

Jiří Horák

Klíma, objekt matematického zkoumání. Část 2. Prediktabilita změn klimatu

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 47 (2002), No. 1, 56--70

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/141113>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2002

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

Klima, objekt matematického zkoumání

Část 2. Prediktabilita změn klimatu

Jiří Horák, Praha

8. Centrální problém teorie klimatu

V minulých kapitolách jsme považovali za prioritní úlohu matematické teorie klimatu hledání podstatné (odpovídající fyzikální realitě) invariantní pravděpodobnostní míry soustředěné na atraktoru klimatického systému. O množině A z metrického prostoru H (fázového prostoru) říkáme, že je atraktorem, jestliže platí:

1. A je invariantní množina.
2. Existuje otevřená množina $U \supset A$ taková, že $\lim_{t \rightarrow \infty} \varrho(S(t)u_0, A) = 0$ pro všechna $u_0 \in U$, kde $\varrho(x, A) = \inf_{y \in A} \varrho(x, y)$ pro všechna $x \in H$ a $A \subset H$; (\cdot, \cdot) je metrika na H .

Druhou podmínku často vyjadřujeme slovy „ A přitahuje body z U “. Množinu U nazveme bází atraktoru A . V této podmínce množina operátorů $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ splňuje následující podmínky:

1. $S(t)$ je spojitý operátor zobrazující prostor H do H pro všechna $t \geq 0$.
2. $S(0) = I$, kde I je identické zobrazení na H .
3. $S(t+s) = S(t)S(s) = S(s)S(t)$ pro $s, t \geq 0$.

Množinu operátorů $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ splňující výše uvedené podmínky nazveme semigrupou evolučních operátorů dynamického systému, zkráceně semigrupou operátorů.

Předpokládáme, že pravděpodobnostní míra na atraktoru klimatického systému existuje a je jednoznačná. Protože však dosud neznáme konstruktivní algoritmus, jak lze tuto míru získat, úlohu chápeme méně obecně a požadujeme, aby invariantní pravděpodobnostní míra na atraktoru byla soustředěna do okolí stacionárních bodů klimatického systému. Tento požadavek vychází z chování atmosféry, pojímaného jako režim hydrodynamického toku generovaný její nestabilitou, charakterizovaný přechodem mezi dvěma stacionárními stavy. Odtud se následně odvíjejí práce o stabilitě atmosférických dějů velkých měřítek a objevuje se hypotéza o formování kvazistacionárního režimu atmosférické cirkulace při průchodu trajektorie klimatického systému blízko jeho stacionárních bodů [1, 2]. Čas života takového režimu závisí na tom, podle jaké trajektorie dochází k pohybu ve fázovém prostoru blízko stacionárního řešení. Existuje souvislost mezi časem existence kvazistacionárního režimu atmosférické cir-

RNDr. JIŘÍ HORÁK, CSc. (1929), Ústav fyziky atmosféry AV ČR, Boční II, čp. 1401, 141 31 Praha 4.

1. část článku byla otištěna v PMFA 46 (2001), č. 4, str. 313–327.

kulace a stupněm nestability příslušného stacionárního řešení. Mluvíme o ní jak při analýze režimů barotropního modelu cirkulace na kulové ploše S^2 , tak i při studiu reálných kvazistacionárních režimů typu blokování.¹⁾

V první části našeho článku [1] jsme naznačili, že existence dvou cirkulačních režimů je spojena s přítomností izolovaného rezonančního modu v časově vystředované rovnici barotropní atmosféry. Prokázalo se, že v matematickém modelu všeobecné cirkulace atmosféry s takovým rezonančním modem blízkým k rezonančnímu budou všechny vystředované anomální odezvy cirkulace na anomální vzruchy v podprostoru „navlečeném“ na tento mod (citujeme podle [4]).

V koncepci matematické teorie klimatu založené na kvalitativní dynamice je krajně důležitou otázkou struktura atraktoru generovaného systémem rovnic barotropní atmosféry, jeho stabilita vůči vnějším (třeba i malým) perturbacím i odhad maximální možné citlivosti klimatického modelu na vnější vzruchy. Především nás bude zajímat maximální možná citlivost modelu z hlediska struktury nízkofrekvenčních vnitřních „nestálostí“ atmosférické cirkulace.

Na centrální problém matematické teorie klimatu lze nahlížet buď z pohledu diagnostické metody a numerického modelování (rozpracování globálních modelů klimatu), nebo z pozice analýzy klimatických modelů metodami analýzy nelineárních dynamických systémů. Tehdy za matematický model klimatického systému považujeme jistou soustavu diferenciálních rovnic, obyčejných nebo parciálních. V tomto pojetí vystupuje do popředí tzv. „ideální“ model klimatu. Předpokládejme, že existuje a pak splňuje následující podmínky [4]:

1. Je dán systémem nelineárních diferenciálních rovnic

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = L(\varphi, \mu) \quad (8.1)$$

pro všechna $t \geq 0$, kde φ je prvkem fázového prostoru H , $\varphi|_{t=0} = \varphi_0$, L je operátor zobrazující prostor $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ do \mathbb{R}^n a μ je z prostoru parametrů \mathbb{R}^k .

2. Systém (8.1) je ze třídy nelineárních disipativních semidynamických systémů, tj. má absorbuující množinu a jeho řešení je jednoznačné pro $t \geq 0^2$).

¹⁾ Po formulování úlohy pro rovnici barotropní vorticity a po nezbytných matematických krocích zaměřujeme pozornost na korektní řešitelnost této rovnice, na její absorbuující množinu a její atraktor. Následuje důkaz existence inerciální variety a odhad její dimenze. Také nás zajímá čas, v jehož průběhu dochází k přitažení trajektorie systému, vycházející z bodu u_0 , inerciální varietou. Podle [3] je, volně řečeno, dynamika řešení této rovnice již v poměrně krátké době dynamikou na inerciální varietě, tj. dynamikou konečnědimenzionálního systému. Připomeňme si, že pokud existuje inerciální varieta M a existuje atraktor A (nemusí být ani globální), potom platí $A \subset M$. Ještě si řekněme, co rozumíme pojmem „absorbující“ množina. Při daném dynamickém systému, otevřené množině U v H a množině $B \subset U$, řekneme o B , že je absorbuující v U , jestliže pro každou omezenou množinu B_0 takovou, že $B_0 \subset U$, existuje t_1 takové, že $S(t)B_0 \subset B$ pro všechna $t \geq t_1$.

²⁾ S teorií (diskrétních) semidynamických systémů na \mathbb{R} se lze seznámit v [5]. Tyto systémy mají velmi složitou topologickou strukturu semitrajektorií (semitrajektorie se definuje stejně jako kladná semitrajektorie dynamického systému) a jejich studium je důležité mimo jiné pro poznávání globálních vlastností trajektorií dynamických systémů na chaotických (podivných) atraktorech.

3. Systém (8.1) má globální konečnědimenzionální atraktor. Dynamika systému je soustředěna na tomto atraktoru a generuje chaos v čase.
4. Systém (8.1) je na atraktoru systémem ergodickým. K tomuto tvrzení je třeba dodat: Mějme dán dynamický systém s fázovým prostorem $H \subset \mathbb{R}^n$. Mějme na H definovanou míru m . Nechť pro skoro všechna (vzhledem k míře m) $u_0 \in H$ platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \int_0^t f(S(t')u_0) dt' = \int_H f dm \quad \text{pro všechna } f \in L_1(H, m).$$

Potom říkáme, že míra m je ergodická a dynamický systém uvažovaný s touto mírou nazveme ergodickým systémem. Je to tedy systém, kde časový průměr fyzikální veličiny „podél“ libovolné fázové trajektorie můžeme nahradit integrací přes celý fázový prostor, v našem případě přes atraktor $A \subset B$. Předpoklad 4 je nezbytný k tomu, abychom mohli při výpočtu statistických deskriptorů atraktoru systému (8.1) vyjít z jeho trajektorie.

5. Atraktor systému (8.1) je ve statistickém smyslu jimi plně popsán při existenci jeho invariantní míry.

Poznámka. Mluvili jsme zde o chaosu v čase. Doplníme tento výrok tvrzením o tom, že jeho geometrickým obrazem nemusí být jen podivný atraktor. Může jím být i několik stabilních uzavřených trajektorií, mezi nimiž v důsledku malých fluktuací dochází k „přeskokům“. Turbulentní pohyb tedy může být pojímán nejen jako generace stochastičnosti, ale také jako zesílení stochastičnosti.

Klimatem „ideálního“ modelu rozumíme úplný soubor nezávislých charakteristik atraktoru systému (8.1), tj. charakteristických invariantů atraktoru tohoto systému. O invarianci zde hovoříme proto, že tyto charakteristiky jsou invariantní vůči hladké transformaci souřadnic. Abychom docílili shody mezi takto definovaným klimatem a tradičně pojímaným klimatem jako souborem stavů fyzikálního systému za dostatečně dlouhou dobu, je třeba nyní touto dobou rozumět neohraničený časový interval. V tomto případě nahlížíme na soubor statistických deskriptorů atraktoru v konečném čase jako na „aktuální“ či „lokální“ klima. Protože soubor stavů realizovaných systémem (8.1) na atraktoru lze považovat za realizaci jistého náhodného stacionárního procesu, s výhodou zde použijeme aparátu matematické statistiky. Přitom je třeba rozlišovat mezi změnou a nestálostí klimatu. Změnou klimatu budeme nadále rozumět změny charakteristik atraktoru systému (8.1) při změně parametrů μ systému, zatímco nestálost klimatu chápeme jako nehomogenitu atraktoru či jako nestacionární odezvu na změnu vnějších parametrů [4].

9. Prediktabilita a stabilita

V matematické teorii klimatu založené na teorii dynamických systémů chápeme problém predikce klimatu jako problém související s predikcí fázové trajektorie systému (8.1). Vyjdeme-li z „ideálního“ modelu klimatu, pro který bude platit teorém

o existenci a jednoznačnosti (model klimatického systému musí být globálně řešitelný), pak predikce trajektorie bude určovat nepřesnost počátečních dat a je třeba přihlídnout k nestabilitě těchto dat vůči možným perturbacím. V tomto směru má své místo definice nestability podle Ljapunovova: řešení systému $\varphi(t)$ je stabilní vůči perturbacím počátečních dat, jestliže k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že ve fázovém prostoru platí $\|\varphi_0 - \varphi'_0\|_H \leq \delta$, jestliže $\|\varphi(t) - \varphi'(t)\|_H \leq \varepsilon$ pro všechna $t > 0$. V tomto zápisu jsou $\varphi(t)$ a $\varphi'(t)$ řešení systému při počátečních podmínkách $\varphi|_{t=0} = \varphi_0$, $\varphi'|_{t=0} = \varphi'_0$.

Při nestabilní trajektorii a nepřesných počátečních datech je nezbytné zadat jejich počáteční rozdělení, pokud ovšem známe rozdělení chyb těchto dat. V opačném případě můžeme předpokládat, že rozdělení bude rovnoměrné, jestliže kromě hranice okolí, v němž počáteční data leží, nemáme k dispozici žádné další informace. Je zřejmé, že v průběhu času se počáteční rozdělení bodů, tj. počátečních dat, bude „rozplývat“.

Naším úkolem je napsat rovnici pro chyby predikce za předpokladu, že chyby jsou dostatečně malé a lze tedy vyjít z linearizace systému (8.1). Nechť $\varepsilon = \varphi - \varphi'$. Linearizací systému (8.1) vůči $\varphi(t)$ dostaneme

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = A(\varphi(t))\varepsilon, \quad \varepsilon|_{t=0} = \varepsilon_0, \quad (9.1)$$

kde A je lineární operátor. Řešení (9.1) zapišme ve tvaru $\varepsilon(t) = B(t)\varepsilon_0$. Odtud platí, že

$$\|\varepsilon(t)\|^2 = (B\varepsilon_0, B\varepsilon_0) = (B^*B\varepsilon_0, \varepsilon_0), \quad (9.2)$$

kde B^* je operátor adjungovaný k operátoru B . Uvažme dále rovnici pro vlastní funkce ψ_i a vlastní hodnoty λ_i operátoru B^*B a provedme rozvoj funkce ε_0 podle ψ_i . Dostáváme řadu $\varepsilon_0 = \sum_i \alpha_i \psi_i$ s koeficienty rozvoje α_i a můžeme psát

$$\|\varepsilon(t)\|^2 = (B^*B\varepsilon_0, \varepsilon_0) = \left(\sum_i \lambda_i \alpha_i \psi_i, \sum_i \alpha_i \psi_i \right) = \sum_i \lambda_i \alpha_i^2.$$

Odtud vidíme, že chyba predikce na intervalu $(0, t)$ je dána singulárními čísly operátoru $B(t)$ a rozdělením chyb λ_i v počátečním časovém okamžiku. Protože růst chyb závisí na řešení (8.1), je zřejmé, že pro různá řešení bude různá i predikce (totéž platí pro rozličné „části“ řešení).

Jelikož našim hlavním úkolem je posoudit citlivost atraktoru klimatických modelů (doposud jsme definovali klima „ideálního“ modelu souboru nezávislých charakteristik atraktoru systému (8.1)), je třeba říci, co rozumíme stabilitou atraktoru A systému (8.1). Atraktor A nazveme stabilním vůči časově neměnné vnější perturbaci, jestliže k libovolnému $\varepsilon > 0$ existují dvě čísla $\delta > 0$ a $\beta_0 > 0$ taková, že libovolné řešení $\varphi_1(t)$ systému

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = F(\varphi_1, \mu) + \beta f(\varphi_1), \quad \varphi_1|_{t=0} = \varphi_0, \quad \beta > 0, \quad (9.3)$$

bude z ε -okolí atraktoru A , tj. $\varphi_1(t) \in U_\varepsilon(A)$ pro všechna $t > 0$, jestliže φ_0 vybereme z δ -okolí $U_\delta(A)$, tj. $\varphi_0 \in U_\delta(A)$ a $\beta < \beta_0$. Je známo (citujeme podle [4]), že atraktor systému (8.1) vskutku je stabilní vůči časově neměnným perturbacím. To znamená

toto: jestliže systém (9.3) má atraktor A_1 , pro dostatečně malá β bude A_1 ležet v nějakém ε -okolí atraktoru A . Neznamená to však, že se pro $\beta \rightarrow 0$ oba tyto atraktory budou shodovat.

Když jsme na začátku této kapitoly mluvili o predikci trajektorie systému (8.1), uvažovali jsme o stabilitě řešení $\varphi(t)$ při působení malých perturbací podle Ljapunova. Řekli jsme, že znalost této trajektorie je nezbytnou podmínkou pro predikci klimatu. Avšak obecně je třeba mít na zřeteli přímo stabilitu dynamiky klimatického systému na jeho atraktoru. Naskýtají se nám dvě možnosti, jak formulovat tvrzení o takové stabilitě. Jedna z nich vychází z pojmu strukturální stability a druhá upřednostňuje formulaci v termínech stability momentů statistického stacionárního řešení. Důvody preference nacházíme v tom, že znalost struktury takového řešení je nezbytná v otázkách „aktuálního“ klimatu. Jinak řečeno, je třeba zaujmout apriorní hledisko týkající se funkce rozdělení pravděpodobnosti v prostoru stavů systému (8.1), tj. ve fázovém prostoru H . Zejména je třeba znát, je-li toto rozdělení jednododální či vícemodální, a pak vystupuje do popředí otázka o možnosti „přechodů“ z jednoho aktuálního klimatu do druhého aktuálního klimatu.

10. Citlivost klimatických modelů na malé vnější perturbaci

Dříve než zde řekneme, jak se na centrální problém teorie klimatu dívá klimatolog, a poté rozvineme aparát matematické teorie klimatu, je třeba podotknout, že všechny momenty statistického stacionárního řešení systému (8.1) jsou stabilní. Jinými slovy, nazíráme-li na dynamiku systému (8.1) jako na stacionární náhodný proces, předpokládáme stabilitu všech momentů vůči malé perturbaci parametrů systému. Odtud vyplývá spojitá závislost momentů na parametrech vnější perturbace, takže např. pro první momenty platí $\|\bar{\varphi} - \bar{\varphi}_1\| \leq C\|\delta\mu\|$, kde $\bar{\varphi}$, $\bar{\varphi}_1$ jsou první momenty výchozího a perturbovaného řešení, $\delta\mu$ představuje perturbaci parametru μ , C je konstanta. Z teoretického hlediska hodnota této konstanty není důležitá. Prakticky však má velký význam, neboť udává citlivost modelu na ty perturbace, při jejichž působení přechází nerovnost na rovnost.

Klimatolog považuje v poslední době za prioritní úkol objasnit anomální vysoké přízemní teploty vzduchu ve středních zeměpisných šířkách severní polokoule v období od 80. do 90. let. Průměrný roční nárůst této teploty bývá vysvětlován růstem zimní teploty nad souší (proměnnost teploty povrchu oceánu v zimním i letním období je v průměru prakticky stejná). Z analýzy prvků meteorologických polí dostáváme, že anomální přízemní teplota vzduchu byla pozorována v centrální části Asie, Aljašky a na severovýchodě Kanady. Pevniny se anomálně zahřívají a oceány se ochlazují. Tato anomální struktura dostala označení COWL-index (chladný oceán, teplá pevnina (citujeme [4])). Anomální atmosférická cirkulace se jeví tak, že zonální složka rychlosti nad oceánem se zesiluje ve srovnání s klimatem. Anomální cirkulace je ekvivalentně barotropní.

Uvádí se [4], že rozdíl mezi přízemní teplotou v obdobích 1981–1990 a 1951–1980 činí 0,56 K pro chladnou část roku, 0,20 K pro teplou část roku. Z rozdílu 0,36 K přibližně

0,33K lze přičíst COWL-indexu. Projevuje se zde vliv fenoménu zvaného El Niño, což je výsledný jev vyvolaný interakcí mezi atmosférou a Tichým oceánem. Projevuje se přechodným zánikem studeného Peruánského mořského proudu podél pobřeží Jižní Ameriky a jeho nahrazením teplým proudem z rovníkových oblastí Tichého oceánu. Tento jev vyvolává katastrofické deště na pobřeží, má zhoubné následky pro mořskou flóru i faunu. El Niño je doprovázeno rozsáhlými změnami tlaku vzduchu v oblasti mezi Austrálií a Jižní Amerikou, nazývanými „jižní oscilace“, které mají výrazný vliv na všeobecnou cirkulaci (převzato z [6]).

Přirozeně pak vzniká otázka: Jaký podíl na trendu teploty má vlastní dynamika? Pro všechna vysvětlení již popsaných jevů byly přijaty dvě pracovní hypotézy. Bud' je anomální dynamika přirozeným důsledkem možných fluktuací, nebo jde o odezvu systému na jisté malé vnější perturbace. Pak by ovšem musel být „ideální“ model krajně citlivý na působení takových vzruchů. Může taková situace vůbec nastat?

Pokusme se vytvořit teorii, která by uvedenou druhou možnost připouštěla. Východiskem pro nás budou disipativní-flukтуаční vztahy získané na základě systémů splňujících Liouvilleův teorém, majících kvadratický integrál pohybu, nacházejících se v rovnovážném stavu a na druhé straně to bude dynamicko-stochastický model cirkulace s její značně nízkofrekvenční proměnností [4]. Použitelnost disipativních-flukтуаčních vztahů k liouvilleovským systémům, realizujícím trajektorii na atraktoru, bude věnována pozornost později³).

Budiž dán dynamický systém

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} \equiv \dot{u}_i = Q_i(u, t), \quad u \in \mathbb{R}^N, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (10.1)$$

splňující podmínku nestlačitelnosti (divergence fázového toku je nulová)

$$\sum_i \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial u_i} = 0 \quad (10.2)$$

a pro který platí zákon zachování

$$\dot{M} \equiv \sum_i m_i \dot{u}_i u_i = 0, \quad (10.3)$$

kde $m_i > 0$. Jestliže na systém (10.1) budou působit malé vnější perturbace δf_i , dostáváme

$$\dot{v}_i = Q_i(v, t) + \delta f_i. \quad (10.4)$$

Položme $\delta u_i = v_i - u_i$. Pro dostatečně malá δf_i linearizací (10.4) vůči u získáme vztah

$$\delta u_i = \sum_j \int_0^t \tilde{G}_{ij}(t, t') \delta f_j(t') dt', \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

³) Liouvilleův teorém říká, že tok řešení hamiltonovského systému zachovává objem ve fázovém prostoru. Tehdy z Poincarého rekurentního teorému vyplývá (viz 1. část článku), že fázový bod na trajektorii s danou počáteční podmínkou se opakovaně navrácí libovolně blízko k původní počáteční podmínce. Poincarého teorém je dostatečně obecný a nezávisí na ergodičnosti pohybu. Požaduje se jedině to, aby tok řešení zachovával fázový objem.

s Greenovou funkcí $\tilde{G}(t, t')$. Předpokládáme, že k pulzní perturbaci dojde v čase $t = 0$ a $\delta u_i|_{t=0} = 0$.

Uvažme nyní soubor trajektorií systému (10.1) generovaných souborem počátečních dat systému a předpokládejme, že tento soubor generuje vícedimenzionální normální rozdělení

$$P(u, t) = C \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_i m_i u_i^2\right) \quad (10.5)$$

s normovací konstantou C . Hustota pravděpodobnosti P splňuje Liouvilleovu rovnici

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial P \dot{u}_i}{\partial u_i} = 0,$$

z níž po přihlédnutí ke vztahům (10.2), (10.3) a (10.5) dostáváme

$$\frac{\partial P}{\partial t} = - \sum_i \dot{u}_i u_i m_i P = -\dot{M}P = 0.$$

Odtud vidíme, že proces je stacionární. Pak ovšem kovariantní matice $B(t, t') \equiv \langle u(t)u^T(t') \rangle$ (lomenými závorkami je zde vyznačeno vystředování přes soubor) závisí jen na rozdílu $t' - t$ a podle [4] můžeme psát

$$G_{ij} \equiv \langle \tilde{G}_{ij}(t, t') \rangle = m_j B_{ij}(t' - t). \quad (10.6)$$

Zápis (10.6) je již hledaným disipativním-flukтуаčním vztahem, který říká, že reakce systému na malou pulzní perturbaci je analogická reakci na přirozenou fluktuaci. Vyjdeme-li nyní z vyjádření (10.6), můžeme určit matematickou naději (střední hodnotu) výrazu pro δu_i po formálním přechodu $t \rightarrow \infty$ a pro determinovanou funkci δf :

$$\langle \delta u_i \rangle = \sum_j \int_0^\infty G_{ij} \delta f_j dt = \sum_j \int_0^\infty m_j B_{ij} \delta f_j dt. \quad (10.7)$$

Je třeba zdůraznit, že takový přechod je možný při stabilním pravděpodobnostním rozdělení ve fázovém prostoru, který nenaruší libovolná časově neměnná perturbace.

Pokud δf_j v (10.7) není funkcí času, odezva systému na tuto perturbaci nabývá tvaru

$$\langle \delta u_i \rangle = \sum_j \delta f_j \int_0^\infty B_{ij} m_j dt$$

a v maticovém zápisu bude

$$\langle \delta u \rangle = \int_0^\infty B(\tau) d\tau B^{-1}(0) \delta f \equiv A^{-1} \delta f. \quad (10.8)$$

Protože $\|\langle \delta u \rangle\| \leq \|A^{-1}\| \|\delta f\|$ a rovnost v (10.8) platí tehdy, když vektor f a příslušný vektor matice A^{-1} jsou kolineární, maximální možná odezva systému v normě $\|\delta f\|$ bude určena maximálním singulárním číslem matice A^{-1} .⁴⁾

⁴⁾ Čísla μ , která nejsou regulárními hodnotami (regulárními body, regulárními čísly) operátoru T v Hilbertově prostoru, nazvěme singulárními hodnotami. Ta tvoří spektrum operátoru T . Operátorem je i čtvercová matice, a proto hovoříme o singulárních číslech matice, v našem případě matice A^{-1} .

Zápis (10.8) je vztahem, z něhož vyjdeme při analýze citlivosti disipativních klimatických modelů. Oprávněnost takového kroku spočívá na existenci pravděpodobnostní invariantní míry na chaotickém atraktoru námi uvažovaného modelu a na předpokladu, že trajektorie modelu jsou realizace jistého stacionárního náhodného procesu. Tehdy u_i považujeme za koeficienty v rozvoji hledaných funkcí podle vlastních vektorů autokovariantní matice. Nazvěme je přirozené ortogonální funkce a označme je pro stručnost POF. Soudíme o nich, že jejich rozdělení je normální.

Proveďme kvantitativní analýzu odezvy systému v případě, že disperze Fourierových koeficientů v rozvoji hledaných funkcí podle POF (disperze je určitou mírou jejich variability) v průměru jsou stejné ($m_j = \text{konst} = a^{-1}$). Dále necht' matici B_{ij} lze aproximovat maticí diagonální $B_{ii} = a \exp(-t/T_i)$ [4]. Tehdy máme

$$\langle \delta u_i \rangle = \int_0^\infty \exp(-t/T_i) dt \delta f_i = T_i \delta f_i. \quad (10.9)$$

Jestliže nyní $|\delta f_i| = |\delta f|$ pro všechna i , z (10.9) dostáváme, že poměr maximální možné odezvy $\langle \delta u_1 \rangle$ ke střední odezvě je roven

$$k \equiv \frac{\langle \delta u_1 \rangle N}{\sum_i \langle \delta u_i \rangle} = \frac{T_1 N}{\sum_i T_i}. \quad (10.10)$$

Věnujme se vztahu (10.10) trochu podrobněji. Ukážeme, že (10.10) je možno považovat za lokální příspěvek disperze první POF v intervalu značně nízkých frekvencí $(0, \omega)$, pokud struktura první POF v rozličných intervalech spektra frekvencí bude přibližně stejná [4].

K tomu budeme potřebovat spektrální hustotu reálného stacionárního procesu s autokovariantní funkcí $a \exp(-t/T_i)$. Pro takovou hustotu dostáváme

$$\Phi_i(\omega) = 2a \int_0^\infty \exp(-t/T_i) \cos \omega t dt = \frac{2a\alpha_i}{\alpha_i^2 + \omega^2},$$

kde $\alpha_i = 1/T_i$. Všimněme si ještě energie náležející intervalu frekvencí $(0, \omega)$:

$$E_\omega^{(i)} = \pi^{-1} \int_0^\omega \Phi_i(\omega) d\omega = \pi^{-1} 2a \arctg(\omega T_i).$$

Pak již můžeme psát, že poměr energie přisouzené v intervalu $(0, \omega)$ první POF k celkové energii v tomto intervalu je

$$k_1 = \frac{\arctg(\omega T_i)}{\sum_i \arctg(\omega T_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (10.11)$$

V limitě $\omega \rightarrow 0$ bude $\arctg(\omega T_i) \rightarrow \omega T_i$, a tedy

$$k_1 = \frac{T_1}{\sum_i T_i}. \quad (10.12)$$

Přesvědčili jsme se, že (10.12) je až na konstantní faktor N ekvivalentní (10.10). Proto můžeme již přímo říci, že maximální citlivost klimatických modelů a reálného klimatického systému lze odhadnout na základě prezentace první POF (co do její disperze) vůči ostatním POF zahrnujícím nízké frekvence. Kvantitativní charakteristika tohoto „nízkofrekvenčního“ intervalu bude předložena dále.

Doposud jsme pracovali se systémem rovnic (10.1), který byl ze třídy liouvilleovských (tj. hamiltonovských) systémů, neboť byly splněny podmínky (10.2) a (10.3). Pokračujme v našem úsilí o odhad maximální citlivosti klimatických modelů k vnějším vzruchům tentokrát již s disipativním systémem rovnic

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = F(\varphi, \mu) + f, \quad (10.13)$$

kde $\varphi \in \mathbb{R}^N$ a f nezávisí na čase.⁵⁾ Nechť systém (10.13) má atraktor, na němž se realizuje dynamický chaos, který lze zakódovat jako náhodný stacionární ergodický proces.

V prvním případě to znamená, že dynamický systém generovaný (10.13) je stochastický. Tehdy dochází k exponenciálnímu rozcházení trajektorií systému vycházejících ze dvou blízkých bodů ve fázovém prostoru, každá trajektorie ve fázovém prostoru je v něm hustá a dynamický systém je systémem s mísením (mixing). Pod tímto pojmem rozumíme obecně toto: Mějme dynamický systém s fázovým prostorem $H \subset \mathbb{R}^N$ a mějme na H definovanou míru m . Potom platí $\lim_{t \rightarrow \infty} m(A \cap S(t)B) = m(A)m(B)$ pro všechna m -měřitelná $A, B \in H$. V druhém případě platí ergodická věta pro spojitě stacionární procesy: Když $\xi(t)$ je spojitý stacionární proces, potom náhodné proměnné vyjádřené integrály $T^{-1} \int_0^T \xi(t) dt$ konvergují podle kvadratického středu pro $T \rightarrow \infty$ ke střední hodnotě u náhodné funkce $\xi(t)$ a náhodné proměnné $T^{-1} \int_0^T \xi(t + \tau)\xi(t) dt$ konvergují (podle kvadratického středu, tedy i podle pravděpodobnosti) ke korelační funkci $B(\tau)$ daného procesu.

Vraťme se k systému (10.13), který vystředujeme v čase. Buďtež

$$\tilde{\varphi} = T^{-1} \int_{t-T/2}^{t+T/2} \varphi dt, \quad \bar{\varphi} = \lim_{T \rightarrow \infty} \tilde{\varphi}, \quad \varphi' = \tilde{\varphi} - \bar{\varphi}, \quad (10.14)$$

kde $\bar{\varphi}$ nezávisí na t . Tehdy bude

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial t} + A(\bar{\varphi})\varphi' = f'. \quad (10.15)$$

Operátor A dostaneme linearizací (10.13) vůči $\bar{\varphi}$. Budeme předpokládat, že $\text{Re } \lambda(A) > 0$ (λ jsou vlastní čísla operátoru A). Řekněme si již zde, že odhad maximální

⁵⁾ U liouvilleovských systémů neexistují atraktory a oblasti přitažlivosti. Fázový bod na trajektorii s danou počáteční podmínkou v přípustné části fázového prostoru se opakovaně navrací libovolně blízko k původní počáteční podmínce a množina nebloudících bodů je celá přípustná část fázového prostoru. Omezení je dáno tím, že systém není disipativní.

citlivosti klimatického modelu (10.13) na malé vnější perturbace, aktivující disipativní systém, bude shodný s odhadem maximální citlivosti již uvedeným.

Tím, že požadujeme, aby $\text{Re } \lambda(A) > 0$, vytváříme vlastně nezávislý předpoklad o veličině f . Právě díky jemu disperse funkce φ' konverguje k nule pro $T \rightarrow \infty$ a pak pro dostatečně velké T lze považovat φ' za malou veličinu.

Další krok spočívá ve formální Fourierově transformaci zápisu (10.15). Protože platí

$$\varphi' = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega t) d\omega, \quad f' = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega t) f'_\omega d\omega,$$

dostáváme

$$i\omega\varphi'_\omega + A(\bar{\varphi})\varphi'_\omega = f'_\omega \implies \varphi'_\omega = (A + i\omega E)^{-1} f'_\omega.$$

Jestliže φ'_ω bude náhodným vektorem, autokovariantní matice pro φ'_ω bude mít tvar

$$C \equiv \langle \varphi'_\omega \varphi'^T_\omega \rangle = (A + i\omega E)^{-1} \langle f'_\omega f'^T_\omega \rangle (A^T - i\omega E)^{-1}.$$

V limitě $\omega \rightarrow 0$ dospíváme ke vztahu $C \rightarrow (A^T \langle f_\omega f_\omega^T \rangle^{-1} A)^{-1}$. Nechť pro malá ω je f'_ω náhodný vektor se stejnou disperzí ve všech ortogonálních směrech báze v \mathbb{R}^N . Tehdy můžeme psát $F \equiv \langle f'_\omega f'^T_\omega \rangle = a_\omega^2 E$, kde E je identická matice, a_ω^2 disperse v každém z těchto směrů a při $\omega \rightarrow 0$ pro autokovariantní matici C máme $C = a_\omega^2 (A^T A)^{-1}$. Jestliže jsou λ_i vlastní čísla autokovariantní matice C , $\text{Tr}(C)$ je její stopa a σ_i singulární čísla matice A , pak bude

$$\frac{\lambda_{\max}(C)}{\text{Tr}(C)} = \frac{1/\sigma_{\min}^2}{\sum_i 1/\sigma_i^2}. \quad (10.16)$$

Všechny popsané operace a získané výsledky se odvíjely od disipativního systému rovnic (10.13). Pokročíme dále a vedle tohoto systému mějme na mysli rovněž perturbovaný systém, v němž zároveň s funkcí f bude i δf :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= F(\varphi, \mu) + f, \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} &= F(\varphi_1, \mu) + f + \delta f. \end{aligned}$$

Po časovém vystředování pro $T \rightarrow \infty$ a za podmínek $\partial \bar{\varphi} / \partial t = \partial \bar{\varphi}_1 / \partial t = 0$ po odečtení obou rovnic máme $\overline{F(\varphi_1, \mu)} - \overline{F(\varphi, \mu)} = \delta f$. Na druhé straně pro f můžeme psát $\delta f = A(\bar{\varphi})\delta\varphi$, kde $\delta\varphi = \bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}$. Díky tomuto vztahu dostáváme

$$\begin{aligned} \|\delta\varphi\|^2 &\leq \|A^{-1}\|^2 \|\delta f\|^2, \\ \|\delta\varphi\|_{\max}^2 &= \|A^{-1}\|^2 \|\delta f_R\|^2 = (1/\sigma_{\min}^2) \|\delta f_R\|^2. \end{aligned}$$

Rovnosti bude dosaženo tehdy, budou-li δf_R a singulární vektor matice A kolineární.

Nyní odhlédneme od normované veličiny $\|\delta\varphi\|_{\max}$ a vztáhneme ji na střední odezvu, definovanou jako střední aritmetickou odezvu na všechna δf_i , která jsou v normě $\|\delta f_R\|$ stejná, třebaže určená rozdílnými singulárními vektory matice A . Tím získáme vztah

$$\frac{\|\delta\varphi\|_{\max}^2}{\|\delta\varphi\|_C^2} = \frac{\|\delta\varphi\|_{\max}^2 N}{\text{Tr}(A^T A)^{-1} \|\delta f_R\|^2} = \frac{(1/\sigma_{\min}^2) N}{\sum_i 1/\sigma_i^2}. \quad (10.17)$$

Můžeme se přesvědčit, že zápisy (10.16) a (10.17) jsou ekvivalentní. Neměli bychom zapomínat na to, že při odvozování těchto závislostí vycházíme z předpokladu o stabilitě systému (10.13) vůči malým konstantním vnějším perturbacím.

Než pokročíme dále a přistoupíme k analýze horní hranice frekvence, vymežující interval značně nízkofrekvenční nestálosti klimatu, provedme stručnou rekapitulaci dosavadních výsledků. V rámci námi uvažovaných aproximací jsme dospěli k závěru, že maximální citlivost klimatického modelu lze určit podle prezentace (tj. podle disperze) první POF pro nízkofrekvenční proměnlivost. Pro kvantitativní analýzu není třeba znát evoluční operátor úlohy, postačuje, budeme-li znát dostatečně dlouhý úsek trajektorie a bude-li splněn předpoklad o ergodičnosti. Zejména to je důležité pro studium reálných klimatických systémů. Výrazná prezentace první POF bude zajištěna, pokud minimální singulární číslo bude blízké nule, tj. při téměř „prostorové“ rezonanci.

Zbývá nám vymežit horní hranici intervalu nízkofrekvenčních nestálostí klimatu. Již dříve jsme uvedli, že nestálostí budeme rozumět změny „aktuálního“ klimatu, které především jsou důsledkem nehomogenity atraktoru klimatického systému. Avšak také může jít o nestacionární odezvu systému na změny vnějších parametrů.

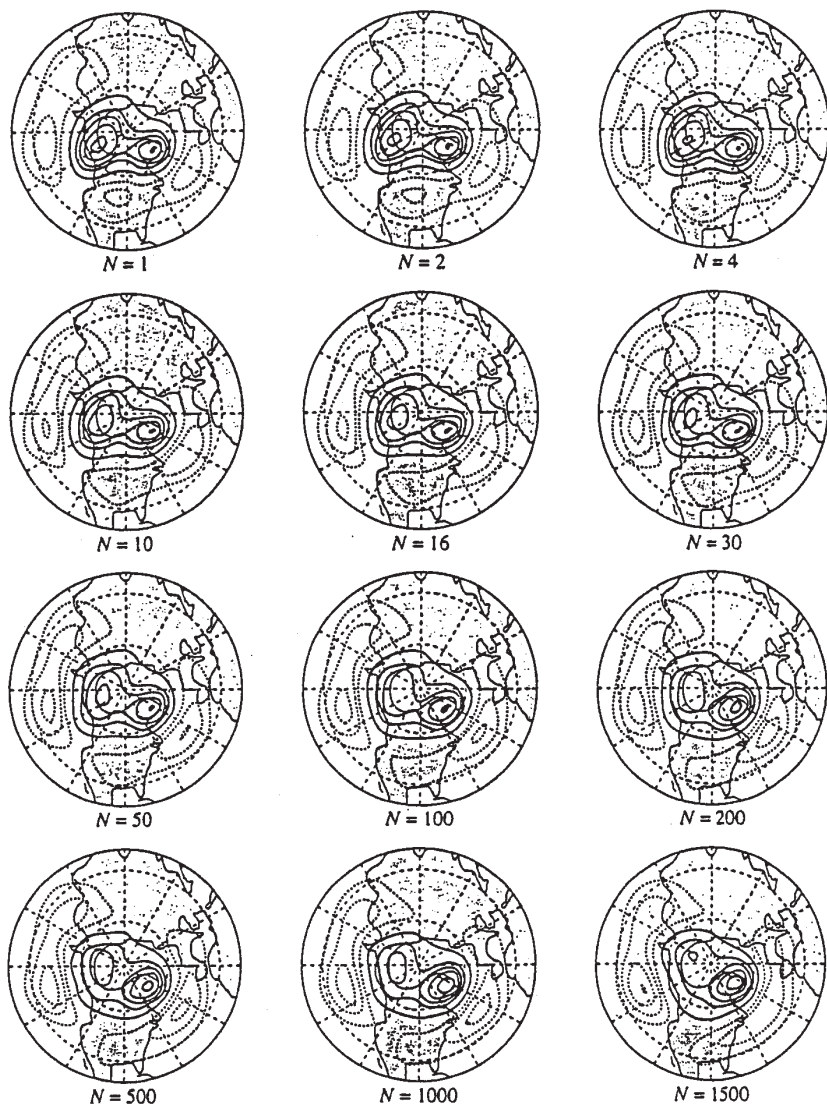
Za tímto účelem vyjdeme ze vztahu (10.11), v němž položíme $T_1 \gg T_i$, $i = 2, \dots, N$. Tehdy počínajíc jistým ω_0 můžeme psát $\arctg(\omega T_i) \sim \omega T_i$. Jestliže navíc přihlídneme k faktoru N a klademe $m_i = a$, přejde (10.13) na (s přesností až na malé veličiny druhého řádu)

$$k = \frac{T_1 N}{\sum_{i=1}^N T_i + \frac{1}{3} \omega^2 T_1 \sum_{i=2}^N T_i}.$$

Pro malá ω odsud dostáváme $\lambda_1(C)/\text{Tr}(C) \sim a/(b + c\omega^2)$, kde $a, b, c > 0$.

Pokud jde o odhad velikosti N v zápisu (10.11), vůbec nejde o triviální záležitost. Je třeba mít na zřeteli, že dynamika systému je soustředěna na jeho atraktoru, jehož dimenze je vesměs menší než dimenze fázového prostoru. Podle [4] lze postupovat následovně. Mějme vektorový stacionární náhodný proces s autokovarianční maticí $C = \langle \varphi \varphi^T \rangle$. Nechť $\{\psi_i\}$ jsou vlastní vektory matice C a $\{\lambda_i\}$ její vlastní čísla. Položme $\varphi = \sum_i \alpha_i \psi_i$. Protože vektory $\{\psi_i\}$ jsou ortogonální, pro energii procesu dostáváme $E \equiv (\varphi, \varphi) = \sum_{i=1}^N \alpha_i^2$. Považujme E za náhodnou veličinu s jistým rozdělením a pišme $\bar{E} \equiv \langle E \rangle = \sum_{i=1}^N \langle \alpha_i^2 \rangle = \sum_{i=1}^N \lambda_i$. Uvažme dále nějaký další náhodný proces generující energii $E_1 = \sum_{i=1}^{N^*} \beta_i^2$, $\langle \beta_i^2 \rangle = \text{konst}$, a to takový, že $\bar{E} = \bar{E}_1$, $\langle (E - \bar{E})^2 \rangle = \langle (E_1 - \bar{E}_1)^2 \rangle$. Za těchto podmínek číslo N^* udává počet efektivních nezávislých stupňů volnosti výchozího náhodného procesu. Při normálním rozdělení veličin α_i, β_i bude

$$N^* = \left(\sum_{i=1}^N \lambda_i \right)^2 \left(\sum_{i=1}^N \lambda_i^2 \right)^{-1}.$$

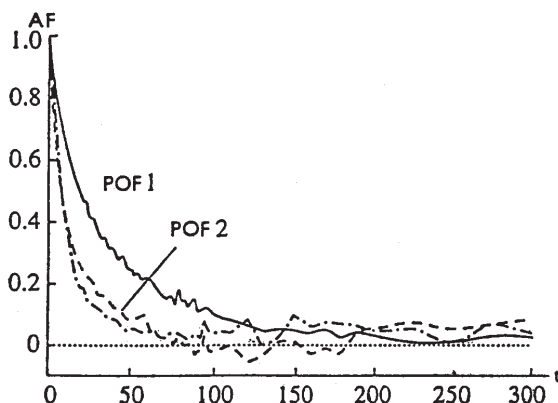


Obr. 1. Modelová pole potenciálu hladiny 500 hPa (severní polokoule) zprůměrovaná podle různého počtu dnů N [4].

Výpočty ukázaly, že pro každodenní údaje o výšce hladiny 500 hPa je $N^* \sim 30$. To znamená, že pokud pro kovariantní matici C při nízkofrekvenční nestállosti klimatu platí $\lambda_{\max}/\text{Tr}(C) \sim 0,3$, pak $k \sim 10$.

Zbývá nám provést analýzu předpokladů, na jejichž základě jsme dospěli k uvedeným výsledkům. Poslouží nám k ní závěry numerických experimentů s modelem lednové cirkulace převzatým ze [4].

Především je třeba odpovědět na otázku o „strukturální“ stabilitě první POF, kterou by mohla ovlivnit volba intervalu frekvencí, tj. velikost N . Jestliže věnujeme pozornost obr. 1 (obr. 4.8 v práci [7], na němž jsou zakresleny první POF modelových polí geopotencionálu hladiny 500 hPa, zprůměrovaných přes různá N dnů), neměla by nám uniknout udivující stabilita první POF.⁶⁾ Poznamenejme, že blízkost mezi denními a zprůměrovanými prvními POF branými přes časový interval jednoho měsíce byla pozorována i pro reálná data.

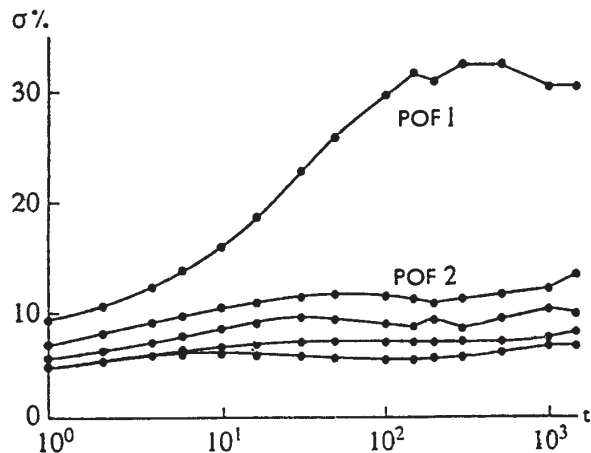


Obr. 2. Autokorelační funkce AF pro Fourierovy koeficienty rozvoje hladiny 500 hPa (severní polokoule, každodenní údaje). Silně je vyznačena první, čárkovaně druhá a čerchovaná třetí POF (podrobnosti v textu) [4]. Na vodorovnou osu jsou vynášeny dny.

Dále to bude otázka o aproximaci autokorelačních funkcí exponenciálními funkcemi, kde předpokládáme, že charakteristická doba útlumu první POF je větší než u ostatních POF. Podle obr. 2 takový předpoklad má své místo. Z tohoto obrázku lze vyčíst, že dekrement útlumu pro první POF dosahuje hodnoty $\frac{1}{25}$ dne a pro druhou tuto funkci hodnoty kolem $\frac{1}{10}$ dne. Z výsledků uvedených v [4] vyplývá, že relativní disperse připadající na první POF monotónně narůstá při zvětšujícím se časovém intervalu, podle něhož provádíme vystředování v čase. K její saturaci dojde asi po 100 dnech na hladině $\sim 0,3$, zatímco saturace druhé POF nastává asi kolem hladiny 0,1 (obr. 3). To znamená, že poměr disperse první a druhé POF pro velké časové intervaly činí ~ 3 . Podle [4] odhadem tohoto poměru může poměr charakteristické doby útlumu odpovídajících autokorelačních funkcí $T_1/T_2 = \frac{25}{10} = 2,5$. Za předpokladu, že i druhá POF je strukturálně stabilní, můžeme takový odhad považovat za vyhovující.

Abychom mohli demonstrovat to, že vnější perturbace určité struktury může vyvolat velkou odezvu (při stejné normě), obrátíme pozornost k numerickým experimentům s různými verzemi modelů všeobecné cirkulace atmosféry navržených v Institutu

⁶⁾ Geopotenciál (potenciál spojený s tíhovým polem Země) je ekvivalentní potenciální energií částice o jednotkové hmotnosti vzhledem ke zvolené nulové geopotenciální hladině, kterou ztotožňujeme se střední hladinou moře. Geopotenciál φ je spojen s geometrickou výškou z vztahem $\varphi = \int_0^z g dz$, kde g je velikost tíhového zrychlení (citujeme podle [6]).



Obr. 3. Procentuální příspěvek disperze σ připadající na každou z pěti POF jako funkce intervalu vystředování [4]. Na vodorovnou osu jsou vynášeny dny.

numerické matematiky RAV (citujeme podle [4]) s přihlédnutím k dennímu chodu radiačních toků (model M1) a modelu M2, v němž na tyto toky nebyl brán zřetel. Bylo prokázáno, že klimatické charakteristiky dynamiky generované těmito modely se od sebe liší. Model M2 například jevil desetiprocentní citlivost na změny koncentrace ozónu v přízemní vrstvě, zatímco reakce modelu M1 na takové změny nebyla prakticky pozorována. Dále čtverec normy anomálie zonálně vystředované komponenty zonální rychlosti (zonálního přenosu) pro M2 desetinasobně převýšil čtverec normy anomálie vytipované u M1. Tyto údaje platí pro severní polokouli. Přitom struktura odezvy v M2 byla blízká k první POF (příspěvek první POF k odezvě zonální vystředované složky rychlosti větru dosahoval hodnoty 0,64), avšak v případě M1 tomu tak nebylo. Je třeba se zmínit i o tom, že v obou případech první POF spočtená z měsíčních průměrů dat o zonálně vystředované zonální komponentě větru se velikostí disperze lišila od druhé POF (0,53 a 0,15 pro M1 a 0,41 a 0,19 pro M2). Příčinou různé odezvy je rozličná struktura příslušných ortogonálních funkcí ve výškách s prokázanou anomálií. Ukazují to i výsledky numerického experimentu s umělým zdrojem tepla ve spodní stratosféře, o němž je zmínka v [4].

11. Komentář na závěr

Náš příspěvek rozvržený do dvou na sebe navazujících částí lze označit jako pokus o netradiční a v naší odborné veřejnosti dosud nevířící přístup ke studiu klimatu a jeho změn, vycházející z kvalitativní dynamiky [4]. Ta staví na pojmu dynamického systému, jehož matematický model je obvykle představován soustavou diferenciálních rovnic, obyčejných i parciálních. Původně speciální metoda v teorii diferenciálních rovnic se záhy osamostatnila a pronikla do teoretických disciplín přírodních věd. V posledních letech silně poznamenala i rozvoj teoretické meteorologie, kde se uplatňuje při

analýze nestabilních úloh dlouhodobé předpovědi počasí v souvislosti se stochastičností režimů všeobecné cirkulace atmosféry, avšak také při výstavbě matematické teorie klimatu. V této oblasti je důležitou úlohou získání invariantní míry, soustředěné na atraktor klimatického systému, jehož evoluce může být zřejmě popsána systémem rovnic termohydrodynamiky a je plně determinovaná. Předpokládali jsme, že model klimatického systému je globálně řešitelný (platí teorém o existenci a jednoznačnosti řešení tohoto systému). O pokusech, za jakých podmínek je možno takovou míru nalézt, jsme pojednali v 1. části našeho článku, kde jsme výsledky teorie aplikovali na jeden z modelů všeobecné cirkulace atmosféry nad regionem severního Atlantiku [2].

Neméně důležitým počinem je studium otázek prediktability klimatických změn, vyúsťujících do „klimatických katastrof“. S odkazem na dostupnou literaturu byl problém stability klimatu vůči malým vnějším perturbacím přeformulován na problém stability statistických deskriptorů atraktoru „ideálního“ modelu klimatu. Poněkud stranou našich zájmů zůstala otázka, zda takový model vůbec existuje (viz předpoklad 2 v kapitole 2 první části příspěvku). Jestliže prioritním úkolem v první části byla konstrukce invariantní míry soustředěné do okolí stacionárních bodů klimatického systému, pak v jejím pokračování to bylo hledání maximální možné odezvy (odhadu maximální citlivosti) klimatického systému na malé vnější perturbace. Odhad byl prováděn za předpokladu stability klimatu. Svě místo zde má prokázaná souvislost mezi vlastními funkcemi operátorů generovaných operátorem úlohy a vlastními funkcemi kovariantní matice. Z příslušných vztahů lze vyjít při kvalitativní diagnóze „stupně excitace“ nízkofrekvenčních oscilací barotropní komponenty atmosférické cirkulace. Obě zde prezentované úlohy, z nichž v první jde o invariantní míru na atraktoru klimatického systému a ve druhé o odhad citlivosti tohoto systému na vnější vzruchy, je z praktického hlediska obtížné od sebe oddělit.

L i t e r a t u r a

- [1] HORÁK, J.: *Klíma, objekt matematického zkoumání. Část 1. Matematický model klimatu.* Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 46 (2001), 313–327.
- [2] DYMNIKOV, V. P., FILATOV, A. N.: *O někotorych zadačach matematičeskoj teorii klimata.* Fizika atmosféry i okeana 31 (1995), 313–323.
- [3] GORELOV, A. S., FILATOV, A. N.: *Inercialnye mnogoobrazija uravněnij barotropnoj atmosféry na vraščajuščejsja sfere.* Sbornik trudov Gidrometcentra RF 323 (1992), 71–97.
- [4] DYMNIKOV, V. P.: *O predskazuemosti izmeněnij klimata.* Fizika atmosféry i okeana 34 (1998), 741–751.
- [5] SMÍTAL, J.: *O funkciách a funkcionálnych rovníciach.* 1. ed. ALFA, Bratislava 1984, 143 s.
- [6] SOBÍŠEK, B. a kolektiv: *Meteorologický slovník výkladový a terminologický.* MŽP, Praha 1993, 594 s.
- [7] NITCHE, G.: *Some aspects of planetary-scale atmospheric variability in a low-resolution general circulation model.* PhD. Thesis University of Washington (1996), 207 s.