q}^i$, které Helmholtz označoval $s_a$ a nazýval pohybové momenty. Königsberger tento systém zpřehlednil. Zachoval Helmholtzovo označení souřadnic, ale změnil označení rychlostí ($p'_a$) a zrychlení ($p''_a$). Tento systém pak používali i Mayer a Böhm, srov. [3, 12, 18].

Klasické značení variačního počtu používá $x$ pro nezávislou proměnnou, $y_i(x)$ pro závislé proměnné, $y_i'(x)$, $y_i''(x)$ a $y_i^{(n)}(x)$ pro jejich první, druhé a $n$-té derivace. S tímto značením se setkáme např. u Hirsche, srov. [10, 11].

Helmholtz je také zodpovědný za jednu nepříjemnost v terminologii. Pro centrální pojem celého variačního počtu, lagrangián $L$, prosazoval termín kinetický potenciál a označení $H$ [7, s. 138]. Navíc jeho označení koliduje s označením dalšího důležitého pojmu, hamiltoniánu. Helmholtzovo značení přejal Königsberger a po něm i Mayer a Böhm.

Konečně poznamenejme, že všichni zde sledovaní autoři se ve svých pracích mlčky opírají o diferencovatelnost zkoumaných funkcí. Proto nebudeme vyjadřovat explicitně předpoklady diferencovatelnosti ad hoc, ale podle vzoru tehdejších matematiků uvažujeme v celé práci jen dostatečně hladké funkce.[1])

Ve snaze o zachování autentičnosti budeme respektovat původní označení a terminologii tam, kde neohrožuje srozumitelnost výkladu.

## 2. Helmholtzovy podmínky

Variační počet je pro mnoho vědců zajímavý především pro své obdivuhodné fyzikální aplikace, zejména tzv. variační principy. Jedním z nejznámějších variačních principů je *princip nejmenší akce.* Pokusy o jeho precizní matematickou formulaci nalezneme v 17. století u G. W. Leibnize, P. de Fermata a Johanna Bernoulliho. Roku 1746 jej jako univerzálně platný formuloval P. L. de Maupertuis, matematicky správně jej poprvé popsal L. Euler a pomocí pojmu variace jej zapsal J. L. Lagrange, srov. historické poznámky v [8, 17]. Proslavila jej však až pozměněná formulace z pera W. R. Hamiltona, srov. [16, s. 12]:

**Tvrzení 1 (Hamilton, 1834).** *Pro skutečný pohyb mechanického systému v časovém intervalu $[t_1, t_2]$ je akce, tj.*

$$\int_{t_1}^{t_2} L \, \mathrm{d}t \qquad \textit{pro} \quad L = T - V,$$

*kde $T$ je kinetická a $V$ potenciální energie mechanického systému, nejmenší mezi všemi kinematicky přípustnými pohyby.*

Tedy křivka, po níž se systém pohybuje, musí splňovat Eulerovy-Lagrangeovy rovnice. Hermann von Helmholtz se v osmdesátých letech 19. století pokoušel pomocí principu nejmenší akce nalézt jednotnou matematickou formulaci celé fyziky, ve které by se všechny přírodní jevy daly vyvodit z pohybů jednotlivých hmotných bodů, srov. [26, s. 304–305]. Helmholtz vycházel z Hamiltonovy formulace principu nejmenší akce pro klasickou mechaniku a podařilo se mu jej zobecnit na elektrodynamiku a termodynamiku — ukázal, že všechny reverzibilní procesy mohou být vyjádřeny

[1]) Existují i autoři, jejichž přístupy k inverznímu problému nevyžadují předpokládat diferencovatelnost uvažovaných funkcí; tyto přístupy však leží mimo rámec této práce.

pomocí Eulerových-Lagrangeových rovnic. Ty mu dále posloužily ke klasifikaci pohybů vyhovujících principu nejmenší akce. Přitom tak mimochodem odvodil podmínky variačnosti pro libovolnou obyčejnou diferenciální rovnici 2. řádu.

### 2.1. Hermann von Helmholtz — odvození podmínek variačnosti

Přestože o Helmholtzově životě existuje několik desítek knih a stovky článků²), připomeňme si alespoň základní údaje.

Hermann Ludwig Ferdinand Helmholtz se narodil 31. srpna 1821 v Postupimi. Vystudoval medicínu a stal se vojenským lékařem. Již na počátku své akademické kariéry si získal mezinárodní respekt. Jako profesor anatomie a fyziologie v Königsbergu (dnešní Kaliningrad) a Bonnu musel hájit svůj novátorský mechanický přístup proti výtkám tradičně orientovaných anatomů. Byl dokonce denunciován kvůli údajné nekompetentnosti na pruském ministerstvu kultury. Proto využil v roce 1858 nabídky bádenské vlády a přesídlil do Heidelbergu. Centrum jeho zájmů se však postupně přesouvalo od optické a akustické fyziologie k matematické fyzice.³)

Když se po smrti H. G. Magnuse uvolnila katedra fyziky v Berlíně, opustil Helmholtz v roce 1871 jak Heidelberg, tak fyziologii. Další růst jeho slávy byl pak spojen pouze s fyzikou. Roku 1888 byl jmenován prvním prezidentem nově zřízeného nejvyššího státního institutu pro fyziku, Physikalisch-Technische Reichsanstalt v Charlottenburgu, na dnešním předměstí Berlína.⁴) Také díky tomuto postu byl Helmholtz na konci života titulován jako „Reichskanzler der Physik“. Zemřel 8. září 1894.

Ve své slavné práci *O fyzikálním významu principu nejmenší akce*, publikované roku 1886 v *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, [7], odvodil dnes nepostradatelné podmínky variačnosti, které zcela po právu nesou jeho jméno.

Uvažoval mechanický systém, na nějž působí vnější síly závislé na souřadnicích, rychlostech a zrychleních⁵), a využil pouze Eulerovy-Lagrangeovy výrazy

$$P_i(p_j, p'_j, p''_j) = -\frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial H}{\partial p'_i}\right]. \tag{1}$$

Nejprve upozornil na jejich linearitu vzhledem ke zrychlením a použitím pravidla o záměnnosti druhých parciálních derivací se mu podařilo vyjádřit vztah sil a zrychlení:

$$\frac{\partial P_i}{\partial p''_k} = \frac{\partial^2 H}{\partial p'_i\,\partial p'_k} = \frac{\partial P_k}{\partial p''_i}, \tag{2}$$

---

²) Vynikající informační hodnotu má zejména obsáhlá biografie z pera Helmholtzova přítele a kolegy Leo Königsbergera [24]. Pro novější práce viz např. [27, 29].

³) Podrobnou studii o jeho působení na katedře fyziologie v Heidelbergu napsal W. U. Eckart, viz [23]. Tam lze také nalézt možná vysvětlení pro Helmholtzův obrat k fyzice.

⁴) Budova institutu byla na konci druhé světové války zničena.

⁵) V jeho označení $P_i(p_j, q_j, q'_j)$. Dále v tomto paragrafu používáme velice podobné, ale přehlednější označení Königsbergerovo, srov. § 1.2.

tedy *„zvyšuje-li zrychlení $p''_k$ sílu $P_i$ o nějakou konečnou hodnotu, pak stejně velké zrychlení $p''_i$ zvyšuje sílu $P_k$ o tutéž hodnotu“* [7, s. 161–162].

Vztah mezi silami a rychlostmi nalezl Helmholtz zderivováním $P_i$ vzhledem k $p'_k$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial P_i}{\partial p'_k} &= -\frac{\partial^2 H}{\partial p'_k\,\partial p_i} + \frac{\partial^2 H}{\partial p'_i\,\partial p_k} + \frac{\partial^3 H}{\partial p'_k\,\partial p'_i\,\partial p_l}\,p'_l + \frac{\partial^3 H}{\partial p'_k\,\partial p'_i\,\partial p'_l}\,p''_l = \\ &= -\frac{\partial^2 H}{\partial p'_k\,\partial p_i} + \frac{\partial^2 H}{\partial p'_i\,\partial p_k} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p'_i\,\partial p'_k}\right).\end{aligned}$$

Sečtením těchto výrazů s $\partial P_k/\partial p'_i$ a použitím vztahu (2) dostal

$$\frac{\partial P_i}{\partial p'_k} + \frac{\partial P_k}{\partial p'_i} = 2\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p'_i\,\partial p'_k}\right) = 2\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial P_i}{\partial p''_k}\right) = 2\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial P_k}{\partial p''_i}\right).$$

Dále poznamenal, že v mnoha případech, kdy $\partial^2 H/\partial p'_i\,\partial p'_k = \text{konst.}$, má tato podmínka jednodušší tvar

$$\frac{\partial P_i}{\partial p'_k} = -\frac{\partial P_k}{\partial p'_i}\,,$$

tedy vyjádřeno slovně: *„Narůstá-li zvyšováním rychlosti $p'_k$ při stejné poloze a stejných zrychleních síla $P_i$, potom bude odpovídající zvyšování $p'_i$ zmenšovat sílu $P_k$“* [7, s. 163].

Podobně pro nalezení vztahu mezi silami a souřadnicemi Helmholtz zderivoval $P_i$ vzhledem k $p_k$, a odečtením od $\partial P_k/\partial p_i$ dospěl ke třetí podmínce

$$\frac{\partial P_i}{\partial p_k} - \frac{\partial P_k}{\partial p_i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p'_i\,\partial p_k} - \frac{\partial^2 H}{\partial p'_k\,\partial p_i}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial P_i}{\partial p'_k} - \frac{\partial P_k}{\partial p'_i}\right).$$

Na konci první části své práce [7] shrnul dosavadní výsledky do následujícího tvrzení (s. 165–166):

**Tvrzení 2 (Helmholtz, 1886).** *Splnění vzájemných vztahů vnějších sil vyjádřených následujícími rovnicemi*

$$\text{(3)}\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial P_i}{\partial p''_k} = \dfrac{\partial P_k}{\partial p''_i}, \\[2ex] \dfrac{\partial P_i}{\partial p'_k} + \dfrac{\partial P_k}{\partial p'_i} = 2\,\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial P_k}{\partial p''_i}\right), \\[2ex] \dfrac{\partial P_i}{\partial p_k} - \dfrac{\partial P_k}{\partial p_i} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial P_i}{\partial p'_k} - \dfrac{\partial P_k}{\partial p'_i}\right) \end{cases}$$

*je ve spojení s podmínkou, že $P_i$ jsou lineární vzhledem ke zrychlením, což lze zapsat následujícím způsobem:*

$$\text{(4)}\qquad \frac{\partial^2 P_i}{\partial p''_j\,\partial p''_k} = 0,$$

*dostačující pro důkaz existence kinetického potenciálu $H$ takového, že síly $P_i$ mohou být vyjádřeny Lagrangeovým způsobem jako derivace téhož* (tedy jako Eulerovy-Lagrangeovy rovnice pro $H$, viz (1); pozn. aut.) *a že pohybové rovnice mohou být redukovány na princip nejmenší akce.*

*Tyto zde sestavené vztahy sil tedy obsahují úplnou charakteristiku takových pohybů, které podléhají principu nejmenší akce.*

Helmholtz si kupodivu nevšiml, že jím tolik zdůrazňovaná podmínka (4) vyplývá přímo z předchozích (3). Ještě se o tom zmíníme.

**Poznámka.** Názory na to, kdy byla vlastně Helmholtzova práce [7] publikována, se různí. Na obálce časopisu stojí 1887 a mnozí autoři to přijímají za rok publikace. Existuje však několik indicií, které naznačují, že tento článek vyšel již roku 1886.

Za prvé sám Helmholtz na konci druhé části článku uvádí jako datum dokončení již duben 1886; za druhé rok 1886 citují všichni jeho současníci, zejména posmrtně vydaná třetí část edice jeho vědeckých prací, srov. [7]; za třetí dodatkem k tomuto článku byla přednáška o historii principu nejmenší akce (*Zur Geschichte des Prinzips der kleinsten Action*) přednesená na zasedání Berlínské Akademie věd 27. ledna 1887 a posluchači měli patrně možnost seznámit se s prací, na niž Helmholtz ve své přednášce navazoval. Konečně, článek byl recenzován dr. Siebertem v JFM, srov. [28, č. 18.0941.01], a tato recenze vyšla již roku 1886.

Dnes se Helmholtzovy podmínky používají také v jiném ekvivalentním tvaru. Uvažuje se systém

$$B_{ij}(t,p^k,\dot p^k)\ddot p^j + A_i(t,p^k,\dot p^k) = 0, \tag{5}$$

tedy síly afinní vzhledem ke zrychlením, pro nějž mají podmínky (3) tuto podobu:

$$\begin{gathered} B_{ij} = B_{ji}, \qquad \frac{\partial B_{ij}}{\partial \dot p^k} = \frac{\partial B_{ik}}{\partial \dot p^j}, \\ \frac{\partial A_i}{\partial \dot p^j} + \frac{\partial A_j}{\partial \dot p^i} = 2\left(\frac{\partial B_{ij}}{\partial t} + \dot p^k \frac{\partial B_{ij}}{\partial p^k}\right), \\ \frac{\partial A_i}{\partial p^j} - \frac{\partial A_j}{\partial p^i} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial A_i}{\partial \dot p^j} - \frac{\partial A_j}{\partial \dot p^i}\right) + \frac{1}{2}\dot p^k \frac{\partial}{\partial p^k}\left(\frac{\partial A_i}{\partial \dot p^j} - \frac{\partial A_j}{\partial \dot p^i}\right), \end{gathered} \tag{6}$$

srov. např. [16, s. 5]. R. M. Santilli tvrdí, že tento ekvivalentní tvar *„byl zjevně poprvé odvozen Mayerem* (1896) *a poté v detailech rozpracován Davisem* (1928 a 1929)*“*, srov. [20, s. 65]. Nahlédneme-li do Mayerova článku, zjistíme, že Helmholtzovy podmínky jsou tam sice odvozeny jiným způsobem, ale v původním tvaru, srov. tvrzení 4. Až pozdější Davisova práce, která vychází ze systému rovnic ve tvaru $A_{ik}y_k + B_{ik}y'_k + C_{ik}y''_k = 0$, Helmholtzovy podmínky ve velmi podobném tvaru opravdu obsahuje.

V této souvislosti jistě překvapí, že podmínky (6) odvodil sám Helmholtz. Výsledek ale nepublikoval. Odvození bylo nalezeno až v jeho pozůstalosti.[6]) Roku 1905 jej spolu

[6]) Až roku 1994 objevil Mayerhofer [26], že se tato část Helmholtzovy pozůstalosti nachází v archivu Berlínské Akademie věd. Berlin-Brandenburgische Akademie der Wissenschaften, Akademiearchiv, Nachlaß Helmholtz, zejména č. 618–631.

se svým komentářem zveřejnil Leo Königsberger [9]. Odtud však není zřejmé, co jsou původní Helmholtzovy poznámky a co je editorský komentář. Königsberger nám vůbec o zdroji, z něhož vycházel, mnoho nesdělil.[7]) Navíc není jasné, kdy Helmholtzovy poznámky vznikly.

Je velmi pravděpodobné, že Helmholtz odvodil (6) někdy na přelomu let 1885 až 1886, tedy při koncipování článku [7] o principu nejmenší akce a posléze tuto část do konečné verze nezařadil, srov. poznámku pod čarou 7. K tomu se zřejmě vztahuje také narážka v dopise Kroneckerovi z 25. dubna 1886, viz [24, s. 357]: *„Pokusy o důkaz obrácených tvrzení mě přivedly k teorii polydimenzionálních funkcí, v níž je třeba se pohybovat velmi obezřetně. Stále jsem na pochybách, zda mám tuto část zařadit do hlavního článku nebo zda se jí mám zabývat odděleně. Ale i ve druhém případě musím svůj excursus nejdříve dokončit...“* Tedy přinejmenším první verze poznámek byla napsána již roku 1886.

Nejasné zůstává, zda Helmholtz v práci na tomto problému pokračoval a nakolik v ní pokročil. Obecně panuje shoda, že chtěl vyřešením tohoto pro něj velmi významného problému završit svou životní kariéru, srov. [9, 24, 26]. Ovšem výsledky této práce se nikde neobjevily, i když k tomu Helmholtz měl vynikající příležitost, a to třetí díl edice svých vědeckých prací, který vyšel těsně po jeho smrti. Z toho lze usuzovat, že Helmholtz v této otázce výrazněji nepokročil a že ekvivalentní Helmholtzovy podmínky byly tedy odvozeny již roku 1886.

Helmholtzova práce byla velkým impulsem pro další výzkum inverzního variačního problému. Na něm participovali zejména Helmholtzovi přátelé a kolegové z dob jeho působení v Heidelbergu — Leo Königsberger, Adolph Mayer a Karl Böhm. Ačkoliv se jim podařilo dosáhnout několika závažných výsledků, kompletní řešení silného inverzního variačního problému bylo objeveno až na počátku osmdesátých let 20. století I. Andersonem s T. Duchampem [1] a D. Krupkou [15].

### 2.2. Leo Königsberger — první důkaz Helmholtzových podmínek

Leo Königsberger (1837–1921) byl jedním z Helmholtzových nejbližších přátel a spolupracovníků.[8]) Nejenže navázal na Helmholtzův výzkum inverzního problému, ale je také autorem dosud nejpodrobnější Helmholtzovy biografie, viz [24]. Ve své době patřil k nejslavnějším matematikům, ale kvůli opomíjení citací je plné zhodnocení a využití jeho přínosu mnohdy velmi nesnadné.

Na sklonku 19. století napsal Königsberger sérii článků, které vydal roku 1901 knižně pod názvem *Principy mechaniky.*[9]) V jednom z těchto přípravných článků z roku 1896,

---

[7]) Jeho tajemná citace je zato velmi zajímavá: *„V Helmholtzově pozůstalosti se nacházejí poznámky, které byly původně označeny jako § 5 výše citované práce* ([7], pozn. aut.) *a které byly nadepsány »Umkehr des Problems«* (obrácení problému)*, ale kvůli nesnázím, které se postavily do cesty analytickému provedení a vyjádření, zůstaly nepublikovány...“* [9, s. 865].

[8]) Krátký životopis lze nalézt v [29], podrobnější informace v [27].

[9]) Kniha je věnována Helmholtzově památce, viz [13].

viz [12], publikoval důkaz Helmholtzových podmínek pro lagrangiány 1. řádu v případě dvou souřadnic.

**Tvrzení 3 (Königsberger, 1896).** *Mějme dány funkce* $P_1$, $P_2$ *lineární vzhledem k* $p_1''$ *a* $p_2''$ *vyhovující podmínkám* (3)*. Pak existuje kinetický potenciál* $H(p_1, p_2, p_1', p_2')$ *takový, že obě Eulerovy-Lagrangeovy rovnice*

$$P_1 = -\frac{\partial H}{\partial p_1} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial H}{\partial p_1'}\right), \qquad P_2 = -\frac{\partial H}{\partial p_2} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial H}{\partial p_2'}\right). \tag{7}$$

*jsou zároveň splněny.*

Jeho čtyřstránkový analytický důkaz je velmi složitý a nepřehledný, viz [12]. Také se v něm nevyhnul početní chybě, viz komentář důkazu v [14, s. 11–13]. Důkaz se dá mnohem snadněji provést moderními geometrickými metodami, viz např. [16, s. 5–8].

I po vydání již zmiňované monografie [13] v roce 1901 se Königsberger přinejmenším až do roku 1906 inverzním variačním problémem dále zabýval. V této druhé fázi se pokoušel zobecnit své výsledky na lagrangiány vyššího řádu v teorii pole (tedy závislé na více nezávislých proměnných).

Při vydání Helmholtzova rukopisu s odvozením podmínek (6) v roce 1905 napsal: *„Vyslovení navzájem nezávislých nutných a postačujících podmínek pro existenci kinetického potenciálu libovolného řádu s libovolným počtem nezávislých i závislých proměnných jsem s konečnou platností vyřešil na základě analytických výpočtů identických řešení hlavních rovnic pro variaci jednoduchých a násobných integrálů.“* [10])

Otázka, nakolik se Königsbergerovi onen důkaz opravdu podařilo provést, přesahuje rámec tohoto pojednání. Zde jen podotkněme, že Königsbergerovy výsledky jsou velmi zajímavé zejména proto, že nejstarší dosud známé důkazy jsou téměř o 80 let mladší, viz [1, 15]. Pro úplnost doplňme seznam jeho prací k tématu z let 1901–1906. Jde o publikace recenzované v JFM pod čísly: 32.0691.02, 33.0714.01, 36.0761.01, 36.0836.04 a 37.0395.01, viz [28].

### 2.3. Adolph Mayer — důkaz Helmholtzových podmínek

Christian Gustav Adolph Mayer (1839–1908) studoval v Heidelbergu v době, kdy tam působil také Helmholtz. Jeho profesionální kariéra je však spojena především s Lipskem.[11])

V roce 1896 vyšel Mayerův článek nazvaný *Podmínky existence kinetického potenciálu* [18]. Na rozdíl od předchozích pojednání Helmholtze a Königsbergera je tento článek psán z čistě matematického pohledu. Mayer dokázal precizními variačními postupy vyjasnit mnohdy nepřehlednou fyzikální argumentaci.

[10]) Viz [9, s. 864]. Odkaz na článek nebo knihu, kde bychom tento důkaz mohli nalézt, bohužel chybí.

[11]) Bližší informace viz [27].

Základním metodologickým nástrojem celé práce je tzv. Jacobiho princip, tedy tvrzení, že variace diferenciálu libovolné funkce $V(t, p_i, p_i')$ je rovna diferenciálu variace téže funkce $V$,[12]) tj.

$$\delta \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\delta V}{\mathrm{d}t}.$$

Princip je aplikován prostřednictvím následujících podmínek

$$\frac{\partial}{\partial p_i}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial V}{\partial p_i}, \qquad \frac{\partial}{\partial p_i'}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial V}{\partial p_i} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial V}{\partial p_i'}, \qquad \frac{\partial}{\partial p_i''}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial V}{\partial p_i'}. \tag{8}$$

Mayer nejdříve variačními metodami odvodil z (8) Helmholtzovy podmínky.

**Tvrzení 4 (Mayer, 1896).** *Mějme dány funkce $P_1, \dots, P_n$ závisející na $n$ závislých proměnných $p_i$, jejich prvních a druhých derivacích vzhledem k nezávislé proměnné $t$ a eventuálně také na nezávislé proměnné $t$.*

*Splnění podmínek* (3) *zajišťuje existenci funkce $H(t, p_i, p_i')$, která identicky splňuje následujících $n$ rovnic*

$$-\frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial H}{\partial p_i'}\right) = P_i. \tag{9}$$

Důkaz je popsán v [14, s. 14–15], pro originál důkazu viz [18, s. 522–523]. Mayerův článek pokračuje důkazem Helmholtzových podmínek:

**Tvrzení 5 (Mayer, 1896).** *Buďte $P_i(t, p_j, p_j', p_j'')$ funkce lineární vzhledem k $p''$. Splnění podmínek* (3) *stačí k tomu, abychom mohli nalézt $n$ funkcí $\psi_i(t, p_j, p_j')$ splňujících rovnice*

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial p_k'} = \frac{\partial P_k}{\partial p_i''}, \tag{10}$$

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial p_k} - \frac{\partial \psi_k}{\partial p_i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial P_i}{\partial p_k'} - \frac{\partial P_k}{\partial p_i'}\right). \tag{11}$$

Důkaz viz [18, s. 524–527], srov. také komentář v [14, s. 16–17]. V závěrečných poznámkách Mayer ještě explicitně vypsal nejobecnější tvar funkce $\psi$. Ta má podle něj složky $\psi_j = \chi_j(t, p_1, \dots, p_n, p_1', \dots, p_n') + u_j(t, p_1, \dots, p_n) + \partial\Phi(t, p_1, \dots, p_n)/\partial p_j$.

## 3. Zobecnění podmínek variačnosti na lagrangiány vyšších řádů

Adolph Mayer ve svém článku [18] zdůraznil, že jeho metoda je snadno použitelná při zobecňování na případy vyššího řádu. A opravdu již za necelý rok se podařilo Karlu

[12]) S pojmem variace pracoval Mayer, stejně jako Helmholtz a další, pouze intuitivně. Uvažovali variace jako „libovolné malé deformace“ a označovali je $\delta$. Pokus o bližší vysvětlení pojmu a precizní definici nalezneme u Arthura Hirsche, viz § 3.1.

Böhmovi zobecnit důkaz Helmholtzových podmínek alespoň pro lagrangiány 2. řádu, tedy pro $H(t, p_1, \ldots, p_n, p_1', \ldots, p_n', p_1'', \ldots, p_n'')$. Böhm navíc poprvé explicitně zapsal Helmholtzovy podmínky vyššího řádu. Práce však vyšla v *Journal für die reine und angewandte Mathematik* až o celé dva roky později.

Mezitím byly v *Mathematische Annalen* otištěny dva články od Arthura Hirsche, kde byl tento problém řešen zcela jinými metodami. V prvním článku uvažoval Hirsch diferenciální rovnici ve tvaru $F\big(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(m)}(x)\big) = 0$ a ve druhém se pokoušel zobecnit své výpočty pro $n$ rovnic ve tvaru

$$F_k(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n', \ldots, y_1^{(r_1)}, \ldots, y_n^{(r_n)}) = 0.$$

Zobecnění se však ani jemu nepodařilo dotáhnout do konečné podoby — výsledky jsou pouze existenčního charakteru.

### 3.1. Arthur Hirsch — zobecnění existenčních podmínek

Arthur Hirsch (1866–1948) působil jako profesor na univerzitě v Curychu. Neměl žádné přátelské ani kolegiální kontakty se skupinou matematiků kolem Helmholtze. Také použil k řešení inverzního problému zcela jinou metodu, tzv. teorii (samo)adjungovanosti.

Samoadjungovanost definoval jako vlastnost diferenciálních výrazů

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$$

následující rovnicí:

$$v \cdot \delta_u F = u \cdot \delta_v F, \qquad \text{kde} \qquad \delta_u F = \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial F}{\partial y^{(k)}}\, u^{(k)}. \tag{12}$$

Tak využívá vlastností druhé variace. Pomocí této teorie pak dokázal, že pro samoadjungované diferenciální rovnice existuje lagrangián.

Obsáhlý článek *O charakteristické vlastnosti diferenciálních rovnic variačního počtu* z roku 1897, viz [10], začíná diskusí inverzního problému pro jednu obyčejnou diferenciální rovnici o jedné závislé proměnné:

**Tvrzení 6 (Hirsch, 1897).** *Má-li funkce $F(x, y, y', \ldots, y^{(2n)})$ sudého řádu $2n$ tu vlastnost, že z ní odvozený lineární diferenciální výraz*

$$\delta F = \sum_{k=0}^{2n} F_k \cdot u^{(k)}$$

*je samoadjungovaný, pak může být kvadraturami vypočtena funkce $f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$ taková, že platí*

$$F = V(f) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} \left( \frac{\partial f}{\partial y^{(k)}} \right).$$

*Diferenciální rovnice $F = 0$ je tedy ekvivalentní se zadáním variačního problému extremalizovat integrál*

$$J = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y', \dots, y^{(n)})\, dx.$$

V [10, § 3] je tvrzení 6 dokázáno pro $n = 1$, srov. komentář v [14, s. 20–21]. Dále v §§ 4–6 je důkaz matematickou indukcí zobecněn pro libovolné $n$. Podobně jako v § 3 je ukázáno, že $F$ musí být afinní vzhledem k nejvyšším derivacím, a tedy že musí mít tvar $F = M(x, y, y', \dots, y^{(2n-1)}) \cdot y^{2n} + N(x, y, y', \dots, y^{(2n-1)})$.

Navíc je dokázáno, že $M$ nezávisí na $y^{(n+1)}, \dots, y^{(2n-1)}$. V § 9 je výpočet dále zobecněn na parciální diferenciální rovnice 2. řádu ve tvaru

$$F\bigl(x, y, z(x,y), z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}\bigr) = 0$$

a v § 10 na parciální diferenciální rovnice druhého řádu se třemi nezávislými proměnnými.

O rok později (1898) publikoval Hirsch článek *Podmínky existence zobecněného kinetického potenciálu*, viz [11]. Zde pokračoval ve zobecňování výsledků na systémy obyčejných diferenciálních rovnic s libovolným počtem závislých proměnných, tedy na rovnice ve tvaru $F_k(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n', \dots, y_1^{(r_1)}, \dots, y_n^{(r_n)}) = 0$. Výsledky mají opět většinou existenční charakter.

### 3.2. Karl Böhm — alternativní přístup ke zobecňování Helmholtzových podmínek

Mannheimský rodák Karl Böhm (1873–1958) studoval v devadesátých letech 19. století v Heidelbergu. V roce 1900 se tamtéž habilitoval. Čtyři roky nato byl jmenován mimořádným profesorem a Heidelbergu zůstal věrný až do roku 1914. Poté působil až do roku 1936 v Karlsruhe.

Jak jsme se již zmínili, podařilo se mu vyjádřit Helmholtzovy podmínky pro lagrangiány 2. řádu a dokonce provést jejich důkaz. Složitost výpočtů však ukázala, že se zobecněním na vyšší řády to nebude tak jednoduché, jak se předpokládalo.

**Tvrzení 7 (Böhm, 1899).** *Pro existenci kinetického potenciálu $H$ závislého na prvních a druhých derivacích souřadnic, který je definován rovnicemi*

$$P_i = -\left\{ \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial H}{\partial p_i'}\right) + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{\partial H}{\partial p_i''}\right) \right\}, \tag{13}$$

*je nutné a stačí, je-li $P_i$ taková funkce proměnných $p$, $p'$, $p''$, $p^{(3)}$, $p^{(4)}$, že jsou splněny následující podmínky:*

$$
(14)\qquad \begin{cases}
\dfrac{\partial P_i}{\partial p_k^{(4)}} = \dfrac{\partial P_k}{\partial p_i^{(4)}}\,,\\[2ex]
\dfrac{\partial P_i}{\partial p_k^{(3)}} + \dfrac{\partial P_k}{\partial p_i^{(3)}} = 2\,\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial P_i}{\partial p_k^{(4)}} + \dfrac{\partial P_k}{\partial p_i^{(4)}}\right),\\[2ex]
\dfrac{\partial P_i}{\partial p_k^{(2)}} - \dfrac{\partial P_k}{\partial p_i^{(2)}} = \dfrac{3}{2}\,\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial P_i}{\partial p_k^{(3)}} - \dfrac{\partial P_k}{\partial p_i^{(3)}}\right),\\[2ex]
\dfrac{\partial P_i}{\partial p_k'} + \dfrac{\partial P_k}{\partial p_i'} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial P_i}{\partial p_k^{(2)}} + \dfrac{\partial P_k}{\partial p_i^{(2)}}\right) - \dfrac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3}\left(\dfrac{\partial P_i}{\partial p_k^{(4)}} + \dfrac{\partial P_k}{\partial p_i^{(4)}}\right),\\[2ex]
\dfrac{\partial P_i}{\partial p_k} - \dfrac{\partial P_k}{\partial p_i} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial P_i}{\partial p_k'} - \dfrac{\partial P_k}{\partial p_i'}\right) - \dfrac{1}{4}\,\dfrac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3}\left(\dfrac{\partial P_i}{\partial p_k^{(3)}} - \dfrac{\partial P_k}{\partial p_i^{(3)}}\right).
\end{cases}
$$

Böhm využil Mayerovu metodu odvození Helmholtzových podmínek. Nejdříve však zobecnil Jacobiho princip na případ funkcí závisejících na vyšších derivacích až do řádu $\nu$, viz [3, s. 125–126] nebo [14, s. 22]. Dále také zobecnil Mayerovy substituční vztahy. Důkaz je tedy zcela analogický jako Mayerův, ovšem výpočty jsou velmi komplikované, srov. třístránkový Mayerův důkaz v [18] a Böhmův více než desetistránkový důkaz v [3].

Böhm uvádí ve svém článku velmi zajímavý dodatek. V něm jsou poprvé explicitně zapsány podmínky variačnosti pro libovolnou obyčejnou diferenciální rovnici (tzv. Helmholtzovy podmínky vyššího řádu). Bohužel neuvádí, jakým způsobem se mu podařilo podmínky odvodit, ani žádný důkaz jejich správnosti, ani žádnou citaci. Protože jde o zvlášť zajímavou věc, uvedeme zde celý dodatek v překladu.

**Tvrzení 8 (Böhm, 1899).** *Buď $H$ funkce prvních $\nu$ derivací souřadnic $p_i$ definovaná rovnicemi*

$$
-\left\{\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial H}{\partial p_i'}\right) + \cdots + (-1)^\nu \frac{\mathrm{d}^\nu}{\mathrm{d}t^\nu}\left(\frac{\partial H}{\partial p_i^{(\nu)}}\right)\right\} = P_i.
$$

*Pak $P_j(p_i, p_i', \dots, p_i^{(2\nu)})$ musí splňovat všech $(2\nu+1)$ následujících rovnic*

$$
(15)\qquad \begin{aligned}
&\frac{\partial P_i}{\partial p_\kappa^{(\tau)}} - \binom{\tau+1}{1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial P_i}{\partial p_\kappa^{(\tau+1)}}\right) + \binom{\tau+2}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{\partial P_i}{\partial p_\kappa^{(\tau+2)}}\right) - \cdots +\\
&\quad + (-1)^{2\nu-\tau}\binom{2\nu}{2\nu-\tau}\frac{\mathrm{d}^{2\nu-\tau}}{\mathrm{d}t^{2\nu-\tau}}\left(\frac{\partial P_i}{\partial p_\kappa^{(2\nu)}}\right) = (-1)^\tau \frac{\partial P_\kappa}{\partial p_i^{(\tau)}}, \quad \tau = 0, 1, 2, \dots, 2\nu.
\end{aligned}
$$

*Pro $\nu = 2$ se tyto relace shodují s Helmholtzovými podmínkami 2. řádu* [v tomto článku (14), pozn. aut.[13])].

[13]) Na první pohled je patrné, že i pro $\nu = 1$ souhlasí (15) s Helmholtzovými podmínkami (3).

Jako první dokázal toto tvrzení A. L. Vanderbauwhede [22], ovšem až v roce 1978.

Zde je třeba se přiklonit k názoru, že Böhm podmínky (15) jednoduše uhodl. Porozumět jejich struktuře není až tak složité, má-li člověk k dispozici Helmholtzovy podmínky (3) pro první a (14) pro druhý řád. Dále je to jen otázka výpočtu jednotlivých koeficientů. Dokázat tyto podmínky je ale úkolem mnohem složitějším.

## 4. Integrační faktory

Jak jsme se již zmínili v úvodu, formulaci silného inverzního variačního problému lze mnoha způsoby zobecnit. Dále se zabýváme zřejmě nejznámějším zobecněním, nazývaným nejčastěji *problém existence integračních faktorů* nebo také multiplikátorů.

*Mějme dán systém obyčejných diferenciálních rovnic 2. řádu ve tvaru*

$$F_i(t, q^k, \dot{q}^k, \ddot{q}^k) = B_{ij}(t, q^k, \dot{q}^k)\ddot{q}^j + A_i(t, q^k, \dot{q}^k) = 0.$$

*Zjistěte, zda existuje v každém bodě regulární matice* $\big(f_{ij}(t, q^k, \dot{q}^k)\big)$ *taková, že*

$$\sum\nolimits_j (f_{ij})F_j = \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}.$$

Problém existence integračních faktorů je zajímavý hned z několika důvodů. Jednak je to důvod historický — první pokus o řešení této formulace inverzního problému je starší než Helmholtzova formulace silného inverzního problému. Z hlediska matematického je problém zajímavý svou složitostí — jeho úplné řešení není dosud známo a většina výsledků se týká obyčejných diferenciálních rovnic 2. řádu: pro jednu takovou rovnici integrační faktor vždy existuje, ale pro systém dvou (a více) rovnic jeho existence již zajištěna není.

Nakonec ani z hlediska historie hledání integračních faktorů není ani zdaleka vše jasné. Většina autorů považuje za první formulaci a pokus o řešení článek A. Hirsche z roku 1897 [10]. Již při prvním pohledu zjistíme, že Hirsch navazuje na výsledky G. Darbouxe, dokonce cituje jeho knihu z roku 1894, viz [4].

Darboux studuje, jak souvisí otázka existence integračního faktoru pro jednu obyčejnou diferenciální rovnici 2. řádu s existencí minimálních a maximálních křivek na ploše, a ukazuje, že právě pro ty diferenciální rovnice, které extremizují jistý variační integrál, integrační faktor existuje.

Z hlediska historického je potřeba upozornit, že Darboux hned v prvních větách paragrafu 604, viz [4, s. 53], kterým začíná pojednání o inverzním problému, uvádí, že pouze *„reprodukuje výsledky Beltramiho a Diniho“*. Pravděpodobně měl na mysli práce [2, 5], které jediné cituje v kapitole, kde řeší inverzní problém. To svádí k dojmu, že se problémem integračních faktorů zabývali v Itálii již na konci šedesátých let 19. století. Ovšem z prací [2, 5] Darboux přebírá pouze část teorie geodetických křivek na ploše. Pokud se Eugenio Beltrami a Ulisse Dini inverzním problémem opravdu zabývali, jsou jejich práce zapomenuty.

### 4.1. Zapomenutá práce Nikolaje Jakovleviče Sonina

Zcela stranou této posloupnosti stojí článek ruského matematika působícího ve Varšavě Nikolaje Jakovleviče Sonina (1849–1915).[14]) Sonin dokončil svůj článek *O určení minimálních a maximálních křivek na ploše* v prosinci roku 1885. Jde tedy pravděpodobně o nejstarší pokus o řešení inverzního problému.

Sonin hledá integrační faktory pro jednu obyčejnou diferenciální rovnici 2. řádu ve tvaru $y'' = \varphi(x, y, y')$. Maximální a minimální křivky jsou pak definovány jako extremály funkcionálu $\int_a^b f(x, y, y')\,\mathrm{d}x$, což je ekvivalentní s rovnicí:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0. \tag{16}$$

Zderivováním (16) vzhledem k $y'$ a substitucí $\partial^2 f/\partial(y')^2 = z$ převedl Eulerovu-Lagrangeovu rovnici na ekvivalentní parciální diferenciální rovnici 1. řádu

$$\frac{\partial z}{\partial x} + y'\frac{\partial z}{\partial y} + \varphi\frac{\partial z}{\partial y'} + z\frac{\partial \varphi}{\partial y'} = 0.$$

Po substituci $p = y'$, integraci a nalezení vztahů mezi libovolnými funkcemi vyjádřil výsledek takto:

**Tvrzení 9 (Sonin, 1886).** *Obecné řešení rovnice* (16) *má vyjádření*

$$\begin{aligned} f(x,y,p) = p\int_A^p &\Phi(\psi,\sigma)\cdot\exp\left[-\int\left(\frac{\partial\log\varphi}{\partial p}\right)\mathrm{d}p\right]\mathrm{d}p - \\ &- \int_A^p p\,\Phi(\psi,\sigma)\cdot\exp\left[-\int\left(\frac{\partial\log\varphi}{\partial p}\right)\mathrm{d}p\right]\mathrm{d}p + \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y}p, \end{aligned} \tag{17}$$

*kde $A$ je kořen rovnice*

$$\Psi\big[\varphi(x,y,A),\ \sigma(x,y,A)\big] = 0. \tag{18}$$

Rovnice (17) slouží k nalezení všech nekonečně mnoha ekvivalentních lagrangiánů, funkce $\varphi$, $\sigma$ v podmínce (18) jsou první integrály rovnice $y'' = \varphi(x, y, y')$.

Přestože byla Soninova práce recenzována v JFM (č. 19.0359.01), upadla na dlouho v zapomnění. Až v osmdesátých letech 20. století byla nejméně čtyřikrát citována,[15]) a po dalších deseti letech byly po Soninovi dokonce pojmenovány dva geometrické objekty (Helmholtzova-Soninova forma a Helmholtzovo-Soninovo zobrazení). Ty však nemají s jeho výzkumy žádnou užší souvislost.

[14]) Podrobný Soninův životopis napsal A. I. Kropotov, viz [25]. Mimoruské zdroje se o Soninovi zmiňují jen velice zřídka a velice povrchně, např. jeho biografie v [29] čítá pouhé čtyři krátké odstavce.

[15]) Dle Science Citation Index, viz `http://wos.cesnet.cz/CIW.cgi`

## 5. Závěr

Tímto článkem jsme chtěli především poukázat na způsob, jakým by mohla být historie matematiky efektivně využívána. Řešení silného inverzního problému bylo na přelomu 19. a 20. století velmi aktuálním tématem. Výzkum pokročil mnohem dál, než by většina matematiků citujících zde uvedené práce byla ochotna připustit.

Odhalili jsme zde několik dosud neznámých skutečností, které usvědčují některé renomované matematiky z toho, že citují práce, které podrobně nečetli, nebo dokonce ani neviděli. Jinak by muselo být např. známo, že autorem ekvivalentního tvaru Helmholtzových podmínek je sám Helmholtz, že Mayer při svém důkazu Helmholtzových podmínek navazoval na Königsbergerovu práci, že se Böhmovi podařilo explicitně zapsat Helmholtzovy podmínky vyššího řádu nebo že Hirsch neformuloval problém existence integračních faktorů.

Jako je inverzní problém sám otázkou velmi komplikovanou, tak i jeho historie je velmi spletitá. Ovšem o to zajímavější. Lze jen litovat, že je studium historie inverzního problému teprve v počátcích. Například o historii inverzního problému pro parciální diferenciální rovnice nebo o starší historii slabého inverzního problému není zatím známo takřka nic.

**Poděkování.** Je mi potěšením poděkovat mé ženě Veronice, a to nejen za neocenitelnou lingvistickou pomoc, ale především za soustavnou podporu a nekonečnou trpělivost. Dále bych rád poděkoval doc. K. Smítalové a doc. L. Klapkovi za podnětné náměty na vylepšení textu a prof. Talentimu z redakce časopisu Annali di Matematica za nezištné zaslání kopií článků E. Beltramiho a U. Diniho. Nakonec bych rád poděkoval také doc. O. Krupkové, pod jejímž osobitým vedením jsem se historií inverzního problému začal zabývat.

L i t e r a t u r a

[1] ANDERSON, I. M., DUCHAMP, T.: *On the existence of global variational principles.* American Journal of Mathematics *102* (1980), 781–868.

[2] BELTRAMI, E.: *Risolutione del Problema: Riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentate da linee rette.* Annali di Matematica VII (1866), 185nn. (Časopis byl většinou citován jako Brioschi Ann.)

[3] BÖHM, K.: *Die Existenzbedingungen eines von den ersten und zweiten Differentialquotienten der Coordinaten abhängigen kinetischen Potentials.* Journal für die reine und angewandte Mathematik *121* (1899) (2), 124–140. (Časopis byl citován také jako Crelle Journal nebo Borchardt Journal.)

[4] DARBOUX, G.: *Leçons sur la Théorie Générale des Surfaces III.* Gauthier-Villars, Paris 1894.

[5] DINI, U.: *Sopra un problema che si presenta nella teoria generale delle resentazione geografiche di una superficie su di un'altra.* Annali di Matematica (2) III (1870), 269–294.

[6] HAMILTON, W. R.: *On a general method in dynamics.* Philosophical Transactions of the Royal Society 1834 (2), 247–308; *Second Essay on a general method in dynamics*, Philosophical Transactions of the Royal Society 1835 (1), 95–144. Digitální kopie: `http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Hamilton/Papers.html`

[7] HELMHOLTZ, H.: *Über die physikalische Bedeutung des Princips der kleinsten Wirkung.* Journal für die reine und angewandte Mathematik *100* (1886) (2, 3), 137–166, 213–222. Také ve: *Wissenschaftliche Abhandlungen III.*, J. A. Barth, Leipzig 1895, 203–248.

[8] Helmholtz, H.: *Zur Geschichte des Princips der kleinsten Action.* Sitzungsberichte der kgl. Preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1887 (10. März 1887), 225–236. Také ve: *Wissenschaftliche Abhandlungen III.*, J. A. Barth, Leipzig 1895, 249–263.

[9] Helmholtz, H.: *Über die physikalische Bedeutung des Prinzips der kleinsten Wirkung. (Aus den hinterlassenen Papieren bearbeitet von Leo Königsberger.)* Sitzungsberichte der kgl. Preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1905 (26. Oktober 1905), 863–883.

[10] Hirsch, A.: *Über eine charakteristische Eigenschaft der Differentialgleichungen der Variationsrechnung.* Mathematische Annalen *49* (1897), 49–72.
Digitální kopie: `http://gdz.sub.uni-goettingen.de/`

[11] Hirsch, A.: *Die Existenzbedingungen des verallgemeinerten kinetischen Potentials.* Mathematische Annalen *50* (1898), 429–441.
Digitální kopie: `http://gdz.sub.uni-goettingen.de/`

[12] Königsberger, L.: *Über die Prinzipen der Mechanik.* Sitzungsberichte der kgl. Preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1896 (30. Juli 1896), 899–944.

[13] Königsberger, L.: *Die Prinzipien der Mechanik.* B. G. Teubner, Leipzig 1901.

[14] Kotůlek, J.: *Historical notes on the inverse problem of the calculus of variations.* Diplomová práce, Slezská univerzita v Opavě, Opava 2002.
Elektronická verze: `http://www.math.slu.cz/People/JanKotulek/thesis.pdf`

[15] Krupka, D.: *On the local structure of the Euler–Lagrange mapping of the calculus of variations.* In: Proceedings of the Conference (CSSR-GDR-Poland) on Differential Geometry and Its Applications, September 1980; Kowalski, O. ed., Charles University in Prague, Czechoslovakia, 1981, 181–188.

[16] Krupková, O.: *The Geometry of Ordinary Variational Equations.* Lecture Notes in Mathematics 1678, Springer-Verlag, Berlin 1997.

[17] Mayer, A.: *Geschichte des Prinzips der kleinsten Action.* Akademische Antrittsvorlesung, Veit & Cie, Leipzig 1877.

[18] Mayer, A.: *Die Existenzbedingungen eines kinetischen Potentiales.* Berichte über die Verhandlungen der königlich sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-Physische Classe *48* (1896), 519–529.

[19] Morandi, G., Ferrario, C., Lo Vechio, G., Marmo, G., Rubano, C.: *The Inverse Problem in the Calculus of Variations and the Geometry of the Tangent Bundle.* Physics Reports *188* (1990), 147–284.

[20] Santilli, R. M.: *Foundations of Theoretical Mechanics I.* The Inverse Problem in Newtonian Mechanics, Springer, New York 1978.

[21] Sonin, N. J.: *Ob opredělenij maximalnych i minimalnych svojstv ploskich krivych.* Warsawskye Universitetskye Izvestiya 1886 (1–2), 1–68.

[22] Vanderbauwhede, A. L.: *Potential operators and the inverse problem of classical mechanics.* Hadronic Journal *1* (1978), 1177–1197.

[23] Eckart, W. U.: *Von der physikalischen Physiologie zur mathematischen Physik. Hermann von Helmholtz in Heidelberg (1858–1871).*
`http://www.med.uni-hd.de/sonstiges/timeline/helmholtz.htm`

[24] Königsberger, L.: *Hermann von Helmholtz.* Dover Publications, New York 1965.

[25] Kropotov, A. I.: *Nikolay Yakovlevich Sonin, 1849–1915.* Nauka, Leningrad 1967.

[26] Mayerhofer, B.: *Das Prinzip der kleinsten Wirkung bei Hermann von Helmholtz.* Centaurus *37* (1994), 304–320.

[27] *Homo Heidelbergensis mathematicus.*
`http://www.ub.uni-heidelberg.de/helios/fachinfo/www/math/homoheid.htm`

[28] *Jahrbücher über die Fortschritte der Mathematik.*
`http://www.emis.de/MATH/JFM/JFM.html`, aktualizace: prosinec 2002.

[29] *The MacTutor History of Mathematics archive.*
`http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/`