Rachel W. Hall; Krešimir Josić
Matematika hudebních nástrojů

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 47 (2002), No. 1, 37--49

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/141111

největším vydavatelem a distributorem astronomických map Hvězdárna a planetárium hl. m. Prahy (`http://www.planetarium.cz`).

L i t e r a t u r a

[1] Greeley, R., Batson, R. M.: *Planetary Mapping.* Cambridge University Press, Cambridge 1990.
[2] Kopal, Z., Carder, R. W.: *Mapping of the Moon.* D. Reidel, Dordrecht 1974.
[3] Rükl, A: *Měsíc.* Mapa přivrácené strany Měsíce 1 : 6 900 000. ZES Brno a Hvězdárna a planetárium hlavního města Prahy 1999.

Matematika hudebních nástrojů

Rachel W. Hall a Krešimir Josić

1. Úvod

Historie hudebních nástrojů je stará desetitisíce let. Zlomky fléten a píšťal z kostí nacházíme už u neandrtálců. Nedávno v Číně nalezená 9000 let stará flétna je asi na světě nejstarším hudebním nástrojem, na který lze dosud hrát (obrázky i nahrávky zvuku této flétny najdete na `http://www.bnl.gov/bnlweb/flutes.html`). Tyto rané nálezy ukazují, že se lidé již dávno snažili vytvářet zvuky určitých výšek — tedy zvuky, u nichž převažuje jistý kmitočet (frekvence). Otvory v těle flétny prozrazují, že pravěký muzikant již musel mít jistou koncepci hudební stupnice.

Matematické studium hudebních nástrojů nacházíme už u pythagorejců, kteří objevili, že jisté příjemně znějící kombinace tónů mají výšky v poměru malých celých čísel, jako 2 : 1 a 3 : 2. Otázkami ladění a akustiky se zabývají od té doby nejskvělejší přírodovědci. Uveďme jako tři vynikající příklady studii *Harmonie universelle* (*Všeobecná harmonie*) z r. 1636 [19], v níž se Marin Mersenne zabývá laděním a akustikou, práci *On the Sensation of Tone* (*O vnímání tónu*, H. v. Helmholz) z r. 1870 [15] a plodnou *The Theory of Sound* (*Teorie zvuku*, Lord Rayleigh), z r. 1877 [21].

Rachel W. Hall, St. Joseph's University, 5600 City Ave., Philadelphia, PA 19131, e-mail: `rhall@sju.edu`; Krešimir Josić, Department of Mathematics and Statistics, Boston University, 111 Cummington Street, Boston, MA 02215, e-mail: `josic@math.bu.edu`

The Mathematics of Musical Instruments. Monthly *108* (April 2001).

Přeložil Jan Obdržálek.

Obr. 1. Muzikolog Ola Kai Ledang hraje na flétničku.

O tomto předmětu bylo již napsáno mnoho. Zde uvedeme jen přehled a pro podrobnosti odkážeme zvídavého čtenáře na literaturu a na naši webovskou stránku `www.sju.edu/~rhall/newton`.

2. Willow flute — flétnička[1])

V tomto odstavci se budeme zabývat fyzikálními vlastnostmi norského lidového nástroje — flétničky *seljefløyte* (vrbová píšťalka). Tento nástroj můžeme pokládat za primitivní proto, že nemá otvory, které bychom zakrývali prsty, a tím vytvářeli tóny různých výšek. Místo toho hráč mění sílu dechu a tím volí některou z *harmonických*, což jsou tóny s kmitočtem, který je celistvým násobkem kmitočtu nejhlubšího — *základního* tónu flétničky. Tóny, které takto můžeme dostat, tvoří zhruba durovou stupnici s poněkud vyšší kvartou a trochu nižší malou sextou — a s nižší malou septimou navíc.

Flétnička patří do rodiny zobcové flétny (podélné), ačkoliv ji držíme příčně. Je vyrobena z vrbové větvičky (nebo v současnosti z trubky z PVC, viz vtipnou a výstižnou webovou stránku `http://www.geocities.com/SoHo/Museum/4915/SALLOW.HTM`). Jeden konec má otevřený, na druhém je štěrbina, do níž hráč fouká, a tím nutí vzduch proudit přes zářez do tělesa flétničky. Takto vznikající kmity budí uvnitř nástroje stojaté vlny; jejich kmitočet určuje výšku tónu. Zatímco zobcová flétna má otvory, jejichž zakrýváním prsty mění hráč kmitočet stojatých vln, flétnička žádné otvory nemá. Ze zápisu melodie *Willow Dance* (Tanec pro flétničku), obr. 2, jak jej na flétničku hraje Hans Brimi [8], je však vidět, že na flétničku lze hrát docela dost různých tónů. Jak je to možné?

Odpověď nám dá matematika zvukových vln. Označme u přetlak v trubici, x polohu podél ní a t čas.

---

[1]) Doslova: vrbová píšťalka. Překládám však raději „flétnička“, protože zobrazený nástroj vypadá spíš jako dlouhá příčná flétna nežli krátká podélná píšťalka, kterou u nás otloukali hoši. *Pozn. překl.*

Obr. 2. Notový zápis *Willov Dance* (Tanec pro flétničku), jak jej na flétničku hraje Hans Brimi.

Jednorozměrná vlnová rovnice

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

dává dobrý model pro chování molekul vzduchu v trubici; c je kladné číslo — rychlost vlny. Protože jsou oba konce trubice otevřené, je na nich tlak stejný jako vnější atmosférický tlak a přetlak u je roven nule. Značíme-li tedy L délku trubice, je $u(0,t) = 0$ a $u(L,t) = 0$. Řešením vlnové rovnice je lineární kombinace funkcí tvaru

$$u(x,t) = \sin \frac{n\pi x}{L} \left(a \sin \frac{n\pi ct}{L} + b \cos \frac{n\pi ct}{L} \right),$$

kde $n = 1, 2, 3 \ldots$ a a, b jsou konstanty. Odvození této rovnice najdete ve většině učebnic diferenciálních rovnic, např. [7].

Jak předpovídá naše řešení možné kmitočty tónů hraných flétnou? Uvažujme prozatím řešení obsahující jedinou hodnotu n. Ponechme x a n pevná a měňme t. Tlak se mění periodicky s periodou $2L/cn$. Proto je

$$\text{kmitočet} = \frac{cn}{2L}$$

pro $n = 1, 2, 3, \ldots$.

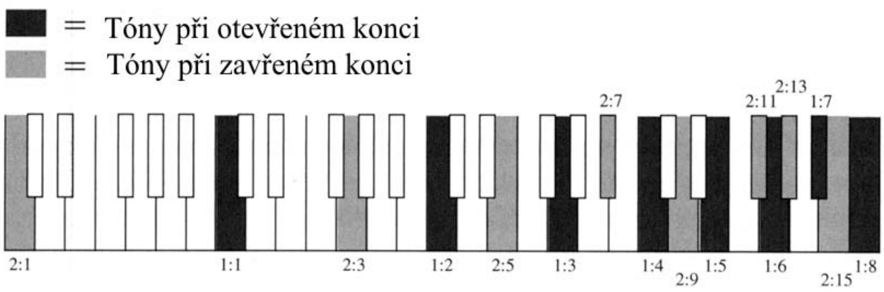
Tento vzorec naznačuje, že je dvojí způsob, jak hrát na flétničku různé tóny: buď měnit délku L, nebo měnit n (u smyčcových nástrojů, které se také řídí jednorozměrnou vlnovou rovnicí, máme tři způsoby, protože můžeme také měnit rychlost c tím, že měníme napětí struny — např. jejím natahováním — nebo tím, že ji nahradíme strunou jiné hustoty, např. opředenou měděným drátkem). Spojitou změnou L, jako na pozounu nebo při pískání, dosáhneme spojité změny výšky tónu. Obvyklejší způsob, jak měnit L, je použít trubici s otvory, čímž umožníme diskrétní změny výšky. Jiná cesta pro změnu výšky je změnit n — to jest přeskakovat mezi řešeními vlnové rovnice. Tóny, které získáme změnou n, nazýváme vyšší harmonické. Tón s kmitočtem $cn/2L$ nazýváme n-tou harmonickou; pro $n = 1$ mluvíme o základní neboli první harmonické. Také se užívá názvu tóny alikvótní, částkové apod.

Posloupnost poměrů kmitočtů základního tónu k vyšším harmonickým je $1:1$, $1:2$, $1:3$, $1:4$, … (vzpomeňme si na název „harmonická řada“ pro řadu $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$). Je-li základní tón c^1, pak následujících pět harmonických je c^2, g^2, c^3, e^3, g^3, kde čísla nahoře značí vždy další vyšší oktávu. Čtvrtá, pátá a šestá harmonická tvoří *durový kvintakord*, jeden ze základních stavebních kamenů západní hudby. Přesto však toto řešení ještě nevysvětluje plně flétničku.

Podívejme se zevrubněji na pravou ruku hráče na flétničku (obr. 1). Svými prsty může uzavřít nebo nechat otevřený otvor na konci flétny: může na tomto konci změnit okrajovou podmínku. Na uzavřeném konci se ve směru x tlak plynu nemění, takže okrajová podmínka pro přetlak u zní $u(0,t) = 0$ a $u_x(L,t) = 0$. Jestliže tyto rovnice řešíme stejně jako výše, dostaneme řešení s kmitočty

$$\text{kmitočet} = \frac{cn}{4L}$$

pro $n = 1, 3, 5, 7, \ldots$. Protože původní hodnoty byly $cn/2L$, způsobil uzavřený konec snížení základního tónu o oktávu a vymizení všech sudých harmonických. Kombinacemi vyšších harmonických vznikajících při otevřeném a zavřeném konci dosáhneme ve třetí oktávě (vůči základnímu tónu flétničky) devítitónovou stupnici; nazývejme ji stupnicí *hratelnou* na flétničce. Obě množiny harmonických, při otevřeném i zavřeném konci, jsou spolu s odpovídajícími poměry kmitočtů ukázány na klávesnici klavíru na nejbližších klávesách (pokud by základní kmitočet flétničky odpovídal tónu C). Připomeňme, že klavír samozřejmě nebývá laděn podle stupnice flétničky!



Obr. 3. Přibližné polohy tónů flétničky na klávesnici klavíru.

Jak dalece je nezbytná druhá množina harmonických? Harmonické vznikající při otevřeném konci ve čtvrté oktávě od základního tónu vytvářejí tutéž stupnici jako kombinace stupnic otevřeného a zavřeného konce, jen o oktávu výše. Kdybychom se tedy nestarali o to, ve které oktávě hrajeme, mohli bychom dostat teoreticky tóny libovolně blízké *libovolné* stupnici, a to i beze změn okrajové podmínky. Ale takové řešení by nebylo praktické. Vyšší harmonické jsou našemu uchu méně příjemné a navíc se obtížněji ovládají. Aby mohl hráč zahrát rychlé noty ve *Willov Dance*, musí použít druhou množinu harmonických. Někteří hráči rozšiřují tuto techniku tím, že konec zakrývají jen zčásti, čímž vytvářejí mezilehlé tóny, anebo spojitě mění zakrytí a tím spojitě mění i výšku tónu flétničky.

Až dosud jsme uvažovali jen řešení vlnové rovnice ve tvaru

$$u(x,t) = \sin\frac{n\pi x}{L}\left(a\sin\frac{n\pi ct}{L} + b\cos\frac{n\pi ct}{L}\right).$$

Obecnější řešení získáme jako lineární kombinace těchto výrazů. Členy s nejmenšími hodnotami n mají obecně největší amplitudy $\sqrt{a^2 + b^2}$ a určují výšku a barvu tónu. Základní tón zpravidla převažuje a vnímáme ho jako výšku zvuku. Poměrné hlasitosti harmonických nám umožňují rozlišovat tóny zahrané různými hudebními nástroji. Tak například tón klarinetu obsahuje jen liché harmonické, stejně jako tón flétničky se zavřeným koncem. Ve fascinující Seathersově knize [25] se uvádí myšlenka, že západní hudba používá intervaly založené přesně na poměrech kmitočtů daných malými celými čísly proto, že zvuk dechových a smyčcových nástrojů je tvořen harmonickými. Když dva takové nástroje hrají tóny z téže stupnice, odpovídá si spolu mnoho jejich harmonických, což je našemu uchu příjemné.

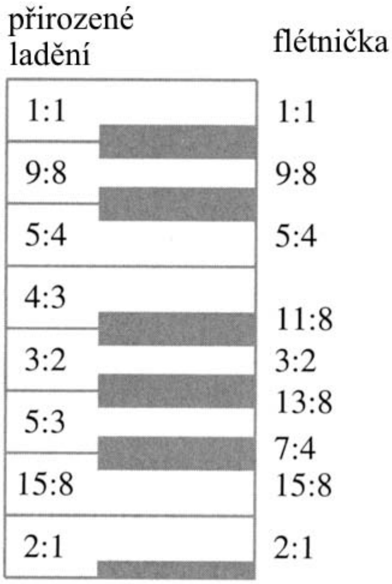
Abychom plně popsali zvukové vlastnosti hudebních nástrojů, musíme uvážit i nelineární jevy. Toto je stále živý předmět výzkumu; dobrý přehled nalezneme v [12].

3. Od melodie k harmonii: klávesové nástroje

V tomto odstavci nám flétnička poslouží jako výchozí bod pro výklad, jak vytvořit stupnici. Tóny hratelné na flétničce se odvolávají na matematiku, protože každý poměr kmitočtů mezi nimi můžeme vyjádřit poměrem malých celých čísel. Protože hudba hraná obvykle na flétničku je výlučně melodická a je v tónině základního tónu flétničky, nezajímá nás příliš, jak spolu tóny ve stupnici navzájem souvisejí. Jakmile bychom však chtěli použít tento systém pro navržení klávesnice, nastanou problémy. Například bychom chtěli, aby se poměry $4:5:6$ kmitočtů tónů durového kvintakordu opakovaly na různých místech naší klávesnice, a samozřejmě také aby náš nástroj „dobře zněl“ v různých tóninách. Ukazuje se, že tyto podmínky nejsou splnitelné současně. Historie pokusů o řešení tohoto rozporu nám ukazuje jeden z nejzajímavějších styčných bodů matematiky a estetiky.

Přirozená ladění. Začněme s poměry kmitočtů tónů ze stupnice devíti hratelných tónů na flétničce vůči prvnímu tónu příslušné oktávy (obr. 4). Jsou spočteny vydělením poměru kmitočtu příslušného tónu k základnímu tónu flétničky poměrem kmitočtu prvního tónu oktávy $(8:1)$ k témuž základnímu tónu a poté případným vykrácením. Všimněte si, že posloupnost poměrů před vykrácením začíná $8:8$, $9:8$, $10:8$, $\ldots$

Durový kvintakord je tvořen třemi tóny s poměrem kmitočtů $4:5:6$ (podle potřeby přidejte či uberte v jiné poloze oktávu). Vidíme, že flétnička má mezi hratelnými tóny dva durové kvintakordy: akord tvořený prvním, třetím a pátým tónem stupnice (zvaný tónika, zkratka T) a akord tvořený pátým, sedmým a druhým tónem (dominanta, D). *Přirozené ladění* je založeno na osmitónové stupnici, kterou můžeme rozložit do tří durových kvintakordů, T, D a subdominanty S, tvořené čtvrtým, šestým a osmým tónem přirozeně laděné stupnice. Mezi 15. a 18. stoletím bylo navrženo mnoho různých přirozených ladění, lišících se tím, jak vytvářejí zbývající tóny chromatické stupnice (tzv. alterované tóny), [3], [5]. Historii různých takových systémů s praktickými návody pro jejich používání spolu s diskusí Mersennovy práce v této problematice najdete v [16].



Obr. 4. Porovnání stupnic přirozeného ladění a flétničky.

Přirozené ladění má některé problémy. Jeden z nejkřiklavějších je poměr kmitočtů šestého a druhého stupně, který je 40 : 27, a nikoli 3 : 2. V přirozeném ladění může mít táž nota různou výšku v různých stupnicích. Například poměr výšek tónů A : G je 10 : 9 ve stupnici C-dur, ale 9 : 8 v G-dur. Hráč na smyčcový nebo dechový nástroj může při hře tyto malé rozdíly dodržet, ale pro nástroje s pevnými tóny je potřeba vytvořit vhodná pravidla. Byly navrženy různé kompromisy včetně *temperovaného ladění*, které dolaďuje i tóny přirozeného ladění. Jiné řešení pro klávesové nástroje jsou dodatečné klávesy nebo použití speciálního pedálu či páky k doladění některých tónů. Bylo vyvinuto mnoho vynalézavých systémů, jak převést tyto myšlenky do praxe. Jeden z nejranějších je na varhanách sv. Martina (Lucca), který má samostatné klávesy pro Es a Dis. Tanakovo „enharmonium“ dělí oktávu do 312 tónů [3]. Jeden z několika mála takových nástrojů, které se nyní užívají, je anglická „concertina“ — šestihranná chromatická harmonika, mající samostatné knoflíky jednak pro Es a Dis, jednak pro As a Gis. Přesto většina moderních hráčů na concertinu se kloní k temperovanému ladění.

Pythagorejské ladění. V předchozím textu jsme se setkali s intervaly tvořenými násobky základního kmitočtu racionálním číslem. Pythagoras objevil, že poměr 2 : 1 pro oktávu a 3 : 2 pro kvintu jsou zvláště libozvučné a použil je jako základ pro stupnici. V jeho konstrukci odpadá problém některých rozladěných kvint v přirozeném ladění. Vychází ze základního tónu a jeho frekvenci opakovaně násobí $\frac{3}{2}$, čímž získává další tóny pro stupnici. Dva tóny lišící se oktávou představují tentýž stupeň ve stupnici. Jestliže tedy násobením frekvence f číslem $\frac{3}{2}$ překročíme nad rámec oktávy $(2f_0)$ od výchozího tónu f_0 — tedy je-li $f' = \frac{3}{2}f > 2f_0$ — pak tón f' snížíme o oktávu $(f'' = f'/2)$, čímž se vrátíme do původního rozsahu oktávy f_0 až $2f_0$.

Je výhodné pracovat nikoli přímo s kmitočty, ale s jejich logaritmy o základu 2. Tón s frekvencí 1 by měl v logaritmické stupnici logaritmický kmitočet o hodnotě $\log_2 1 = 0$ a tón o oktávu vyšší bude mít logaritmický kmitočet 1, protože $2^1 = 2$, a tedy $\log_2 = 1$. Označíme-li $x = \log_2 f$, pak s užitím logaritmu o základu 2 dostáváme

$$x \to x + \log_2 \tfrac{3}{2}$$

jako zobrazení převádějící tón na jeho kvintu v logaritmických jednotkách. Protože dělení dvěma odpovídá v této logaritmické stupnici odečtení 1 a protože odčítáme 1, jenom když $x + \log_2 \frac{3}{2} > 1$, obdržíme následující zobrazení do intervalu [0,1]:

$$x \to x + \log_2 \tfrac{3}{2} > 1 \pmod 1.$$

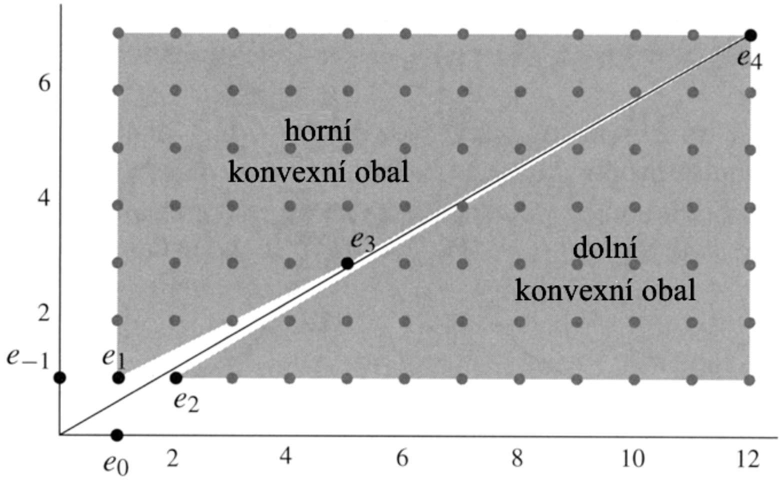
Jestliže úsečku o krajních bodech $[0, 1]$ stočíme do kružnice, můžeme toto zobrazení popsat jako rotaci kružnice o iracionální úhel. Je známo, že se při ní počáteční bod nikdy nevrátí do své výchozí polohy, ale jeho obrazy postupně hustě vyplní celou kružnici [11]. Proto se kvintovými kroky nahoru (a oktávovými dolů) nikdy nemůžeme vrátit přesně do výchozího kmitočtu. To má nešťastné důsledky pro konstrukci stupnice, jak zjistil Pythagoras. Tento problém je zvláště zřejmý na nástrojích s pevnou výškou tónu.

Temperované ladění. Temperované ladění nahrazuje iracionální úhel rotace kružnice racionálním (v celých otáčkách, resp. ve stupních). Předvedeme jednoduchou geometrickou interpretaci tohoto postupu. Graf přímky $y = \mu x$ protíná svislice $x = q$, kde q je kladné celé číslo, v bodech o $y = \mu q$. Desetinná část tohoto čísla je právě q-tá iterace nuly při rotaci podle zobrazení $x \to x + \mu \pmod 1$.

Je-li μ iracionální, pak tato přímka nikdy neprojde žádným uzlovým bodem mříže $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, a proto rotace o iracionální úhel netvoří žádnou periodickou posloupnost. Přímka procházející některým mřížovým bodem (q, p) ležícím poblíž přímky $y = \mu x$ popisuje rotaci podle zobrazení $x \to x + p/q \pmod 1$, která aproximuje rotaci $x \to x + \mu \pmod 1$. Je-li zlomek p/q v základním tvaru, má pohyb každého bodu periodu q a zobrazení bodů jsou rovnoměrně rozložena podél kruhu. To je tedy cesta, kterou můžeme rozdělit oktávu na q stejných dílů. Takto sestrojené stupnice se nazývají *rovnoměrně temperované.*[2])

Podáme geometrickou konstrukci, jak najít posloupnost bodů $(q, p) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, která se blíží řešení rovnice $y = \mu x$. Rozbor provedeme podle Kleinovy konstrukce v [1]. Představme si nit vedoucí z nekonečna do počátku souřadnic podél přímky $y = \mu x$. V každém bodě celočíselné mříže nechť je hřebík. Jestliže volný konec nitě vychýlíme z počátku souřadnic nahoru nebo dolů, dotkne se hřebíků, které jsou nejbližší přímce $y = \mu x$. Oblast zdola vymezená nití vychýlenou nahoru je konvexním obalem

[2]) Často i bez určení „rovnoměrně". Nerovnoměrně temperovaná ladění dělí rovnoměrně jiný interval, např. čistou velkou tercii + 2 oktávy c^1–e^3 na pět přibližných kvint c^1–g^1–d^2–a^2–e^3. *Pozn. překl.*



Obr. 5. Aproximace přímky $y = (\log_2 \frac{3}{2})x$.

celočíselných bodů ležících nad přímkou $y = \mu x$, podobně oblast shora vymezená nití vychýlenou dolů je konvexním obalem celočíselných bodů ležících pod přímkou $y = \mu x$.

Je-li např. $\mu = \log_2 \frac{3}{2}$, dotkne se nit při vychýlení nahoru bodů $(1,1)$, $(5,3)$, $(41,24)$, $(306,179), \ldots$, při vychýlení dolů bodů $(2,1)$, $(12,7)$, $(53,31), \ldots$, jak je vidět z obr. 5, kde nit tvoří hranice šedých ploch. Výraz $\mu = \log_2 \frac{3}{2}$ je proto dobře aproximován posloupností $1, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{7}{12}, \frac{24}{41}, \frac{31}{53}, \frac{179}{306}, \ldots$

Pojem „dobré aproximace“ můžeme upřesnit. Uvažujme následující konstrukci: budiž $e_{-1} = (0,1)$ a $e_0 = (1,0)$. Je-li známo e_{k-1} a e_k, pak polohový vektor bodu e_{k+1} získáme tak, že k vektoru e_{k-1} přičítáme vektor e_k tolikrát, abychom právě nepřekročili přímku $y = \mu x$.

Lemma 1. *Orientovaná plocha rovnoběžníku vymezeného vektory e_{k-1} a e_k je rovna $(-1)^k$.*

Důkaz: Každý následující rovnoběžník má stejnou základnu i výšku jako předcházející. □

Věta 1. *Body e_k, $k > 0$, jsou vrcholy horní a dolní oblasti.*

Důkaz: Kdyby body e_{k-1} a e_k neležely na hranici oblastí, pak by rovnoběžník vymezený vektory e_{k-1} a e_k musel obsahovat bod množiny $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Podle Pickova teorému [26] by však takový rovnoběžník měl obsah větší než 1, ve sporu s lemmatem 1. □

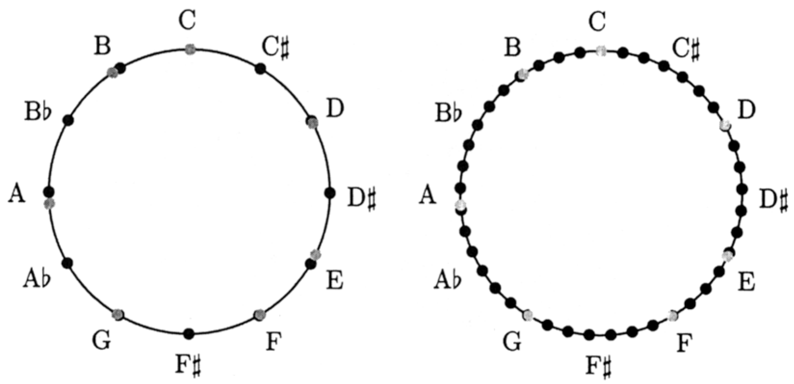
Další věta [1] říká:

Věta 2. *Jsou-li q_k a p_k souřadnice bodu e_k, pak pro $k > 0$ platí*

$$\left| \mu - \frac{p_k}{q_k} \right| = \frac{1}{q_k^2}\,.$$

Tato věta říká, že čísla získaná geometrickou konstrukcí jsou částečnými výsledky řetězového zlomku pro číslo μ a v tomto smyslu jsou jeho nejlepším přiblížením. Podrobná diskuse řetězových zlomků je např. ve [14] a její aplikace v hudbě v [2]. Všimněme si zejména, že $\mu = \log_2 \frac{3}{2}$ je transcendentní číslo, čitatel i jmenovatel částečných zlomků rychle roste a aproximace tedy rychle konverguje.

Při výběru vhodné aproximace pro základ stupnice musíme pamatovat na různé věci. Perioda racionálních rotací je dána jmenovatelem q zlomku p/q. Velký jmenovatel by znamenal stupnici s mnoha tóny. To by nebylo praktické, jednak kvůli fyzikálním podmínkám v nástroji, jednak člověk není schopen rozlišovat tóny s příliš blízkou výškou.



Obr. 6. Kruh rozdělený na 12 a 41 stejných částí.

Těmto okolnostem alespoň částečně vděčíme za to, že aproximace $\log_2 \frac{3}{2} \approx \frac{7}{12}$ se používá jako základ v západní hudbě. Obr. 6 ukazuje, jak rovnoměrně jsou rozděleny tóny získané rozdělením oktávy na 12 a na 41 částí (což je nejbližší další aproximace). Šedé tečky zobrazují tóny přirozeného ladění. Je to celkem šťastná náhoda, protože v našem postupu jsme ani neuvažovali o možnosti aproximovat zlomek 5 : 4, popisující velkou tercii. Zůstává stále předmětem diskuse, zda výhody této konstrukce vyvažují cenu, kterou platíme za „nečistotu“ všech intervalů. Na stránkách `www.sju.edu/~rhall/newton` najdete aplikaci programu *Mathematica*, využívající této konstrukce.

Jsou i jiné cesty, jak vytvořit temperovanou stupnici. Mohli bychom se pokusit najít racionální čísla se stejnými jmenovateli, která by dobře aproximovala jak kvintu, tak i velkou tercii. Jim příslušné rotace by dělily kruh na stejné části. Tento postup vede k teorii vícerozměrných řetězových zlomků, které jsou stále předmětem rozsáhlého výzkumu, viz [2] nebo [18]. V minulosti bylo prozkoumáno mnoho temperovaných ladění, od sedmnáctitónové arabské stupnice po osmdesátisedmitónovou, kterou oceňoval Bosanquet. Easley Blackwood [6] složil skladby pro každou z rovnoměrně temperovaných stupnic obsahujících 13 až 24 tónů. J. M. Barbour [3] a D. Benson [5] podávají vynikající historický přehled této látky. Čtenáře také zveme k porovnání základů různých dělení s použitím systému *Mathematica* pomocí programu na webové stránce autorů.

Stupnice s 12 rovnoměrně temperovanými tóny vede k další zajímavé otázce. Vzdálenost mezi pražci na rovnoměrně temperovaném strunném nástroji, jako je kytara nebo loutna, je škálována v poměru $2^{1/12} : 1$. Protože platí $2^{1/12} = (2^{1/3})^{1/4}$, je tento problém ekvivalentní klasickému problému zdvojení krychle, který nelze vyřešit kružítkem a pravítkem. Konstrukce tohoto poměru metodami měření dostupnými v 16. a 17. století byla obtížným problémem a nalezení aproximace bylo podstatným přínosem. Řada různých přístupů, včetně důmyslné konstrukce navržené otcem Galilea Galileiho a Stählem, je rozebrána v [4].

4. Bubny a jiné vícerozměrné nástroje

Až doposud jsme uvažovali pouze nástroje, které byly v principu jednorozměrné. Patří sem všechny strunné a dechové nástroje, nikoli však bicí, jako jsou bubny a zvony. Proč? Uvažujme buben s kruhovou blánou jako kruhovou oblastí o poloměru R kolem počátku v $\mathbb{R}^2$, kde platí vlnová rovnice s pevnými okrajovými podmínkami. Separací proměnných v polárních souřadnicích (r, φ) můžeme ukázat, že příčná výchylka blány je v čase t dána jako $F(r, \varphi, t) = g(t) f_1(r) f_2(\varphi)$, kde

$$g''(t) + d^2 \lambda g(t) = 0, \qquad f_2''(\varphi) + \mu f_2(\varphi) = 0, \tag{1}$$

$$f_1''(r) + \frac{1}{r} f_1'(r) + \left(\lambda - \frac{\mu}{r^2}\right) f_2(r) = 0. \tag{2}$$

Konstanta d závisí na fyzikálních vlastnostech materiálu a λ, μ jsou určeny okrajovými podmínkami $f_2(-\pi) = f_2(\pi)$ a $f_1(R) = 0$; podrobnosti viz [20].

Rovnice pro g a f_2 lze řešit snadno. Z podmínek pro f_2 plyne $\mu = m^2$, takže (2) je právě m-tá Besselova rovnice a její řešení jsou dána pomocí m-té Besselovy funkce jako $f_1(r) = \mathrm{J}_m(r\sqrt{\lambda})$. Protože je blána upevněna podél svého obvodu, je $f_1(R) = \mathrm{J}_m(R\sqrt{\lambda}) = 0$, a tedy λ může nabývat jen hodnot

$$\lambda_n = \left(\frac{x_n^{(m)}}{R}\right)^2, \tag{3}$$

kde $x_n^{(m)}$ jsou nulové body m-té Besselovy rovnice. Rozdílné hodnoty λ určují kmitočty kmitů různých modů jako u flétničky. Protože nulové body mají iracionální souřadnice, je zřejmé, že kmitočty vlastních kmitů blány bubnu nejsou navzájem racionálními násobky. Proto také buben se svou volně kmitající blánou a jednorozměrné nástroje vydávají zvuky, které mají zřetelně jiný tonální charakter.

Nástroj, který do tohoto schématu nezapadá, je tympán. Jeho blána je dvojrozměrná, a přesto je jeho zvuk blízký zvuku jednorozměrných zdrojů. Na rozdíl od tamburíny má tympán uzavřené dno a kmity jeho blány mění tlak v dutině pod kmitající membránou. Ta proto není volně kmitající soustavou, a aby ji vlnová rovnice popisovala věrně, musíme k ní doplnit dodatečné nelineární členy vtištěné síly. Při pečlivém vyladění blány vůči míse pod ní lze dosáhnout kmitočty několika málo prvních modů v poměru 2 : 3 : 4 : 5, viz [10].

Nemusíme se pochopitelně omezovat na kruhové bubny. Můžeme uvažovat vlnovou rovnici na obecné oblasti D v $\mathbb{R}^2$ a hledat řešení splňující okrajovou podmínku $F(x,y,t)=0$ na hranici ∂D. Separací proměnných $F(x,y,t)=\Psi(\sqrt{\lambda}\,t)\cdot\Phi(x,y)$ zjistíme, že obecné řešení má tvar $F(x,y,t)=\sin(\sqrt{\lambda}\,t)\cdot\Phi(x,y)$, kde

$$\nabla^2\Phi+\lambda\Phi=0 \quad \text{na } D \quad \text{a} \quad \Phi=0 \quad \text{na } \partial D.$$

Jak jsme již viděli, tato rovnice má řešení jen pro některá λ; ta nazýváme *vlastní hodnoty* úlohy. Vlastní hodnoty závisejí na tvaru bubnu D a jsou rovny druhým mocninám kmitočtů kmitů různých modů.

Ve svém krásném článku *Can one hear the shape of a drum?* (*Můžeme slyšet tvar bubnu?*) klade M. Kac otázku, zda dva bubny s týmiž kmitočty musí mít nutně stejný tvar [17]. Kac dokázal, že některé charakteristiky oblasti, jako obsah její plochy a délka obvodu, jsou opravdu určeny vlastními hodnotami úlohy. Problém v obecnosti však zůstal nevyřešen ještě 24 let, dokud Gordon se svými spolupracovníky neukázal, že dva navzájem nepodobné bubny mohou mít tytéž vlastní hodnoty [13]. Explicitní konstrukci takových bubnů viz v [9].

Stále nám však zbývá ještě jeden rozměr: můžeme popsat i zvuk trojrozměrných nástrojů? Všechny[3]) trojrozměrné nástroje patří mezi bicí. Napíšeme-li vlnovou rovnici pro některá jednoduchá tělesa, např. pro tyč, zjistíme, že kmitočty různých modů kmitů nejsou spolu v racionálních poměrech. Nástroje tohoto typu nejsou v západní hudbě příliš běžné. Seathers [25] ukazuje, že stupnice používané v indonéském gamelanu mají vztah ke spektru nástrojů gamelanu, jejichž tóny nejsou racionálními násobky základního tónu. Přesto jsou i trojrozměrné hudební nástroje se zvukem podobným zvuku jednorozměrných nástrojů: marimba, zvonkohra, zvony a jiné. Jsou různé možnosti, jak toho dosáhnout. Některé trojrozměrné předměty, jako např. tyče, kmitají převážně v jednom rozměru. Naproti tomu tyče marimby pro nižší tóny mají na jedné straně hluboké oblouky. Ty jsou vyřezány tak, že první dva mody kmitů mají racionální poměr. Protože vyšší tóny jsou již v oblasti nad 2000 Hz, nejsou tak důležité pro určení zvuku tyčí. Výborné popisy bicích nástrojů jsou v Rossingových pracích [22], [23], [24] (populární výklad) a ve [12] (spolu s Fletcherem).

Poděkování. Děkujeme všem, kteří nám pomohli; byli to Paul Klingsberg a Bill Seathers svými poznámkami, Ola Kai Ledang poskytnutím fotografií a David Loberg Code informacemi o flétničce.

[3]) V celém článku jde jen o popis „v první aproximaci“. Kvalita houslí je samozřejmě dána nejen (jednorozměrnou) strunou, ale i (trojrozměrným) tělem houslí, tón flétny je sice určen hlavně délkou kmitajícího sloupce vzduchu, ale vliv má i její průřez, materiál stěn apod. Pro okarínu s její vejčitou dutinou by vůbec nešlo vytvořit jednorozměrný model. *Pozn. překl.*

Literatura

[1] Arnol'd, V. I.: *Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations* (2^{nd} ed.). Springer-Verlag, New York 1988. Z ruštiny přeložil József M. Szücs.

[2] Barbour, J. M.: *Music and ternary continued fractions.* Amer. Math. Monthly *55* (1948), 545–555.

[3] Barbour, J. M.: *Tuning and Temperament.* Michigan State College Press, East Lansing 1953.

[4] Barbour, J. M.: *A geometrical approximation to the roots of numbers.* Amer. Math. Monthly *64* (1957), 1–9.

[5] Benson, D.: *Mathematics and Music.* V tisku, dosažitelné na `ftp://byrd.math.uga.edu/pub/html/index.html` (2000).

[6] Blackwood, E.: *Microtonal Etudes.* Cedille Records. CDR 90000 018.

[7] Boyce, W. E., DiPrima, R. C.: *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems* (4^{nd} ed.). John Wiley & Sons, Inc., New York 1986.

[8] Brimi, H.: „Willow Dance, 1994," *in The Sweet Sunny North.* Shanachie Records 64057.

[9] Chapman, S. J.: *Drums that sound the same.* Amer. Math. Monthly *102* (1955), 124 až 138.

[10] Ctuistian, R. S., Davis, R. E., Tubis, A., Anderson, C. A., Mills, R. I., Rossing, T. D.: *Effect of Air Loading on Timpani Membrane Vibrations.* J. Acoust. Soc. Am. *76* (1984), 1336–1345.

[11] Devaney, R. L.: *An introduction to chaotic dynamical systems* (2^{nd} ed.). Addison--Wesley Publishing Company Advanced Book Program, Redwood City, CA 1989.

[12] Fletcher, N. H., Rossing, T. D.: *The physics of musical instruments* (2^{nd} ed.). Springer-Verlag, New York 1998.

[13] Gordon, C., Webb, D. L., Wolpert, S.: *One cannot hear the shape of a drum.* Bull. Amer. Math. Soc. *27* (1992), 134–138.

[14] Hardy, G. H., Wright, E. M.: *An Introduction to the Theory of Numbers* (5^{nd} ed.). Oxford University Press, Oxford 1980.

[15] v. Helmholtz, H.: *On thc sensations of tone as a physiological basis for the theory of music.* Dover Publications, New York 1954. Originally published 1870, English translation by A. J. Ellis, 1875.

[16] Jorgensen, O.: *Tuning.* Michigan State University Press, East Lansing 1991.

[17] Kac, M.: *Can one hear the shape of a drum?* Amer. Math. Monthly *73* (1966), 1–23.

[18] Kent, J. T.: *Ternary continued fractions and the evenly-tempeted musical scale.* CWI Newsletter *13* (1986), 21–33.

[19] Mersenne, M.: *Harmonie universelle, contenant la théorie et la pratique de la musique.* Centre national de la recherche stientifique, Paris, facsimile edition 1963. Původně vydáno v r. 1636.

[20] Pinsky, M. A.: *Partial differential equations and boundary value problems with applications* (2^{nd} ed.). McGraw-Hill Inc., New York 1991.

[21] Rayleigh, J. W. S.: *The theory of sound* (2^{nd} ed.). Dover Books, New York 1945. Původně vydáno v r. 1877.

[22] Rossing, T. D.: *Acoustics of Percussion Instruments—part i.* Phys. Teach. *14* (1976) 546–556.

[23] Rossing, T. D.: *Acoustics of Percussion Instruments—part ii.* Phys. Teach. *15* (1977), 278–288.

[24] Rossing, T. D.: *The science of sound* (2^{nd} ed.) Addison-Wesley, New York 1990.

[25] Sethares, W. A.: *Tuning, timbre, spectrum, scale.* Springer-Verlag, New York 1999.

[26] Varberg, D. E.: *Pick's theorem revisited.* Amer. Math. Monthly *92* (1985) 584–587.

Rachel W. Hall je docentkou matematiky na St. Joseph's University ve Filadelfii. Obdržela B. A. v klasické řečtině a Ph. D. v matematice na Pensylvánské státní univerzitě v r. 1999. Zabývá se operátorovými algebrami. Věnuje se také aktivně lidové hudbě a hraje na anglickou concertinu a klavír s triem Simple Gifts. Jejich v r. 1999 komisí oceněné album *Time and Again* získalo mezinárodní ohlas. V r. 1991 obdržela Watsonovo stipendium pro studium tradiční taneční hudby v Norsku; tam se poprvé setkala s flétničkou.

Krešimir Josić je hostující docent matematiky na Bostonské univerzitě. Obdržel B. Sc. z fyziky a matematiky na University of Texas v Austinu v r. 1994 a Ph. D. z matematiky na Pensylvánské státní univerzitě v r. 1999. Zabývá se zejména aplikacemi teorie dynamických systémů. Hraje také na jazzovou basu.

Sonda NEAR u planetky Eros

Ivo Míček

Do dějin kosmonautiky bylo díky sondě NEAR/Shoemaker provedeno několik dalších významných zápisů — Laboratoř aplikované fyziky John Hopkins University a NASA realizovaly poprvé v historii sondu, která se úspěšně dostala do těsné blízkosti planetek 253 Mathilde a 433 Eros. Vyvrcholením mise bylo úspěšné přistání na planetce Eros (raději bychom měli říkat dosednutí — s tímto projekt sondy původně vůbec nepočítal).

Zrekapitulujme si základní údaje — planetka 433 Eros ($33 \times 13 \times 13$ km) spadá do kategorie blízkozemních, která neprotíná dráhu Země. Objevena byla 13. 8. 1898 Gustavem Wittem (Urania Berlín) a Augustem H. P. Charloisem z Nice nezávisle na sobě. Doba oběhu představuje 1,76 roku, sklon k ekliptice činí 10,8 stupně, vzdálenosti v perihelu 1,13 AU a v afeliu 1,78 AU, střední vzdálenost od Slunce 1,46 AU (218 mil. km), tíhové zrychlení představuje přibližně 1/1000 pozemského. Stáří planetky se odhaduje na 4 miliardy let.

Vědecké cíle mise spočívaly v upřesnění dalších možných vzájemných vazeb mezi planetkami, kometami a meteority a na to navazujícím pochopení procesu formování a vývoje planet. Hlavní cíle lze shrnout do následujících bodů:

Ivo Míček (1964), absolvent gymnázia ve Strážnici, školení v oblasti IT v České republice a v zahraničí, dnes konzultant ve firmě Gradua-CEGOS, s. r. o., člen SMPH a ČAS, e-mail: imicek@gradna.cz

Podle materiálů a se svolením J. Hopkins University, http://near.jhuapl.edu