Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Jaroslav Lukeš

Osmý ročník mezinárodní vysokoškolské matematické soutěže aneb Nechcete si zasoutěžit?

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 47 (2002), No. 2, 161--166

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/141125`

[12] Kopáčková, A.: *Fylogeneze pojmu funkce.* In: Dějiny matematiky, sv. 16. Matematika v proměnách věků, str. 46–80. Prometheus, Praha 2001.
[13] Medveděv, F. A.: *Očerki istorii teorii funkcij dějstvitěľnogo peremennogo.* Nauka, Moskva 1975.
[14] Peano, G.: *Arbeiten zur Analysis und zur mathematischen Logik.* BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1990.
[15] Potůček, J.: *Vývoj vyučování matematice na českých středních školách v období 1900 až 1945,* 2. díl. Pedagogická fakulta ZČU, Plzeň 1993.
[16] Schwabik, Š.: *Několik postřehů k vývoji matematické analýzy v 19. století.* In: Matematika v 19. století. (Sborník přednášek z letních škol Historie matematiky.) Prometheus, Praha 1996.
[17] Schwabik, Š., Šarmanová, P.: *Malý průvodce historií integrálu.* Prometheus, Praha 1996.
[18] Youschkevitch, A. P.: *The Concept of Function up to the Middle of the 19^{th} Century.* In: Arch Hist Exact Sci *16* (1976), str. 37–85.

Osmý ročník mezinárodní vysokoškolské matematické soutěže

aneb

Nechcete si zasoutěžit?

Jaroslav Lukeš, Praha

Ve dnech 19.–25. července 2001 se v Praze konal již 8. ročník Mezinárodní matematické soutěže vysokoškoláků IMC 2001. Uspořádala ho katedra matematické analýzy na Matematicko–fyzikální fakultě Univerzity Karlovy, jejíž rektor prof. Ivan Wilhelm nad ním převzal záštitu. Hlavním organizátorem pak byla University College London, předsedou prof. John Jayne z této univerzity.

Podívejme se nejprve do historie pořádání těchto mezinárodních matematických soutěží vysokoškolských studentů. Jejich počátky jsou svázány s oslavou Mezinárodního dne studentstva 4. dubna a mezi první pořadatele patřili organizátoři z Jugoslávie. První ročník se konal v roce 1967, ale teprve počínaje 9. ročníkem, kdy se soutěž

Prof. RNDr. Jaroslav Lukeš, DrSc. (1940), Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta, Sokolovská 83, 186 75 Praha 8 – Karlín, e-mail: lukes@karlin.mff.cuni.cz
Podporováno grantem GAUK 165/99 a výzkumným záměrem MSM 1132 00007.
Autorem fotografií je RNDr. Jiří Kottas, CSc.

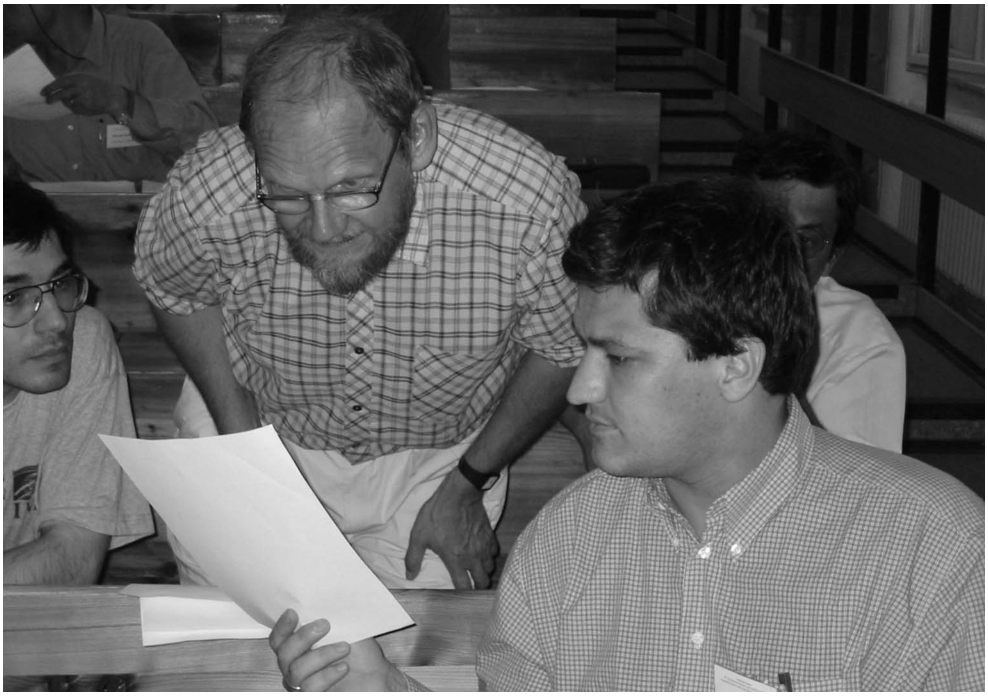
konala v Bělehradě pod názvem ISTAM 1977, se soutěž stala mezinárodní. Tehdy se soutěžilo ve dvou kategoriích. I. kategorie byla určena vysokoškolským studentům prvního dvouletí studia, zatímco II. kategorie byla vyhrazena pro posluchače vyšších ročníků.

Mezi absolutními vítězi najdeme i jména studentů tehdejšího Československa. Jan Malý zvítězil hned při první naší účasti v I. kategorii v roce 1977, v dalším ročníku ho následoval Jiří Navrátil. Pavlovi Pyrihovi se podařilo dokonce zvítězit v obou kategoriích, v roce 1980 v I. kategorii, o rok později v II. kategorii. Mezi vítězi jsou zapsáni i Jan Nekovář (dvojnásobný vítěz II. kategorie v letech 1983 a 1984), Jiří Witzany (vítěz I. kategorie v letech 1985 a 1986) a Igor Kříž (1987 – II. kategorie).

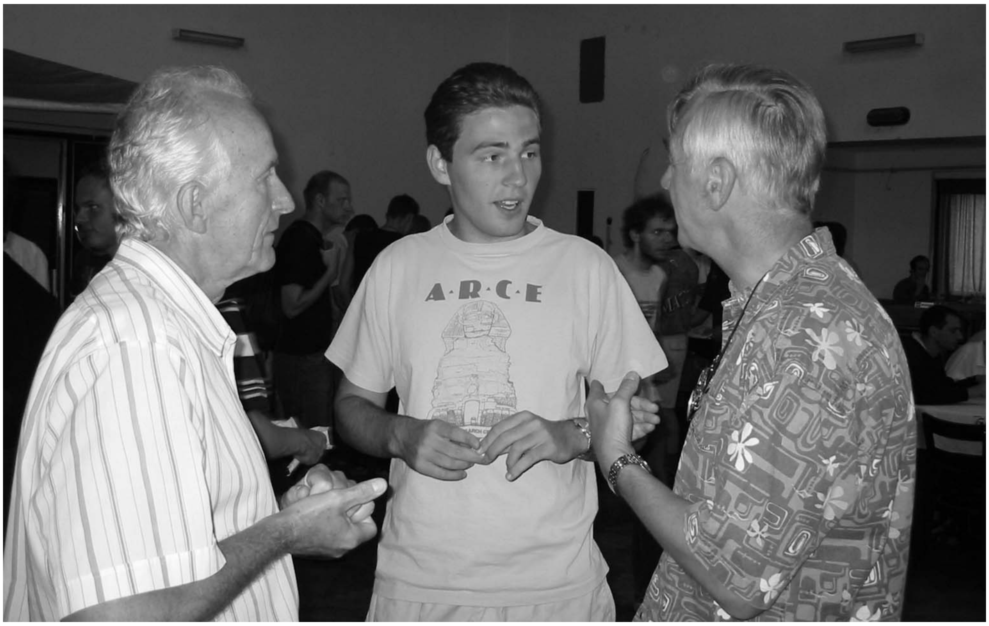
V roce 1981 se konal i u nás 1. ročník Matematické soutěže vysokoškoláků MSV. Soutěž se uskutečnila v dubnu v Harrachově jako nová doplňková forma studentské vědecké a odborné činnosti, byla organizována MFF UK Praha a zúčastnilo se jí 17 tříčlenných družstev. V dalších letech se o pořadatelství u nás dělili pořadatelé z Prahy, Bratislavy, Brna a Olomouce.

Po roce 1990 byly tyto soutěže přerušeny, ovšem již v roce 1994 se chopili iniciativy kolegové z Bulharska a za nemalé podpory programu Tempus uspořádali první ročník obnovené soutěže v Plovdivu. Další léta podoba soutěže krystalizovala a v roce 1999 se tato soutěž poprvé konala mimo Bulharsko, a to v maďarském Keszthely na břehu Balatonu. V roce 2000 byl místem konání Londýn. Tohoto ročníku se tehdy zúčastnilo rekordních 117 studentů.

Studenti při řešení úloh.



Porota měla nesnadnou práci při opravování úloh. Na snímku Luděk Zajíček z MFF UK Praha (vlevo) a Géza Kós z Budapešti.



Pavel Podbrdský v diskusi s předsedou poroty Tony Gardinerem (University of Birmingham) a autorem článku.

Jako pořadatelské místo pro konání 8. ročníku jsme nabídli Prahu. Současně se doba trvání soutěže prodloužila o jeden den a do Prahy se sjelo rekordních 185 studentů z celého světa. Soutěže se zúčastnili studenti ze 48 univerzit z Anglie, Běloruska, Bulharska, Finska, Francie, Chorvatska, Íránu, Estonska, Kolumbie, Litvy, Maďarska, Mongolska, Polska, Rumunska, Ruska, Slovenska, Srbska, Ukrajiny, USA a Česka.

A nyní k vlastní soutěži. Účastníky jsou vysokoškolští studenti 1. až 4. ročníku, soutěží se pouze v jedné kategorii. Každý soutěžící řeší celkem 12 úloh rozložených po šesti do dvou soutěžních dnů, přičemž na každých 6 úloh je vymezeno pět hodin času. Zadání úloh je v angličtině a v tomto jazyce musejí soutěžící vypracovat i svá řešení, která se ještě týž den opravují. Maximální počet bodů, které lze získat za správné vyřešení jednoho problému, je 20. Celkem lze tedy získat 240 bodů.

Více než 150 bodů dosáhli 4 účastníci soutěže, ti získali Grand Prix. První cenu získalo celkem 26 účastníků s více než 100 body, studenti na 31. – 74. místě získali druhou cenu za více než 70 bodů a konečně soutěžící na 75. – 124. místě získali za více než 50 bodů třetí cenu.

Výsledky 8. ročníku:

1.	Alexander Meteličenko	Oděsa National Mechnikov University	Ukrajina	168 b.	*Grand Prix*
2.	Ivan Ivanov	Trinity College Cambridge	V. Británie	163 b.	*Grand Prix*
3.	Gábor Lippner	Lorand Eötvös University Budapešť	Maďarsko	156 b.	*Grand Prix*
9.	Pavel Podbrdský	Karlova Univerzita Praha	ČR	132 b.	*First Prix*
37.	Lukáš Vokřínek	Masarykova Univerzita Brno	ČR	93 b.	*Second Prix*
38.	Libor Bartó	Karlova Univerzita Praha	ČR	92 b.	*Second Prix*

Soutěžní příklady prvního dne

▷ **Problém 1.** Uvažujme $n \times n$ matici (n je celé kladné číslo), jejímiž prvky jsou čísla $1, 2, \ldots, n^2$ psaná za sebou po řádcích shora dolů, v každém řádku pak zleva doprava. Z matice vybereme n prvků tak, že v každém řádku i sloupci je vybrán právě jeden prvek. Jaké jsou možné hodnoty součtů těchto prvků?

▷ **Problém 2.** Buďte r, s, t celá kladná čísla, která jsou po dvou vzájemně nesoudělná. Nechť a a b jsou prvky komutativní multiplikativní grupy s jednotkovým prvkem e, pro něž platí $a^r = b^s = (ab)^t = e$. Ukažte, že $a = b = e$.

Platí stejné tvrzení, i pokud budeme uvažovat danou grupu nekomutativní?

▷ **Problém 3.** Nalezněte

$$\lim_{t\to 1_-} (1-t) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{1+t^n}\,.$$

▷ **Problém 4.** Nechť k je celé kladné číslo. Nechť $p(x)$ je polynom n-tého stupně, jehož koeficienty jsou $-1, 1$ nebo 0 a který je dělitelný výrazem $(x-1)^k$. Nechť q je prvočíslo, pro něž platí

$$\frac{q}{\ln q} < \frac{k}{\ln(n+1)}\,.$$

Ukažte, že komplexní q-té odmocniny z 1 jsou kořeny polynomu $p(x)$.

▷ **Problém 5.** Nechť A je $n\times n$ komplexní matice. Ukažte, že pokud $A \neq \lambda I$ pro všechna $\lambda \in \mathbb{C}$, potom A je podobná matici mající nejvýše jeden nenulový prvek na hlavní diagonále.

▷ **Problém 6.** Nechť a, b, f, g jsou diferencovatelné funkce $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ splňující vztahy

$$f(x) \geqq 0, \quad f'(x) \geqq 0, \quad g(x) > 0, \quad g'(x) > 0$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Nechť dále

$$\lim_{x\to\infty} a(x) = A > 0, \quad \lim_{x\to\infty} b(x) = B > 0,$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$$

a

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} + a(x)\,\frac{f(x)}{g(x)} = b(x).$$

Ukažte, že

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{B}{A+1}\,.$$

Soutěžní příklady druhého dne

▷ **Problém 7.** Buďte $r, s \geqq 1$ celá čísla, $a_0, a_1, \ldots, a_{r-1}$, $b_0, b_1, \ldots, b_{s-1}$ reálná nezáporná čísla splňující

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{r-1}x^{r-1} + x^r)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_{s-1}x^{s-1} + x^s) =$$
$$= 1 + x + x^2 + \cdots + x^{r+s-1} + x^{r+s}.$$

Ukažte, že každé z čísel a_i a b_j je rovno buď 0, nebo 1.

▷ **Problém 8.** Nechť $a_0 = \sqrt{2}$, $b_0 = 2$,

$$a_{n+1} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a_n^2}} \quad \text{a} \quad b_{n+1} = \frac{2b_n}{2 + \sqrt{4 + b_n^2}}\,.$$

(a) Dokažte, že posloupnosti $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou klesající a konvergují k 0.

(b) Ukažte, že posloupnost $\{2^n a_n\}$ je rostoucí, posloupnost $\{2^n b_n\}$ je klesající a že obě tyto posloupnosti mají stejnou limitu.

(c) Ukažte, že existuje taková konstanta $C > 0$, že $0 < b_n - a_n < C/8^n$ pro všechna n.

▷ **Problém 9.** Najděte maximální počet bodů na sféře o poloměru 1 v $\mathbb{R}^n$, které mají tu vlastnost, že vzdálenost mezi libovolnými dvěma z nich je ostře větší než $\sqrt{2}$.

▷ **Problém 10.** Nechť $A = (a_{k,l})_{k,l=1,\dots,n}$ je $n \times n$ komplexní matice a nechť pro každé $m \in \{1, \dots, n\}$ a $1 \leqq j_1 < \dots < j_m \leqq n$ je determinant matice $(a_{j_k,j_l})_{k,l=1,\dots,m}$ nulový. Ukažte, že $A^n = 0$ a že existuje taková permutace $\sigma \in S_n$, pro niž matice

$$(a_{\sigma(k),\sigma(l)})_{k,l=1,\dots,n}$$

má všechny nenulové prvky nad hlavní diagonálou.

▷ **Problém 11.** Ukažte, že neexistuje funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taková, aby $f(0) > 0$ a aby platilo

$$f(x + y) \geqq f(x) + yf\big(f(x)\big)$$

pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$.

▷ **Problém 12.** Definujme pro každé přirozené číslo n

$$f_n(\vartheta) = \sin\vartheta \cdot \sin(2\vartheta) \cdot \sin(4\vartheta) \cdots \sin(2^n\vartheta).$$

Ukažte, že

$$|f_n(\vartheta)| \leqq \frac{2}{\sqrt{3}} \left| f_n\Big(\frac{\pi}{3}\Big) \right|.$$

Podrobné výsledky všech soutěžících, informace o minulých ročnících a rovněž další informace lze získat na webových stránkách

`http://www.imc-math.org/`

Podíváte-li se tam podrobně na úspěšnost vyřešení jednotlivých příkladů, zjistíte, že první dva příklady byly skutečně „zahřívací“ a studentům nedělaly příliš velké problémy. Na druhé straně příklady 4 a 12 jsou již značně trikové a vyřešilo je správně pouze pár soutěžících.

Kolik příkladů byste zvládli vy?