Matyáš Lerch

Eduard Fuchs a Karel Lepka, Brno

Dne 3. srpna 2002 uplynulo osmdesát let od smrti Matyáše Lercha, prvního českého matematika vskutku světového jména. Jeho osudy jsou v mnoha směrech zajímavé a svým způsobem ve všech životních oblastech paradoxní:

- jako vědec dosáhl světového věhlasu, doma se mu však odpovídajícího postavení v podstatě nedostalo;
- jako pedagog sice nebyl zrovna excelentní, přesto právě jako učitel významně ovlivnil českou matematiku 20. století;
- v soukromém životě byl zarytým starým mládencem, a přesto ve dvaašedesáti letech zemřel ženatý s manželkou o 23 let mladší.

Připomeňme si stručně jeho životní osudy a matematické dílo, které je v mnoha oblastech stále aktuální.

1. Životopis Matyáše Lercha

Matyáš Lerch se narodil 20. února 1860 v obci Milínov poblíž Sušice. Jeho otec Vojtěch Lerch byl drobný zemědělec. Malý Matyáš byl velmi čilý a bystrý, v šesti letech však utrpěl vážný úraz a po vyléčení mu zůstala levá noha ohnutá v koleně, takže mohl chodit jen s pomocí berle. Kvůli úrazu začal chodit do školy až v devíti letech, když se jeho rodiče přestěhovali do Sušice. Lerch byl od počátku výborným žákem a záhy se začalo projevovat jeho mimořádné nadání pro matematiku. Po skončení měšťanské školy nastoupil krátce v továrně Františka Scheinosta v Sušici, kde se měl stát úředníkem.

Přestože finanční situace jeho rodičů nebyla nejlepší a úřednická kariéra byla lákavá, neboť mladý Matyáš by byl finančně zabezpečený, rozhodl se pro další studium. Složil úspěšně přijímací zkoušky a pro mimořádně dobré výsledky mu byla udělena výjimka, takže mohl nastoupit hned do pátého ročníku reálného gymnázia v Plzni. Maturitu složil v roce 1880 na reálce v Rakovníku. Již během středoškolského studia se Lerch začal věnovat matematice. Samostatně studoval tehdy dostupné učebnice a začal dokazovat tvrzení, která v těchto učebnicích nebyla uvedena. Svědčí o tom například dopis ze dne 17. května 1878, který poslal tehdy jako kvintán svému učiteli Emilu

Doc. RNDr. Eduard Fuchs, CSc. (1942), Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity, Janáčkovo nám. 2a, 662 95 Brno, e-mail: `fuchs@math.muni.cz`

RNDr. Karel Lepka, Ph. D. (1950), Vojenská střední škola, gen. Píky 2, 613 00 Brno, e-mail: `k.lepka@email.cz`

Práce byla podpořena MŠMT v rámci projektu LN00A041.

Seifertovi.[1]) V tomto listě Lerch mimo jiné píše: *Velevážený pane! Odpustit mi račte, že osměluji se psáti Vám, žádá toho potřeba. Při jisté příležitosti v deskriptivě podařilo se mi poznati větu … Pročež Vás snažně prosím, byste mi oznámiti ráčili, je-li věta tato již v některém spise uveřejněna a u koho, čili nic. Důkaz na ni mám pouze pomocí deskriptivy, myslím však, že by se dala velmi krásně dokázati pomocí geometrie polohy, do níž beztoho náleží. Až budu lépe znáti dílo Weyrovo, možná, že naň přijdu.*

Po prázdninách roku 1880 se dal zapsat na České vysoké škole technické v Praze jako řádný posluchač oboru inženýrského stavitelství. Na technice studoval tři roky, jeho učiteli byli mj. i Eduard Weyr, Gabriel Blažek a František Tilšer. Lerch měl v úmyslu vykonat učitelskou zkoušku a stát se středoškolským učitelem. Jak však později zjistil, kvůli tělesné vadě by mu to nebylo umožněno, a tak se začal plně věnovat pouze matematice. Ve školním roce 1883–1884 se stal mimořádným posluchačem české univerzity. Jeho profesorem byl František J. Studnička, který si nadaného studenta velice oblíbil. V dalším školním roce studoval v Berlíně, neboť získal státní stipendium 800 zlatých. Jeho profesory tam byli nejlepší němečtí matematici té doby — Weierstrass, Kronecker, Fuchs a Runge. V Berlíně také poznal některé mladé matematiky, mezi nimiž byli například Kovalevská, Heffter, Köhler a další.

Po návratu do Prahy se Lerch v roce 1886 habilitoval a byl jmenován soukromým docentem pražské české techniky. Protože tím však neměl zaručen žádný pravidelný příjem, stal se na této škole současně asistentem a později i zástupcem prof. Blažka. V této době začala také jeho rozsáhlá publikační činnost. Již jako student publikoval 14 vědeckých prací, v letech 1886–1896 pak uveřejnil dalších přibližně 110 článků, a to nejen v časopisech domácích, ale také v renomovaných časopisech zahraničních, jako byly *Comptes Rendus, Acta Mathematica, Journal für die reine und angewandte Mathematik* a jiné.[2]) Zvláštního uznání se Lerchovi dostalo od vynikajícího francouzského matematika Ch. Hermita, který vysoce oceňoval Lerchovu vědeckou práci. Již výpočet Raabeova integrálu $\int_0^1 \log\Gamma(x)\,\mathrm{d}x$, který Lerch zveřejnil v roce 1888 v časopise *Giornale di matematiche*, Hermita tak nadchl, že ho ve svých přednáškách uváděl slovy: *Voici pour y parvenir la méthode ingénieuse et élégante de Mr. Matyas Lerch, docent à l'Ecole Polytechnique Tchèque de Prague.*[3]) Jak ukazuje jejich vzájemná korespondence, Hermite měl k Lerchovi vřelý vztah.

V roce 1896 tak nastala pro české poměry vskutku nelichotivá situace: Matyáš Lerch, autor cca 120 vědeckých prací, matematik evropského věhlasu, člen Královské české společnosti nauk a od r. 1893 i člen České akademie, byl bez místa, neboť jako asistent mohl působit nejvýše 10 let a stálé místo pro něj na českých vysokých školách nebylo; ta získávali podstatně méně fundovaní adepti. Až na přímluvu Hermitovu získal v r. 1896 profesuru ve švýcarském Fribourgu, kde působil 10 let.

---

[1]) Syn E. Seiferta Ladislav Seifert (1883–1956), český matematik a profesor Masarykovy univerzity v Brně, byl naopak žákem M. Lercha.

[2]) Seznam evropských a amerických matematiků, jimž Lerch posílal separáty svých prací, obsahuje více než sto adres.

[3]) Zde předkládám důmyslnou a elegantní metodu, ke které dospěl pan Matyáš Lerch, docent pražské české techniky.

V době švýcarského působení došlo v jeho životě k řadě významných změn. Kromě toho, že se podstatně zlepšila jeho hmotná situace, podstoupil v roce 1900 náročnou operaci u doktora Hessinga, takže po ní mohl odložit berli a chodit jenom o holi, na kratší vzdálenosti dokonce i bez ní. V roce 1897 za ním přijela jeho čtrnáctiletá neteř Růžena Sejpková, která mu vedla domácnost[4]), takže se mohl plně věnovat pedagogické a publikační činnosti, která v tomto období vyvrcholila a dostalo se jí i mimořádného mezinárodního ocenění, jak se o tom ještě zmíníme.

Přes všechny pocty, kterých se mu v cizině dostalo, se Lerch chtěl vrátit do vlasti, a proto ho velice mrzelo, že byl několikrát opomenut při jmenování profesorů na českých vysokých školách. Návrat z ciziny se mu zdařil až v roce 1906, kdy byl jmenován řádným profesorem české techniky v Brně. Na této škole působil až do roku 1920. Po příchodu do Brna se Lerch dočkal uznání i doma. Byl zvolen čestným členem Jednoty českých matematiků a fyziků, v roce 1909 získal čestný doktorát filozofie pražské univerzity a ve školním roce 1908–1909 byl děkanem oboru strojního inženýrství na technice v Brně. V té době se však jeho zdravotní stav postupně zhoršoval. Trpěl totiž cukrovkou, která se tehdy prakticky nedala léčit, neboť inzulín ještě nebyl objeven. Ze zdravotních důvodů musel odmítnout jmenování rektorem brněnské techniky a také jeho publikační činnost poklesla.

Dne 9. srpna 1920 byl Lerch jmenován řádným profesorem nově zřízené Masarykovy univerzity. Zahajovací přednášku s názvem *O dvojicích řad* pronesl 19. října 1920. Jeho vyučovací povinnost čítala nejméně pět hodin týdně a k tomu musel aspoň v každém třetím semestru mít tzv. Collegium publicum o vybraných zvláštních partiích. Kromě vyučování byl Lerch pověřen budováním matematického ústavu Masarykovy univerzity a této činnosti se věnoval velmi energicky. 3. srpna 1922 při prázdninovém pobytu v Sušici však náhle zemřel na prudký zápal plic, který si přivodil při koupání ve studené řece.

Lerchovo matematické dílo tak zůstalo u čísla 238 původních vědeckých prací napsaných v češtině, francouzštině, němčině, chorvatštině, polštině a portugalštině. Přes 150 prací je z matematické analýzy, 52 z teorie čísel, další pak z geometrie, aritmetiky a dalších oblastí.

Pokusme se nyní alespoň stručně naznačit, co bylo pravděpodobně důvodem jeho problémů se získáním místa a proč se nestal profesorem matematiky na pražské nebo vídeňské univerzitě, což by bylo místo adekvátní jeho vědeckým kvalitám.

Cenným zdrojem informací v tomto směru byl především nejvýznamnější Lerchův žák, čtenářům jistě dobře známý dlouholetý profesor brněnské univerzity Otakar Borůvka. Borůvka nastoupil po 1. světové válce na brněnskou techniku, kde tehdy matematiku vyučovali Jan Vojtěch a Matyáš Lerch, kteří se v přednáškách pravidelně střídali. Drtivá většina posluchačů si matematiku zapisovala tak, aby ji absolvovali u J. Vojtěcha, který sice neměl světové jméno jako Lerch, leč jako přednášející byl oblíbenější a především jako examinátor byl mnohem mírnější. Borůvka však po celý život zdůrazňoval, jak šťastný krok učinil, když si matematiku zapsal u Lercha. Lerchův přístup k matematice a obsah jeho přednášek Borůvku uchvátil. (Zdůrazněme,

[4]) V r. 1920 se s ní M. Lerch oženil, aby ji na stáří finančně zabezpečil.

že obsah, nikoliv forma: Lerch nebyl nijak dobrý přednášející; mluvil slabým hlasem, otočen k tabuli, navíc velmi přísně zkoušel — žádný div, že se k němu posluchači nehrnuli.) Lerch Borůvku pro matematiku zcela získal. V r. 1920, ještě jako studentovi techniky, mu dokonce nabídl místo asistenta na univerzitě, které Borůvka s nadšením přijal. V letech 1920–1922 se Borůvka s Lerchem i lidsky velmi sblížil a často s ním hovořil o jeho životních osudech. Při veškeré úctě, kterou Borůvka k Lerchovi po celý život choval, uváděl, že vyjít s ním zřejmě nebylo pro tehdejší matematickou komunitu zrovna lehké. Lerch si byl v tehdejší české matematické obci vědom své intelektuální převahy a dovedl ji výrazně dávat najevo. Proto nebyl mezi českými matematiky příliš oblíben. Jednoduché to zřejmě neměl ani u nadřízených: populární je jeho často citovaný výrok, který s oblibou dával ve společnosti k lepšímu: *Víte, jaký je rozdíl mezi panem dvorním radou Strouhalem a mou levou nohou?* ptal se a hned také odpovídal: *V podstatě žádný, protože oba nechtějí pracovat, ale všude chtějí mít přednost.*

Lerch ostatně vedl spory i v mezinárodní matematické komunitě. Známý je především jeho dlouholetý a mnohdy velmi ostrý spor s německým matematikem Alfredem Pringsheimem, který probíhal v devadesátých letech 19. století.[5]) V tomto sporu byl nejprve v obraně Lerch, ve druhé fázi pak Pringsheim. Uvedený spor, byť formálně, nikoli však smířlivě dávno ukončený, zřejmě ovlivňoval nejen smýšlení Lerchovo, ale i mínění o Lerchovi. Uveďme alespoň dva doklady tohoto faktu.

Ještě po mnoha letech, když se na téma Pringsheim dali do hovoru, zeptal se Lerch Borůvky: *Kdo si myslíte, že je lepší matematik? Já nebo Pringsheim?* Borůvka samozřejmě odpověděl: *No přece vy!* Na to Lerch: *Nikoliv. Já jsem pouze vyslovil větu „Pringsheim je vůl“. On ji však dokázal!*

Ačkoliv pravda v uvedeném sporu byla zřejmě z větší části na straně Lerchově, ještě v r. 1922 píše Karel Petr [30] v Lerchově nekrologu o Lerchovi dosti příkře: … *Odvozuje v nich kriteria pro konvergenci řad nekonečných s kladnými členy, a to kriteria již dávno známá a v plné obecnosti odvozená. Není pro mne pochyby, že Lerchovi nebyly tehdy úplně známy elementy nauky o nekonečných řadách s kladnými členy (což však tenkrát bylo možno říci i o mnohém spisovateli učebnic analysy), avšak v tom právě (a také ovšem ve způsobu podání), že uveřejňuje autor pojednání z oboru, s jehož počátky není náležitě obeznámen, vidím známku nemírného sebevědomí, o němž jsem se svrchu zmínil.*

Pro přesnost a historickou úplnost jen dodejme, že i Petrovy výhrady a komentáře vůči Lerchovým nepřesnostem v prioritách některých tvrzení byly rovněž nepřesné či nesprávné, neboť skutečnost, jak již tomu bývá, byla mnohem složitější a komplikovanější, než se na první pohled zdálo.

2. Vědecké dílo M. Lercha

Jak jsme již uvedli, Lerch publikoval více než dvě stě třicet prací, nenapsal však žádnou monografii ani vysokoškolskou učebnici, ačkoliv výsledky, kterých dosáhl, by

[5]) O podstatě tohoto sporu se zmíníme později.

ho k tomu v mnoha oborech opravňovaly. Jeho práce měly nejen dobrou odbornou úroveň, velký důraz Lerch kladl i na jazykovou stránku. V této souvislosti ocitujme část jeho dopisu ze dne 23. 7. 1921 tehdejšímu děkanovi přírodovědecké fakulty prof. Hostinskému, v němž Lerch ostře nesouhlasí s připojováním cizojazyčných výtahů k českým publikacím. I tento úryvek je zajímavým dokladem Lerchova stylu myšlení.

Připojovati cizojazyčné výtahy k českým publikacím příčí se mému vkusu a považuji je za zbytečné; zejména podotýkám a) z výtahů připojených v cizím jazyku u jiných českých autorů jsem si dosud nikdy nic nevybral, a mám za to, že se cizím čtenářům daří v té věci stejně; neboť b) český originál je zpravidla tak stručně psán, že vlastně jest jen výtah. c) Ani mnohem menší národové (Norové, Dánové) ani orientálci nepřipojují k publikacím svého jazyka cizojazyčných výtahů; tento mrav jest jedním ze symptomů slovanské inferiority (kdo sám sebe necení, není úcty hoden).

Pravděpodobně jazykové důvody vedly Lercha k vytvoření novotvaru *množina*, který časem v české matematické terminologii zdomácněl místo dříve užívaného pojmu *množství*.

Jak jsme již uvedli, hlavními oblastmi Lerchova zájmu však byly matematická analýza a teorie čísel. Proto se dále budeme věnovat těmto oborům. V této souvislosti je však nutno se opět zmínit o O. Borůvkovi, který po celý život na Lercha vděčně a s mimořádnou úctou vzpomínal. Kromě „občanských" projevů této vděčnosti, jako bylo umístění pamětní desky na matematickém pavilonu Přírodovědecké fakulty a pojmenování jedné z brněnských ulic po jeho učiteli, považoval Borůvka za svou povinnost zabezpečit kritické zhodnocení Lerchova matematického díla. Sám se přitom chopil vedení kolektivu mladších spolupracovníků, s nimiž podrobně zmapoval Lerchovo dílo v matematické analýze — viz [2]. Bohužel se za Borůvkova života nepodařilo analogicky zpracovat Lerchovo dílo z teorie čísel, přestože takový záměr existoval. Alespoň částečně to tak učinil až později mladší z autorů tohoto článku (viz [11] a [12]).

2.1. Dílo M. Lercha z teorie čísel

Matyáš Lerch publikoval v teorii čísel 52 prací, které jsou psány česky, německy, francouzsky a polsky a jsou publikovány jak v renomovaných zahraničních časopisech, tak i v časopisech domácích. Některé z nich významným způsobem přispěly k rozvoji teorie čísel. Zpočátku se Lerch věnoval aritmetickým funkcím, kde dokázal řadu zajímavých tvrzení. Tak např. v práci [13] odvodil vzorce

$$\sum_{\varrho=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \psi(n-\varrho,\varrho)=n, \qquad \sum_{\varrho=0}^{n} \psi(n+\varrho,\varrho)=2n$$

a v práci [14] dokázal různými způsoby vzorec

$$\sum_{a=0}^{\left[\frac{m-1}{n}\right]} \psi(m-an,a)=\sum_{a=0}^{\left[\frac{m-1}{n}\right]} \chi(m-an,a),$$

kde $\psi(a,b)$ je počet dělitelů čísla a, které jsou větší než b, a $\chi(a,b)$ je počet dělitelů čísla a, které jsou menší než b.

Nejvýznamnějších výsledků v teorii čísel dosáhl v tematice věnované kvadratickým formám. Jeho stěžejní dílo v této oblasti, *Essais sur le calcul du nombre des classes de formes quadratiques binaires aux coefficients entiers* (Pojednání o výpočtu počtu tříd binárních kvadratických forem s celočíselnými koeficienty) přineslo Lerchovi největší vědecký úspěch. Jako druhý Čech — prvním byl J. E. Purkyně — dostal Velkou cenu pařížské Akademie, nejprestižnější vědecké ocenění té doby. Současně se stal jedním z kandidátů řádného členství v této proslulé společnosti.[6]) Originálem uvedené práce je [15], zkrácenou a upravenou verzi publikoval v Acta Mathematica [16].

Binární kvadratická forma má tvar

$$ax^2 + bxy + cy^2,$$

její diskriminant je $D = b^2 - 4ac$, pro $D < 0$ klademe $-\Delta = D$. Zavedeme-li substituci

$$x = \alpha x' + \beta y', \quad y = \gamma x' + \delta y', \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

vznikne nová forma $a'x'^2 + b'x'y' + c'y'^2$. Tyto dvě formy se nazývají ekvivalentní. Všechny formy navzájem ekvivalentní tvoří určitou třídu kvadratických forem. Formy téže třídy mají stejný diskriminant. Naopak dvě formy, které mají stejný diskriminant, mohou patřit do různých tříd. Počet tříd kvadratických forem příslušných k danému diskriminantu je konečný. Výraz $\mathrm{Cl}(-\Delta)$, resp. $\mathrm{Cl}(D)$ označuje potom *počet tříd kvadratické formy* se záporným, resp. kladným diskriminantem. V práci [15] Lerch odvodil nové, prakticky použitelné vzorce pro počet tříd. Vzorce, které předtím odvodili Kronecker a Dirichlet, byly zejména v případě kladného diskriminantu v praxi nepoužitelné. Nejdůležitější Lerchem odvozené vzorce jsou následující:

$$\frac{2}{\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta) = \frac{\sqrt{\Delta}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{n}\right)\frac{1}{n}\,\mathrm{e}^{\frac{n^2\pi}{\Delta}} + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{n}\right)\int_{n\sqrt{\frac{\pi}{\Delta}}}^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

a

$$\frac{1}{\tau}\,\mathrm{Cl}(-\Delta) = \sum_{1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{m}\right)\frac{1}{1+\mathrm{e}^{\frac{m\pi\sqrt{2\Delta}}{\Delta}}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{m}\right)\frac{1}{\sinh\dfrac{2m\pi}{\sqrt{2\Delta}}}$$

pro $\Delta > 0$. Pro případ kladného diskriminantu D odvodil Lerch následující dva vzorce:

$$\mathrm{Cl}(D)\ln E(D) = \frac{2\sqrt{D}}{\sqrt{\pi}}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n}\int_{n\sqrt{\frac{\pi}{D}}}^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x + \sum_{1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\int_{\frac{n^2\pi}{D}}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x$$

a

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{Cl}(D)\ln E(D) = \sqrt{D}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{2n\pi}{\sqrt{2D}}}+1} + \sum_{1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\ln\frac{1+\mathrm{e}^{-\frac{n\pi\sqrt{2D}}{D}}}{1-\mathrm{e}^{-\frac{n\pi\sqrt{2D}}{D}}},$$

[6]) Jen pro ilustraci: spolu s ním kandidovali matematikové takového formátu, jako byli například Richard Dedekind, David Hilbert či Camille Jordan. Jmenován byl tehdy Dedekind.

kde $E(D)=\frac{1}{2}(T+U\sqrt{D})$ a $T^2-DU^2=4$, $\left(\frac{D}{n}\right)$, resp. $\left(\frac{-\Delta}{n}\right)$ je Legendreův symbol a $E(D)$ je základní Pellova jednotka k diskriminantu D.

Práce [17] se týká *Fermatových kvocientů*

$$q(a)=\frac{a^{p-1}-1}{p},$$

kde p je prvočíslo a a libovolné přirozené číslo, které není dělitelné p. Lerch navázal zejména na práce Sylvestera a Sterna. V úvodu této práce dokázal kongruenci

$$\sum_{a=1}^{p-1} q(a) \equiv N \pmod{p},$$

kde

$$N=\frac{(p-1)!+1}{p}$$

je tzv. *Wilsonův kvocient.* Tímto výsledkem, který se dnes udává ve tvaru

$$1^{p-1}+2^{p-1}+\cdots+(p-1)^{p-1} \equiv p+(p-1)! \pmod{p^2},$$

bývá Lerch představován v matematických encyklopediích.

S využitím logaritmických vlastností Fermatových kvocientů a dalších jednoduchých identit odvodil Lerch důležitý vzorec

$$q(a) \equiv \sum_{\nu=1}^{p-1} \frac{1}{\nu a}\left[\frac{\nu a}{p}\right] \pmod{p}$$

a uvedl několik aplikací pro konkrétní hodnoty čísla a. V další části článku [17] vyšetřoval součty typu

$$Q_k(p)=\sum_{a=1}^{p-1} a^k q(a),$$

kde k je celé číslo vyhovující podmínce $0 \leqq k < p$. Lerch odvodil několik vět pro různé hodnoty exponentu k, pro odvození každé z dále uvedených kongruencí volí jiný postup. Nejdůležitější vzorce, které Lerch odvodil, jsou tyto:

$$\sum_{a=1}^{p-1} a q(a) \equiv \frac{1}{2} \pmod{p}.$$

Pro prvočísla tvaru $4n+3$ platí

$$\sum_{\nu=1}^{p-1}\left(\frac{\nu}{p}\right) q(\nu) \equiv 0 \pmod{p}$$

a pro prvočísla tvaru $4n+1$ platí

$$\sum_{\nu=1}^{p-1} \left(\frac{\nu}{p}\right) q(\nu) \equiv (-1)^{n-1} 2B_n \pmod p,$$

kde $\left(\frac{\nu}{p}\right)$ je *Legendreův symbol* a B_n je n-té *Bernoulliovo číslo.*

Další vzorce, které odvodil, jsou

$$\sum_{\nu=1}^{p-1} \left(\frac{\nu}{p}\right) \nu q(\nu) \equiv \mathrm{Cl}(-p) \pmod p$$

pro prvočísla tvaru $p = 4n+3$ a

$$\sum_{\nu=1}^{p-1} \left(\frac{\nu}{p}\right) \nu q(\nu) \equiv 0 \pmod p$$

pro prvočísla tvaru $p = 4n+1$. Protože platí $\left(\frac{\nu}{p}\right) \equiv \nu^{\frac{1}{2}(p-1)} \pmod p$, Lerch tedy odvodil vzorce pro $k = \frac{1}{2}(p \pm 1)$. Jednou z aplikací, kterou zde Lerch uvádí, je řešení neurčité rovnice

$$ax - py = 1, \qquad p \text{ prvočíslo.}$$

Řešení této rovnice je uvedeno ve tvaru

$$x = a - 12 \sum_{\nu=1}^{p-1} \nu \left[\frac{a\nu}{p}\right].$$

Tato problematika dosti zřetelně ukazuje na Lerchův styl práce, který byl směrován k řešení konkrétních problémů. Není známo, zda se Lerch této problematice věnoval i nadále, žádnou práci na toto téma však už nepublikoval, ačkoliv se přímo nabízelo pokusit se odvodit obecný vzorec. O několik let později publikovali ruští matematici A. Friedmann[7]) a J. Tamarkin práci [7], v níž mj. odvodili obecný vzorec pro $\sum a^k q(a)$. Jak ukazují četné citace, inspirací jim byla především Lerchova práce o Fermatových kvocientech. Rozšíření některých Lerchem odvozených kongruencí pro složený modul provedli T. Agoh, K. Dilcher a L. Skula v práci [1]. V teorii čísel Lerch publikoval také práce týkající se Gaussovy sumy, Gaussova zákona reciprocity a několik drobnějších prací.

2.2. Dílo M. Lercha z matematické analýzy

Lerchovy práce z matematické analýzy lze rozdělit do pěti oblastí:

---

[7]) A. Friedmann se později proslavil v kosmologii jako autor hypotézy rozpínajícího se vesmíru.

- obecná teorie funkcí (20 prací);
- teorie nekonečných řad (49 prací);
- teorie funkce gama (53 prací);
- teorie eliptických funkcí (25 prací);
- integrální počet (26 prací).

Z dnešního hlediska nemají práce z teorie eliptických funkcí a integrálního počtu zásadnější význam. Proto se stručně zmíníme jen o prvních třech zmíněných oblastech.

Většina prací z **obecné teorie funkcí** vznikala v letech 1886–1896, kdy byl Lerch soukromým docentem v Praze. Zejména první práce z tohoto období jsou silně ovlivněny studiem u Weierstrasse, postupně však Lerch v této oblasti dosáhl dodnes ceněných výsledků. Zabýval se zejména konstrukcemi spojitých funkcí bez derivace, rozvinutelností funkcí v Taylorovu řadu, funkcemi s omezeným existenčním oborem a větami o jednoznačnosti jistých funkcí, jež nazýval *vytvořujícími.*

První významnější Lerchův výsledek je obsažen v práci [19], v níž dokázal du Bois--Reymondovu domněnku, že existence všech derivací funkce reálné proměnné ještě nezaručuje konvergenci Taylorovy řady dané funkce. Lerch dokonce dokázal, že pro liché celé a má funkce

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos a^n x}{n!}$$

derivace všech stupňů, avšak rozvoj v Taylorovu řadu nepřipouští.

Nejvýznamnějším Lerchovým výsledkem z obecné teorie funkcí (viz [20] a [21]) se však stalo tvrzení, dnes běžně ve světové literatuře uváděné jako *Lerchova věta.*

Vytvořující funkcí se zde rozumí pro komplexní a integrál

$$J(a) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax}\, \varphi(x)\, \mathrm{d}x,$$

kde $\varphi(x)$ je tzv. *určující funkce.*

Je zřejmé, že při dané funkci $J(a)$ vyhovuje této funkci nekonečně mnoho funkcí $\varphi(x)$, (pokud ovšem taková funkce vůbec existuje). Není však zřejmé, jaká tato nejednoznačnost je. Lerch odvodil, že *při dané funkci J se všechny funkce φ mohou navzájem lišit nejvýše o funkci $N(x)$, pro niž platí*

$$\int_0^{x} N(t)\, \mathrm{d}t \equiv 0.$$

Lerchovy práce z **teorie nekonečných řad** se týkají převážně jisté třídy řad, které Lerch nazýval *malmsténovskými* na počest dnes již méně známého švédského matematika Carla Johanna Malmstena (1814–1886), který se jimi podrobně zabýval. Jsou to řady tvaru

$$\mathrm{Ml}(v, w, u, s) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{2nv\pi \mathrm{i}}}{\left[(w+n)^2 + u^2\right]^{s/2}}\,.$$

Jak Lerch sám již ve své úvodní a základní práci [22] v tomto oboru uvádí, sahají počátky teorie těchto řad již k Eulerovi. Později se jimi zabývali například Schlömilch, Lipschitz, Riemann, Hurwitz, Stieltjes a další. Mezi tento typ řad patří i například proslulá Riemannova funkce ζ.

V teorii malmsténovských řad dosáhl Lerch řady pozoruhodných výsledků, jejich podrobnější výklad však přesahuje rámec tohoto informativního článku. Jen pro ilustraci proto uveďme některé z nich. V již citované práci [22] například Lerch dokazuje, že

$$\mathrm{e}^{2vw\pi\mathrm{i}}\,\mathrm{Ml}(v,w,u,s)=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(s/2)}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{2nw\pi\mathrm{i}}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-u^2x-\frac{\pi^2(v-n)^2}{x}}\,x^{\frac{s-3}{2}}\,\mathrm{d}x$$

pro $0<v<1$ a $\operatorname{Re}u^2>0$. Odtud pak odvozuje, že

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\mathrm{Ml}(v,w,u,s)$$

je transcendentní funkce proměnné s, pokud v není celé.

Mezi nejhodnotnější Lerchovy výsledky v matematické analýze patří jeho studium řady

$$R(w,s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(w+n)^s}\,.$$

Nejvýznamnější v této souvislosti jsou práce [23] a [24]. V nich Lerch mimo jiné dokazuje, že

$$R(w,s)=\frac{1}{(s-1)w^{s-1}}+\frac{1}{2w^s}+\int_0^{\infty}\frac{sP(x)}{(x+w)^{s+1}}\,\mathrm{d}x,$$

kde $P(x)=\frac{1}{2}-x+[x]$. Odtud pak odvozuje následující rozvoj:

$$R(w,s)=\frac{1}{(s-1)w^{s-1}}+\frac{1}{2w^s}+\frac{1}{2}B_1\binom{s}{1}\frac{1}{w^{s+1}}-$$
$$-\frac{1}{4}B_2\binom{s+2}{3}\frac{1}{w^{s+3}}+\frac{1}{6}B_3\binom{s+4}{5}\frac{1}{w^{s+5}}-\cdots,$$

kde B_i jsou Bernoulliova čísla.

Přibližně třetinu svých prací z matematické analýzy Lerch věnoval **teorii funkce gama**. Asi třetina těchto prací je psána česky, zbývající většinou francouzsky a německy. Kromě obsáhlých prací didaktického zaměření jsou mezi nimi i četné práce, které významně přispěly k rozvoji světové matematiky v této oblasti. Lerch studoval asymptotické a charakteristické vlastnosti této funkce, její logaritmus, Binetovu funkci, logaritmickou derivaci funkce Γ, neúplné funkce gama a beta a řadu dalších aspektů. Mimořádně cenným nástrojem v této oblasti se mu staly malmsténovské řady, které mu umožnily proniknout do podstaty studovaných problémů.

V závěru tohoto odstavce o Lerchově díle v matematické analýze se stručně vraťme k již zmíněném sporu M. Lercha s A. Pringsheimem, na jehož počátku stála Lerchova práce [25] z roku 1885. V ní Lerch odvozuje zobecnění některých konvergenčních kritérií (Cauchyova odmocninového, Raabeova a dalších). Když v této souvislosti odvodil nelimitní tvar podílového kritéria, domníval se, že má prioritu. Svědčí o tom následující pasáž v citované práci: *Zdá se, že analysté považovali za samozřejmou a nevyhnutelnou podmínku, aby hodnota* $\lim u_{n+1}/u_n$ *existovala. Nechť tomu však jakkoli, případ, kdy se* u_{n+1}/u_n *pro nekonečně rostoucí* n *žádné určité hodnotě neblíží, nebyl dosud uvažován, ačkoli není nesnadno zobecniti známá kriteria i pro tento případ.*

V tom se Lerch prokazatelně mýlil, neboť nelimitní tvar podílového kritéria lze nalézt již v Herrově učebnici [9] v roce 1857.[8]) Lerch ve zmiňované práci dokumentuje dokazované tvrzení kromě jiných příkladů na řadě

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta^{k-[\log k]} \cdot g^{\frac{1}{2}[\log k]\cdot([\log k]+1)}.$$

Tento příklad pak Lerch uveřejnil v Portugalsku (viz [26]) a velmi pochvalně se o něm zmínil A. Gutzmer ([8]), který ocenil pozoruhodné vlastnosti Lerchem popsané nekonečné řady. Těchto posledních dvou prací si povšiml A. Pringsheim ([31]) a velmi ostře Lercha (kupodivu nikoli však Gutzmera) napadl. Po popisu konvergenčních kritérií Pringsheim píše: ... *To zní v podstatě tak triviálně, že mnohý by to sotva považoval za hodno zmínky; přece se mi však zdá, že v tomto směru není dosud všeobecně dosti jasno. Jinak by bylo při nejmenším zcela nepochopitelné, že před časem nepříliš dávným uveřejnil pan M. Lerch zvláštní poznámku jedině proto, aby upozornil, že* $\sum a_n$ *může konvergovati, když* $\lim a_{n+1}/a_n$ *neexistuje, po případě též libovolně velkých hodnot nabývá; a že pouze pro utvrzení této, jak bylo řečeno, vlastně zcela samozřejmé, ostatně četnými jednoduchými příklady doložené skutečnosti, konstruuje tento přímo obludný příklad...*

Na Pringsheimův článek reagoval Lerch celkem dvakrát ([27] a [28]). Na jedné straně uznal, že v době, kdy uvedené práce psal, neznal některé prameny, na druhé straně však obhajuje svůj příklad a zdůvodňuje jeho smysl, byť mu byly samozřejmě známy i příklady jednodušší. Tím byl pro danou chvíli spor uzavřen; že však Pringsheim od té doby nepatřil k Lerchovým oblíbencům, je více než zřejmé.

Druhá a ostřejší fáze sporu vypukla v r. 1897, kdy Lerch (viz [29]) na Pringsheima zaútočil, že ve své práci [32] publikoval bez citace některé jeho dřívější výsledky. Své pojednání pak Lerch zakončuje poukazem na Pringsheimovu chybu v úvahách o funkci

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{x - a_n}\,.$$

Svou poznámku Lerch zakončuje slovy: *V roce 1887 nechtěl jsem jíti tak daleko jako pan Pringsheim a ponechal jsem tuto otázku nerozhodnutou, neboť se mi důkaz zdál býti těžký a ještě dnes se těžký zdá, takže pro zodpovězení této otázky ani nyní nemohu nic poskytnouti. Domnívá-li se pan Pringsheim, že tuto otázku rozřešil, pak se mýlí, neboť jeho důkaz je nesprávný a platnost teorému zůstává nepotvrzena.*

Pringsheim na Lerchův článek několikrát obsáhle odpověděl a Lerchovy námitky vesměs odmítl. V *Monatshefte*, kde uveřejnil svůj článek Lerch, odpověděl stručně:

[8]) Je však nutno uvést, že Herrův výsledek, jak tomu často bývá, upadl v zapomenutí a v matematické literatuře v příslušné době nebyl prakticky znám.

... Pan Lerch uveřejnil v 8. ročníku tohoto časopisu poznámku, která obsahuje různé útoky proti mým dřívějším dvěma pracem. Poněvadž tyto práce byly uveřejněny v Mathematische Annalen*, považuji za vhodné tam odpověděti na tyto útoky, pokud mají věcnou povahu. Přitom rovněž dokáži, že prioritní nároky pana Lercha se vesměs týkají věcí, které nejen že jsou samy o sobě významu podružného, zejména však neměly na mé úvahy nijakého rozhodujícího významu.* A v *Mathematische Annalen* pak svůj podrobný článek končí takto: *Jestliže však nyní pan Lerch na konci právě se objevivší poznámky příležitosti se chápe, aby panem Borelem učiněnou připomínku o nepostačitelnosti dotyčného důkazu jednoduše opakoval, aniž by ostatně k objasnění věci přispěl, mohl jsem v tom pouze spatřovati snahu dáti účinné zakončení útokům, věcně neoprávněným a pokud se formy týká neslýchaným, jež v oné poznámce proti mně jsou vedeny.*

Ponecháme čtenáři, aby porovnal, zda Pringsheimova poznámka vůči Lerchovi v r. 1890 byla formulována „útlocitněji". Podrobné prozkoumání pramenů dává v tomto druhém případě spíše za pravdu Lerchovi, byť jeho námitky byly jistě podbarveny první fází vzájemného sporu.

Koncem 90. let vzájemné napadání Lercha a Pringsheima ustalo, leč, jak jsme uvedli v životopisné části, Lerchův vztah k Pringsheimovi zřejmě zůstal výrazně negativně ovlivněn natrvalo.

3. Závěr

Matyáš Lerch je jedním z prvnch českých matematiků, jehož práce získaly široký mezinárodní věhlas a uznání, jeho nejvýznamnější výsledky jsou dodnes citovány v publikacích našich i zahraničních.

Zakončeme tuto připomínku Matyáše Lercha slovy jeho žáka Otakara Borůvky: *Význam Matyáše Lercha je především pro vědecké pracovníky všech oborů v přesnosti myšlení a jasnosti výkladu. Dále v tom, že M. Lerch měl široké znalosti z oborů, které byly blízké jeho vlastnímu pracovnímu zaměření, že nově získané výsledky ve svém oboru rozšiřoval podle možností do oborů příbuzných a měl velké porozumění pro aplikaci cizích výsledků, které zpracovával podle svého založení.*

Koncem minulého století se začala rozvíjet teorie množin a Lerch byl první český matematik, který nové myšlenky přenášel do české literatury. Zdá se například velmi pravděpodobné, že název množina pochází od Lercha. Soudíme tak z toho, že Lerch slovo množina běžně používá, kdežto toto slovo u dřívějších autorů nalezeno nebylo.

Velmi význačné se také jeví působení pedagogické na universitách a technikách a z toho plynoucí množství Lerchových následníků.

Literatura

[1] Agoh, T., Dilcher, K., Skula, L.: *Fermat quotients for composite moduli.* J. Number Theory *66* (1997), 29–50.

[2] Borůvka, O. a kol.: *Dílo Matyáše Lercha v oboru matematická analýza.* Práce brněnské základny ČSAV *29* (1957), 417–540.

[3] Borůvka, O.: *O životě a díle českého matematika M. Lercha.* Rozhledy mat.-fyz. *38* (1959–60), 271–272.
[4] *Vzpomínky.* Editoři J. Franců, J. Vosmanský. JČMF Brno 1999, magnetofonová kazeta.
[5] Čupr, K.: *Profesor Matyáš Lerch.* Časopis pěst. mat. fys. *52* (1923), 301–313.
[6] Frank, L.: *O životě Matyáše Lercha.* Časopis pěst. mat. fys. *78* (1953), 119–137.
[7] Friedmann, A., Tamarkine, J.: *Quelques formules concernant la théorie de la fonction $[x]$ et des nombres de Bernoulli.* J. Reine Angew. Math. *135* (1909), 146–156.
[8] Gutzmer, A.: *Sur une série considérée par M. LERCH* J. de Sciencias Math. e Astron. *VIII* (1887), 33–36.
[9] Herr, J. Ph.: *Lehrbuch der höheren Mathematik.* 1857.
[10] Koutský, K.: *K Lerchovým pracím o Fermatově kvocientu.* Práce Moravské přírodovědecké společnosti, sv. 18, Brno 1947.
[11] Lepka, K.: *Matyáš Lerch's work on Number Theory.* Přír. fak. MU Brno, 1995.
[12] Lepka, K.: *Historie Fermatových kvocientů (Fermat–Lerch).* Edice Dějiny matematiky 14, Prometheus, Praha 2000.
[13] Lerch, M.: *Deux théorèmes d'arithmétique.* Věstník KČSN 1887, 683–688.
[14] Lerch, M.: *Sur quelques théorèmes d'arithmétique.* Zprav. KČSN 1894, 1–11.
[15] Lerch, M.: *Essais sur le calcul du nombre des classes de formes quadratiques binaires aux coefficients entiers.* Mém. Sav. Étr. *1906,* 1–244.
[16] Lerch, M.: *Essais sur le calcul du nombre des classes de formes quadratiques binaires aux coefficients entiers.* Acta Math. *29* (1905), 333–424.
[17] Lerch, M.: *Zur Theorie der Fermatschen Quotienten* $(a^{p-1}-1)/p = q(a)$. Math. Ann. *60* (1905), 471–490.
[18] Lerch, M.: *Sur les théorèmes de Sylvester concernant le quotient de Fermat.* C. R. de l'Académie des Sciences *142* (1906), 35–38.
[19] Lerch, M.: *Über die Nichtdifferentiebarkeit gewisser Funktionen.* Crelles Journ. *103* (1888), 126–138.
[20] Lerch, M.: *O hlavní větě theorie funkcí vytvořujících.* Rozpravy ČAVU *1* (1892), 1–7.
[21] Lerch, M.: *Sur un point de la théorie des fonctions génératrices d'Abel.* Acta *27* (1903), 339–351.
[22] Lerch, M.: *Základové theorie Malmsténovských řad.* Rozpravy ČAVU *1* (1892), 1–70.
[23] Lerch, M.: *Další studium v oboru Malmsténovských řad.* Rozpravy ČAVU *3* (1894), 1–61.
[24] Lerch, M.: *Sur quelques propriétés d'une transcendante uniforme.* Compte rendu du quatrième Congrès scientifique international des catholiques tenu à Fribourg 1898, 58–69.
[25] Lerch, M.: *Příspěvky k theorii řad nekonečných.* Zprávy KČSN (1885), 174–179.
[26] Lerch, M.: *Remarque sur la théorie des séries.* J. de Teix. *7* (1886), 79–80.
[27] Lerch, M.: *Bemerkung zur Reihentheorie.* Zprávy KČSN (1890), 219–221.
[28] Lerch, M.: *Zur Theorie der unendlichen Reihen.* Zprávy KČSN (1891), 250–254.
[29] Lerch, M.: *Über die analytische Natur einer von P. Du Bois-Reymond betrachteten Funktion.* Monatshefte *8* (1897), 377–382.
[30] Petr, K.: *Matyáš Lerch.* Almanach ČAVU (1923), 116–138.
[31] Pringsheim, A.: *Allgemeine Theorie der Divergenz und Convergenz von Reihen mit positiven Gliedern.* Math. Ann. *35* (1890), 297–298.
[32] Pringsheim, A.: *Zur Theorie der Taylor'schen Reihe und der analytischen Functionen mit beschränktem Existenzbereich.* Math. Ann. *42* (1893), 153–184.
[33] Škrášek, J.: *Seznam prací profesora Matyáše Lercha.* Časopis pěst. mat. fys. *78* (1953), 139–148.
[34] Škrášek, J.: *Život a dílo profesora Matyáše Lercha.* Časopis pěst. mat. fys. *85* (1960), 228–240.