Alena Šolcová

D'Artagnan mezi matematiky - pocta Pierru Fermatovi k 400. výročí narození

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 46 (2001), No. 4, 286--298

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/141095`

Fyzikové samozřejmě nejsou dokonalí tak, jak by mohli být. Bezpochyby občas promrhali peníze na výzkumy sporného významu nebo i na zajímavé výzkumy vedené nerozumným způsobem. Zajisté lze hodně diskutovat o způsobech, jakými je výzkum řízen a jak se může organizace výzkumu zlepšit. To jsou však otázky do jiné diskuse.

Domnívám se nicméně, při svém dobrém vědomí a svědomí, že bilance fyziky je pozitivní. Říkám výslovně bilance fyziky a nikoli bilance způsobů, často protismyslných, jakými společnost využívá fyzikální objevy. Domnívám se rovněž, že fyzikové se svému poslání nezpronevěřili, a dokud budou provádět dobrý fyzikální výzkum, potud budou moci mít dobré a klidné svědomí.

D'Artagnan mezi matematiky

— pocta Pierru Fermatovi k 400. výročí narození

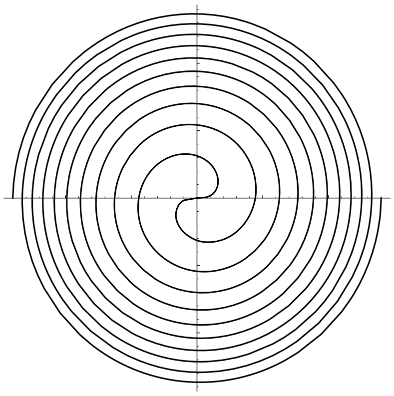
Alena Šolcová, Praha

Monsieur de Fermat est un Gascon, moi pas.
René Descartes

Francouzský matematik Pierre de Fermat (1601–1665) se proslavil zejména díky svým objevům a hypotézám v teorii čísel: Malé Fermatově větě, Velké Fermatově větě, Fermatovým číslům, Fermatově metodě faktorizace, Fermatově metodě nekonečného sestupu atd. Patří mezi matematické virtuózy sedmnáctého století. Teorie čísel byla jeho skutečná láska. Dosáhl v ní prvních významných výsledků od klasických časů. Jeho jméno je také spojeno s prehistorií diferenciálního a integrálního počtu. Odvodil postup hledání tečen ke křivkám. Jeho práce *Ad locus planos et solidos isagoge* předběhla Descartovy úvahy o analytické geometrii a dovolila mu definovat tak důležité křivky, jako jsou elipsa, hyperbola, parabola, kubická křivka, cykloida, a také Fermatovu spirálu (viz obr. 1).

Později se věnoval s Blaisem Pascalem základům teorie pravděpodobnosti. V optice je známý jako objevitel slavného Fermatova principu. Čtenáři Pokroků mohou najít podrobnější pojednání o problémech, kterými se Fermat zabýval, např. v článcích [6], [9], [16] a v knihách [10], [12], [14].

RNDr. Alena Šolcová (1950), katedra matematiky FSV ČVUT, Thákurova 7, 166 29 Praha 6, e-mail: solcova@mbox.cesnet.cz



Obr. 1. Fermatova spirála $r^2 = \theta$ v polárních souřadnicích.

Stručně o Fermatově životě

Pierre de Fermat se narodil v rodině prosperujícího obchodníka s kožešinami v Beaumont de Lomagne nedaleko Toulouse. Prameny uvádějí různá léta jeho narození mezi roky 1590–1608 (viz [1]). Pravděpodobně byl pokřtěn 20. srpna 1601. Měl bratra a dvě sestry. Počáteční vzdělání získal ve svém rodném domě. První škola, kterou navštěvoval, byla v místním františkánském klášteře. Později studoval právo pravděpodobně v Toulouse. Podle dopisu Gillesovi Robervalovi[1]) z 22. září 1636 byl Fermat ovlivněn matematickými pracemi Françoise Vièty během svého pobytu v Bordeaux v roce 1629. Kromě mateřského jazyka — francouzštiny — ovládal několik dalších: latinu, řečtinu, španělštinu a italštinu. Prvního května roku 1631 se stal bakalářem práva v Orléansu. Pak získal postavení rady v místním parlamentu v Toulouse. Svému jménu Pierre Fermat opatřil šlechtický přídomek a změnil je na Pierre de Fermat.

Fermatovým povoláním, v přesném smyslu slova, bylo právo. Matematika pro něj znamenala jen zábavu a rozptýlení. Většina Fermatových výsledků byla nalezena jako poznámky na okrajích knih, které četl. Některé z jeho myšlenek se zachovaly v dopisech jeho přátelům. Ze svých objevů se radoval, netoužil po prestiži a slávě, proto za svého života publikoval jen jediný rukopis pod tajemnými iniciálami M. P. E. A. S. Jejich význam zůstává nevysvětlen (viz [7], str. 13–34). Nejstarší Fermatův syn Clément-Samuel se ujal otcova duchovního dědictví a v letech 1670 a 1679 publikoval výběr z jeho matematických a přírodovědeckých úvah. Pierre cestoval málo, pravděpodobně nikdy nenavštívil Paříž. Zemřel 9. ledna 1665 v Castres a 12. ledna téhož roku byl pochován (viz [8], str. 13, 225). Toto datum je také uvedeno v augustiniánském kostele v Toulouse. Fermatův životní příběh lze nalézt v mnoha biografických pramenech (viz [5], [13]).

---

[1]) Gilles Personne Roberval (1602–1675). Ve 14 letech vzrostl jeho zájem o studium matematiky. Pak cestoval a navštívil mnoho míst ve Francii. Přitom uslyšel o Fermatovi a odebral se do Bordeaux, aby se s ním setkal a diskutoval s ním. Později, v roce 1634, získal v Královské koleji stolici matematiky po Petrovi Ramovi. Roberval byl zakládajícím členem Pařížské akademie.

Fermatova matematika, terminologie a symbolika

Matematika první poloviny sedmnáctého století nebyla jednotnou profesionální disciplínou. Byla rozdělena do různých „škol“. Fermat patřil ke „škole“ Françoise Vièty, jehož práce mu byly hlavním pramenem inspirace a ovlivňovaly Fermatovo bádání. Kromě dalšího používal Fermat Viètovu symboliku. Například výraz

$$x^3 + 13x^2 + 5x + 2$$

by zapsal takto:

$$1C + 13Q + 5N + 2.$$

Mocniny neznámých veličin vyjadřoval někdy slovy (např. x^3 — cubus). Porozumění jazyku původních pramenů umožňuje pohled do podstaty Fermatova matematického myšlení. Z našeho pohledu používali Fermat a Viète složitý a nešikovný systém matematických symbolů.

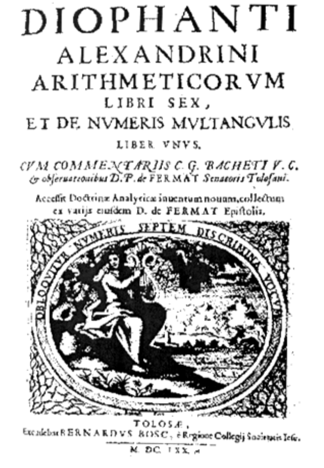
Když se Fermat zmiňoval o matematicích v obecném smyslu, užíval termín *geometrae* a o sobě mluvil jako o *analytikovi.* Profese matematika v dnešním smyslu byla tehdy označována různě — *geometr*, *Rechenmeister*, *wisconstler*, *cossista*, *algebraik.* Tyto různě pojmenované odborníky spojovalo jediné: měli za to, že rozhodně nejsou *matematici.* V šestnáctém a sedmnáctém století pojem *matematik* zůstával ve stejném významu jako ve středověku: znamenal povolání *astrologa* nebo *astronoma.*

Všichni již zmínění Fermatovi kolegové *geometři* používali matematické metody. Hledali vztah mezi řešením rovnic a geometrií a obecně vztah mezi matematickými metodami a přírodou. Hlavní témata, jimiž se zabývali, byla: řešení rovnic, popis křivek a jejich vlastností, trigonometrie, numerické metody, později diferenciální a integrální počet a jejich aplikace.

V roce 1621 vydal Claude Gaspard Bachet de Méziriac[2]) v Paříži řeckou a latinskou verzi *Diofantovy Aritmetiky.* Fermata zaujaly úlohy s dokonalými čísly, spřátelenými čísly, figurálními čísly, magickými čtverci, pythagorejskými čísly, dělitelností a hlavně s prvočísly. *Diofantova Aritmetika* se stala oblíbenou knihou mladého Fermata. Podněcovala ho k řešení různých číselně-teoretických problémů.

Dílo Bacheta de Méziriac bylo znovu publikováno s Fermatovými poznámkami v Toulouse v roce 1670 synem Clémentem-Samuelem de Fermat.

Tento svazek se jmenuje *Diophanti Alexandrini Arithmeticorum Libri Sex, … s komentáři C. G. Bacheta a pozorováním D. P. Fermata* (srovnej obr. 2).



Obr. 2. *Diofantova Aritmetika.*

[2]) C. G. Bachet de Méziriac (1591–1638) objevil metodu konstrukce magických čtverců. Též se mu připisuje prvenství v objevu řešení diofantických rovnic pomocí řetězových zlomků.

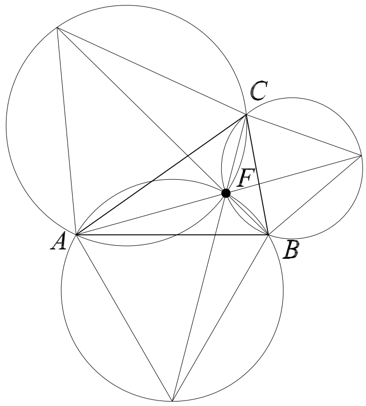
Druhý svazek, *Varia opera mathematica D. Petri de Fermat senatoris Tolosani . . .*, obsahující Fermatovu vědeckou korespondenci o matematických a fyzikálních problémech, byl vydán v roce 1679. Uveďme jednu z úloh — konstrukci tzv. *Fermatova bodu* jako příklad elementárních geometrických témat, jimž se Fermat věnoval:

Pro daný trojúhelník sestrojme bod, v němž je součet vzdáleností od všech tří vrcholů nejmenší.

Zde je ukázka Fermatova postupu konstrukce (viz obr. 3):

(1) Je dán trojúhelník ABC.
(2) Sestrojme ke každé jeho straně rovnostranný trojúhelník.
(3) Spojme vrcholy přímkami tak, jak je znázorněno na obrázku 3.
(4) Tyto tři přímky se protínají v jednom bodě, a to je hledaný bod F.

Někdy je též Fermatův bod nazýván podle E. Torricelliho (1608–1647), žáka Galileiho, *Torricelliho bod.*



Obr. 3. Konstrukce Fermatova bodu F v trojúhelníku ABC, pro který součet $|AF| + |BF| + |CF|$ dává minimální hodnotu.

Jiný pojem, kterému se Fermat věnoval, jsou polygonální (figurální) čísla. Byla již studována pythagorejci. Jsou to čísla tvaru $(\frac{1}{2}k - 1)n^2 - (\frac{1}{2}k - 2)n$ pro $k \geqq 3$ a $n \geqq 2$. Mohou být znázorněna pravidelnými mnohoúhelníky (viz např. [10], [17]). Pythagorejci převáděli geometrické ideje do teorie čísel. Jedno z nejzajímavějších tvrzení vyjádřil jako hypotézu Bachet (ve svém vydání Diofantových prací) v roce 1621:

Každé přirozené číslo je součtem nejvýše čtyř čtverců přirozených čísel.

Tato hypotéza byla později dokázána Josephem Louisem Lagrangem (1736–1813) v Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin *1* (1770), 123–133 (1772). Fermat vyslovil bez důkazu obecnější větu:

Každé přirozené číslo je součtem nejvýše n n-gonálních čísel.

Důkaz této Fermatovy domněnky byl jedním z hlavních objevů Augusta Louise Cauchyho (1789–1857) v roce 1812. Tvrzení o čtyřech čtvercích bylo kolem roku 1830 zahrnuto do Jacobiho teorie o theta funkcích[3]).

[3]) Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851), viz [17], str. 25–26, str. 235.

O řešení Pellovy rovnice

Diofantická rovnice $Dy^2 + 1 = x^2$, kde D není dělitelné čtvercem žádného přirozeného čísla většího než jedna, je známa jako Pellova rovnice, protože Leonhard Euler v 18. století mylně připisoval její řešení anglickému matematikovi Johnu Pellovi (1611–1685). Tento typ rovnice byl ale řešen již dříve indickými a řeckými matematiky (Brahmaguptou (kolem 600 n. l.), Theonem z Alexandrie (konec 4. stol. n. l.), a dokonce ještě dříve Archimédem (287–212 př. n. l.)). Brahmagupta byl pravděpodobně první matematik, který nalezl celočíselné řešení Pellovy rovnice. Jeho přístup byl důmyslný a obecný. Problém vznikl v Číně z potřeby určit dráhy planet.

Fermat se zabýval hledáním metod řešení Pellovy rovnice[4]). Pokusil se najít obecné pravidlo a vyzval v dopise v únoru 1657 svého přítele Frénicle de Bessy[5]) k řešení speciální rovnice (viz [4], sv. 2, str. 333–334) pro minimální hodnoty x a y:

$$61\,y^2 + 1 = x^2.$$

Poznamenejme, že Fermat vybral tento případ pro jeho obtížnost, protože nejmenší hodnoty, které splňují uvedenou rovnici, jsou

$$y = 226\,153\,980 \quad \text{a} \quad x = 1\,766\,319\,049.$$

Tento problém později obecně vyřešil až Lagrange. Jeho metoda vyžaduje výpočet složený z jednadvaceti postupných kroků využitím řetězových zlomků pro $\sqrt{61}$. Fermat vybízel své přátele k řešení ještě jiných speciálních případů, například $109\,y^2 + 1 = x^2$, který má minimální řešení

$$y = 15\,140\,424\,455\,100 \quad \text{a} \quad x = 158\,070\,671\,986\,249.$$

Velká Fermatova věta

Slavná poznámka na okraji Diofantovy *Aritmetiky* tvrdí, že rovnice $x^n + y^n = z^n$ pro $n > 2$ nemá žádná řešení v oboru přirozených čísel (srovnej obr. 4). Fermat ale nikdy nezveřejnil důkaz tohoto tvrzení pro libovolné $n \neq 4$.

Obr. 4. Česká známka vydaná při příležitosti Světového roku matematiky 2000.

[4]) V 18. století se v Praze věnoval řešení Pellovy rovnice také Steplingův žák, univerzitní profesor Jan Tesánek (1728–1788), zvaný „český Newton". Vyšetřoval závislost řešení rovnice $Dy^2 + 1 = x^2$ na změně konstanty D.

[5]) Bernard Frénicle de Bessy (1605–1675) byl vynikající amatérský matematik, který zastával úřad poradce mincovny. V roce 1666 byl zvolen do Královské akademie věd.

V angličtině, francouzštině a některých dalších jazycích se pro Velkou Fermatovu větu používá termín *Fermatova poslední věta — Fermat's Last Theorem.* Objevil se během první poloviny devatenáctého století (viz [11], str. 45–46). Gabriel Lamé mylně vysvětluje volbu termínu takto:

Ze všech tvrzení o číslech, která Fermat vyslovil, zbývá jen jedno, které nebylo úplně dokázáno[6]).

O nalezení důkazu se snažilo více matematiků, ovšem s výjimkou Carla Friedricha Gausse, který rozhodně neměl jeho hledání v úmyslu. V květnu 1816 napsal dopis Heinrichu Olbersovi, v němž se zmiňuje o Velké Fermatově větě:

Přiznávám, že mě Fermatův teorém jako izolovaný výsledek moc nezajímá …[7]).

Fermat napsal na okraji textu své kopie *Diofantovy Aritmetiky*:

Nelze rozdělit trojmoc ve dvě trojmoci, čtyřmoc ve dvě čtyřmoci a obecně mocninu stupně vyššího než 2 ve dvě mocniny téhož stupně. Pro toto tvrzení jsem nalezl skutečně báječný důkaz, ale okraj strany je příliš úzký, aby jej obsáhl.

Fermatova vlastní kopie s rukopisnou poznámkou se nezachovala. Dnes je jen málo těch, kdo věří, že Fermat větu skutečně pro libovolné $n \neq 4$ ($n > 2$) dokázal. Fermatovi následníci byli úspěšní pouze v důkazech speciálních případů Velké Fermatovy věty. Ch. Huygens a L. Euler (pro $n = 3$, $n = 4$), A. M. Legendre (1823, $n = 5$), G. P. L. Dirichlet (1825, $n = 5$), G. Lamé (1840, $n = 7$) a E. E. Kummer[8]) (1849, $n < 100$). V květnu 1819 Sophie Germain v dopise C. F. Gaussovi ukázala, že jsou-li p a $2p + 1$ prvočísla, pak tzv. první případ Velké Fermatovy věty je splněn pro exponent p (tj. neexistuje řešení). V roce 1983 G. Faltings dokázal Mordellovu hypotézu, v níž se speciálně tvrdí, že pro každé $n > 2$ existuje nejvýše konečně mnoho trojic (x, y, z) přirozených čísel takových, že největší společný dělitel $\gcd(x, y, z) = 1$ a $x^n + y^n = z^n$. Obecný důkaz Velké Fermatovy věty nebyl nalezen do roku 1995.

Přibližně 350 let po formulaci Velké Fermatovy věty Andrew Wiles, matematik z princetonské univerzity, zveřejnil její důkaz na semináři v Cambridge. Podrobný důkaz je uveden v článcích [20] A. Wilese a [19] R. Taylora a A. Wilese, které vyšly v *Annals of Mathematics* v květnu roku 1995. Důkaz Velké Fermatovy věty je nyní všeobecně akceptován.

Analytická geometrie

Fermat učinil nové pokroky a objevil metody analytické geometrie v dvojrozměrném i trojrozměrném prostoru. Analytickou geometrií se zabýval v období 1629–1636

---

[6]) *De tous les théorèmes sur les nombres, énoncés par Fermat, un seul reste incomplètement demontré.*

[7]) *Ich gestehe zwar, dass das Fermatsche Theorem als isolierter Satz für mich wenig Interesse hat…* Viz [15], str. 105.

[8]) Německý matematik Ernst E. Kummer ocenil Fermatovy schopnosti: *„Diable d'homme, quelle intuition!“*

a později se již k tomuto tématu nevrátil. V Bordeaux studoval Viètova pojednání *Isagoge* (Tours, 1591) a *De recognitione et emendatione aequationum* (Paris, 1615). Podrobně se obeznámil s dílem Archimeda, Apollonia a Pappa. Počátky vzniku analytické metody vysvětluje Fermat v korespondenci. V dopisech Etiennu Pascalovi (otci Blaise Pascala) a Gillesu Robervalovi (23. srpna 1636) píše: *„Nalezl jsem mnoho geometrických teorémů … o rovinných bodech."* Skutečností zůstává, že Descartova *Géometrie* byla publikována v roce 1637 a kolovala v širokém kruhu čtenářů, zatímco Fermatovo *Isagoge* zůstalo v rukopise a později v roce 1679 bylo zahrnuto do vydání *Varia opera* Fermatovým synem Samuelem. Proto se bez ohledu na to, kdo první metodu analytické geometrie objevil, inovace připisuje Descartesovi.

Když Fermat řešil Apolloniovy problémy, popisoval kuželosečky takto:

hyperbola	A in E aeq. Z pl.,
parabola	E^2 aequale D in A,
přímka	D in A aequetur B in E.

Pro dané veličiny používal souhlásky a pro proměnné (neznámé) veličiny samohlásky.

Fermatova metoda nekonečného sestupu

Vazbu *úplná indukce* (v protikladu k neúplné indukci Francise Bacona) použil R. Dedekind ve svém pojednání *Was sind und was sollen die Zahlen?* pro to, co dnes nazýváme *matematickou indukcí*. Fermat použil velmi podobný postup, pro nějž měl zcela speciální název *metoda nekonečného sestupu*. V dopise příteli Carcavimu[9]) píše (viz [3], sv. 1, str. 340; sv. 3, str. 271):

Pro případ, že obvyklé metody, ty, které nalézáme v knihách, jsou nevhodné k důkazům tak obtížných výroků, objevil jsem konečně jedinečnou metodu …, kterou jsem nazval metodou nekonečného sestupu. Nejprve jsem ji užil k důkazům negativních tvrzení takových jako: Obsah žádného pythagorejského trojúhelníka[10]) *nelze vyjádřit jako čtverec přirozeného čísla.*

V roce 1679 Fermatův syn Samuel publikoval tvrzení svého otce (z dopisu M. Mersennovi z r. 1640): *Quum autem numeros a binario quadratice in se ductos et unitate auctos esse semper numeros primos apud ne constet et iamdudum Analystis illius theorematis veritas fuerit significata, nempe esse primos* 3, 5, 17, 257, 65537 *etc. in infinitum…*, v němž prohlašuje, že 3, 5, 17, 257, 65537 atd. jsou prvočísla.

Fermat nesprávně tvrdil, že čísla tvaru $2^{2^m} + 1$ jsou prvočísla a že příslušný důkaz je založen na metodě nekonečného sestupu. Toto mylné tvrzení se ale později stalo velmi slavným. Vyvrátil je až Leonhard Euler v roce 1732.

---

[9]) Pierre de Carcavi (1600–1684) nedosáhl univerzitního vzdělání. Byl radou parlamentu v Toulouse od 1632 do 1636. Pak si koupil úřad rady parlamentu v Paříži. V roce 1648 byl donucen úřad prodat, aby mohl zaplatit dluhy za svého otce, který byl bankéřem. Posledních dvacet let života strávil jako kustod Královské knihovny. S Fermatem se setkal poprvé v roce 1632.

[10]) Pythagorejský trojúhelník — pravoúhlý trojúhelník s celočíselnými stranami.

V roce 1640 Fermat napsal Fréniclovi de Bessy:

Si vous en avez la preuve assurée vous m'obligeriez de me la communiquer car aprés cela, rien ne m'arrêtera en ces matières.

V překladu zní vysvětlení takto: Máte-li jeho nepochybný důkaz, mohl byste mi jej sdělit, protože mě v tomto ohledu nic nezastaví.

Seznamme se s podstatou Fermatovy metody nekonečného sestupu:

Jestliže chceme dokázat, že neexistuje žádné řešení úlohy o přirozených číslech s jistou vlastností, pak lze postupovat takto:

1. Předpokládejme naopak, že existuje nějaké přirozené číslo x s touto vlastností.

2. Pokud odvodíme, že existuje nějaké menší přirozené číslo $y < x$, které má tutéž vlastnost, můžeme tento krok opakovat nekonečněkrát. To je však v protikladu se skutečností, že musí existovat nejmenší přirozené číslo s touto vlastností.

Proto:

3. Neexistuje žádné přirozené číslo, které má danou vlastnost.

Fermatova metoda nekonečného sestupu je blízká principu matematické indukce. Opírá se o vlastnost, že množina přirozených čísel $\{1, 2, 3, \ldots\}$ je dobře uspořádaná, což znamená, že libovolná její neprázdná podmnožina má nejmenší prvek. Fermat ji účinně použil kolem roku 1640, kdy dokázal, že obsah pythagorejského trojúhelníka nemůže být čtverec přirozeného čísla, a též při důkazu toho, že rovnice tvaru

$$x^4 + y^4 = z^2$$

nemá řešení, když x, y, z jsou přirozená čísla. Podrobný důkaz těchto tvrzení je uveden např. v [18]. Fermat používal metodu nekonečného sestupu s nadšením i k důkazům jiných hypotéz.

Počátky variačního a infinitezimálního počtu

Počátky skutečného Fermatova zájmu o studium matematických problémů kladou životopisci do Bordeaux roku 1629. Během pobytu v tomto městě vytvořil důležité dílo o maximech a minimech křivek, ale nikdy svou práci neuvedl do finálního tvaru. Jeho pojednání popisující tyto metody začalo kolovat v Paříži v roce 1636 pod názvem *Metoda k určování minim a maxim a tečen ke křivkám.*

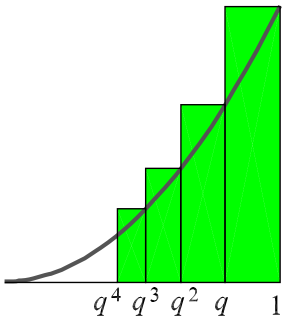
Byl to Johannes Kepler (1571–1630), který dříve poznamenal, že hodnoty „spojité funkce“ v blízkém okolí bodu maxima (minima) z libovolné strany musí být všechny přibližně rovny maximu (minimu). Fermat aplikoval tento princip na několik případů, např. nalézt maximální hodnotu výrazu $x(a - x)$.

Fermatovy metody k určování extremálních hodnot algebraických polynomů a k sestrojení tečen k libovolnému bodu algebraické křivky mu dovolily sestrojit tečnu k elipse, cykloidě, kisoidě, konchoidě a kvadratrix použitím speciálních souřadnic.

I když se metoda tečen vynořila již během Fermatových studií v roce 1629, skutečně na ni soustředil svou pozornost až v letech 1637–1643.

V roce 1644 připojil Pierre Hérigone[11]) ke svému rozsáhlému encyklopedickému dílu *Cursus mathematicus* dodatek, obsahující Fermatovu metodu maxim a minim.

Poměrně brzy ve své kariéře, kolem roku 1636, formuloval Fermat základní poznatky v hledání kvadratur, ale k významným výsledkům dospěl v letech 1643 až 1657. Byl úspěšný ve hledání postupů, jak počítat plochy parabol a hyperbol, a v určování těžišť jednodušších těles a rotačních paraboloidů.



Obr. 5. Integrační metoda pro parabolu podle P. Fermata.

Fermat může být považován za předchůdce Gottfrieda Wilhelma Leibnize (1646 až 1716). Používal nové metody k nalezení extrémů reálných funkcí podobným způsobem. Již v roce 1630 věděl, jak počítat derivace jednoduchých funkcí. Uměl určit derivaci mocninné funkce s racionálním exponentem a vyjádřit ji jako součet nekonečné řady. Osvojil si integraci per partes. Fermat si uvědomoval pravděpodobně vztah mezi diferenciálními a integrálními postupy. Uveďme zde jeho důvtipný postup nalezení kvadratury paraboly[12]). Zvolme libovolné reálné číslo $q \in (0,1)$ a aproximujme parabolu $y = x^2$ pomocí obdélníků tvaru $(q^k - q^{k+1}) \times q^{2k}$ tak, jak je znázorněno na obrázku 5. Potom součet obsahů ploch všech těchto obdélníků je roven součtu nekonečné řady

$$1 \cdot (1-q) + q^2(q-q^2) + q^4(q^2-q^3) + \cdots = (1-q) + q^3(1-q) + q^6(1-q) + \cdots = \\ = \frac{1-q}{1-q^3} = \frac{1}{1+q+q^2}\,.$$

Vidíme, že se poměr $1/(1+q+q^2)$ pro $q \to 1$ blíží k $\frac{1}{3}$.

Jeho výsledky týkající se nalézání extrémů byly užity Christianem Huygensem (1629–1695). Také Isaac Barrow (1630–1677), učitel Isaaca Newtona (1643–1727), používal tuto Fermatovu metodu.

---

[11]) Pierre Hérigone byl baskického původu. Jeho jediným významným dílem je šestisvazkový *Cursus mathematicus*, Paříž 1644, kompendium elementární matematiky psané ve francouzštině a latině. Zavedl úplný systém matematických a logických značek, který se dodnes nezachoval.

[12]) Podobnou metodu použil Diofantos z Alexandrie (3. stol. n. l.): aproximace „tak blízko, jak jen je možné“ je podstatou té metody.

Fermatův vliv na současníky

Fermat měl mezi současníky docela dobrou pověst. Blaise Pascal (1623–1662) považoval Fermata za *největšího matematika v Evropě.* John Wallis na něho vzpomínal jako na *ďábelského Francouze.* Marin Mersenne (1588–1648) ho představoval jako *učence z Toulouse.* Korespondence se současníky byla důležitým zdrojem Fermatových idejí. Například v jednom z jeho četných dopisů Marinu Mersennovi Fermat v roce 1640 píše[13]): *jestliže p je liché prvočíslo, pak $2p$ dělí $2^p - 2$.* Brzy potom rozšířil tuto větu v teorém, který nyní známe pod názvem Malá Fermatova věta.

V některých případech mohl být okamžitý vliv Fermatova díla zřetelně vidět. Fermatovo přátelství s Pierrem de Carcavi přetrvalo mnoho let. V roce 1650 Fermat poslal Carcavimu pojednání nazvané *Novus secundarum et ulterioris radicum in analyticis usus.* Práce obsahovala dnes známou metodu eliminace a Fermat si přál ji vydat, avšak přítel Carcavi nebyl v hledání vydavatele díla úspěšný.

Gilles Roberval velmi oceňoval Fermatovy nápadité postupy při řešení rozmanitých matematických úloh. Roberval se sám v raném období věnoval účinným metodám objevování integračních postupů. Spočítal určitý integrál ze $\sin x$, řešil některé snazší otázky týkající se cykloidy a určil délku oblouku spirály. Studoval mnoho jiných rovinných křivek a uvažoval o vlastnostech jejich tečen. Roberval byl jediný profesionální matematik v kruhu kolem Fermata.

Další matematik Bernard Frénicle de Bessy vyřešil mnohé z problémů, které Fermat předložil, použitím nových postupů a formuloval další otázky. Podobně jako Fermat se zabýval magickými čtverci.

Dva roky po Fermatově smrti přednášel Christian Huygens o Fermatově metodě v Akademii věd. V této přednášce Huygens nejen použil infinitezimální veličiny, ale také výrazně připsal metodu Fermatovi.

Fermatův vztah s René Descartem byl kontroverzní. Mohli bychom najít několik jiných podobných případů v historii matematiky, kdy byl významný objev učiněn nezávisle a téměř současně dvěma osobnostmi. Fermat (1629) a Descartes (1637) rozvinuli nezávisle metodu analytické geometrie. Práce na Descartově díle *Géometrie* byla ve skutečnosti zahájena již v roce 1620. Také Fermat své myšlenky nepublikoval okamžitě. Jeho práce se objevila až v roce 1679. Fermat nešťastně použil složitou Viètovu symboliku. Fermat i Descartes započali analytickým řešením stejné klasické geometrické úlohy — Apolloniova problému o čtyřech přímkách. Jejich důležitým zjištěním bylo, že rovnice druhého stupně odpovídají kuželosečkám.

Později Fermat prohlásil, že Descartes chybně odvodil zákon lomu. Naproti tomu Descartes napadl Fermatovu metodu maxim, minim a tečen. Fermat prokázal správnost své metody a nakonec Descartes přijal Fermatův přístup písemně:

[13]) Tento výsledek byl znám již o 20 let dříve Johannu Brosciovi (Jan Brożek, 1585 až 1652) z krakovské akademie, *Arithmetica Integrorum*, Krakow 1620, viz W. Sierpiński, *Teoria liczb II*, PWN, Warszawa 1959, str. 177.

...při pohledu na poslední metodu, kterou jste použil k hledání tečen ke křivkám, nemohu říci nic jiného, jen to, že je velmi dobrá a že vysvětlujete-li ji svým způsobem od počátku, nenalézám žádný spor[14]).

Skončily tak všechny spory? Nikoliv, Descartes pokračoval a pokoušel se poškodit Fermatovu dobrou pověst.

Fermatovy vztahy s Pascalem a Huygensem byly naopak přátelské. Výměna dopisů s Blaisem Pascalem započala až v roce 1654, kdy Pascal písemně požádal o potvrzení některých svých myšlenek o pravděpodobnosti. Jejich spolupráci lze ilustrovat příkladem z dopisu Fermata Pascalovi z téhož roku. Fermat se věnuje případu dvou hazardních hráčů A a B, kteří musí náhle přerušit průběh hry v době, kdy A potřebuje k vítězství 2 body a B potřebuje 3 body. Za vítězství je jeden bod a za prohru žádný. Otázka zní: V jakém poměru si spravedlivě rozdělí hráči vsazenou částku?

Fermat si uvědomil, že je třeba vyšetřit následujících 16 případů:

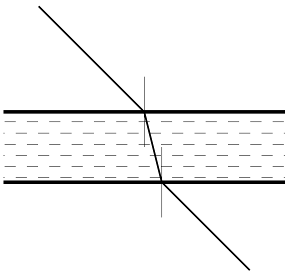
$$aaaa,\ baaa,\ abaa,\ aaba,\ aaab,\ bbaa,\ abba,\ aabb,\ baba,\ abab,\ baab;$$
$$abbb,\ babb,\ bbab,\ bbba,\ bbbb,$$

kde a, resp. b znamená vítězství hráče A, resp. B. Odtud je již snadno vidět, že vsazená částka bude spravedlivě rozdělena v poměru 11 : 5. Později Fermat i Pascal vyjádřili potěšení, že dospěli ke stejnému výsledku, i když Pascal poněkud jiným způsobem. Oba pak společně učinili první kroky v rozvíjející se teorii pravděpodobnosti.

Korespondence s Christianem Huygensem začala o dva roky později. Podnítil ji Huygensův zájem o pravděpodobnost. Když dokončoval své pojednání o hře v kostky *De ratione in ludo aleae* (1657), Pascal a Fermat řešili některé z jeho úloh.

Fermatův odkaz — aplikace jeho výsledků

Fermat neprojevoval mnoho zájmu o aplikace matematiky v reálném životě. Skutečnost je pozoruhodně ironická: jeho první kontakty s tehdejší vědeckou komunitou byly vyvolány právě jeho pojednáním o volném pádu.



Obr. 6. Fermatův princip vysvětluje lomenou trajektorii světla v opticky nehomogenním prostředí (např. při průchodu skleněnou deskou).

[14]) `http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Fermat.html`

V roce 1657 Fermat vyslovil jednoduchý princip (viz obr. 6): *Světelný paprsek se pohybuje z jednoho bodu do druhého po dráze, po které se šíří v nejkratším čase.*

Leonhard Euler (1707–1783), Joseph Louis Lagrange (1736–1813) a William Rowan Hamilton (1805–1865) přispěli později k širokému rozšíření Fermatova principu.

Ačkoliv dodnes nemá Velká Fermatova věta žádné praktické použití, její zkoumání způsobilo velký rozvoj teorie čísel, dalo vznik několika novým matematickým disciplínám a motivovalo matematiky k precizní systematické analýze.

Naproti tomu Malá Fermatova věta (a její rozšíření[15]) L. Eulerem) je pravděpodobně nejužitečnější a často užívaný nástroj v teorii čísel. Tvrdí se v ní, že pro libovolné prvočíslo p platí

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \quad \text{pro libovolné přirozené } a, \text{ které není dělitelné } p.$$

Tedy nesplňuje-li číslo p tuto podmínku, nemůže být prvočíslem. Fermatův test je *nutný* pro prvočíselnost, ale není *postačující* podmínkou. Snad nejranější netriviální užití obrácené věty souvisí s operací „*násobení modulo p*“, kterou použil L. Euler v roce 1758 (a možná před ním i Fermat) k důkazu Malé Fermatovy věty (viz [17], str. 276). Vlastní pojem kongruence „modulo p“ byl vytvořen C. F. Gaussem. Zavedl jej v prvním vydání svého fundamentálního číselně-teoretického díla *Disquisitiones arithmeticae* v roce 1801.

Fermat se také zabýval metodou faktorizace (viz [2]), která je účinná zejména pro ta čísla, která nejsou příliš velká a která jsou součinem dvou skoro stejně velkých prvočísel.

Na počátku třetího milénia je Fermatovo jméno v celé matematické komunitě vyslovováno s hlubokou úctou. Jeho schopnost vidět souvislosti mezi různými úlohami, tvořivost v objevování metod, zaujatost v řešení problémů je pro nás velkou výzvou i dnes.

Poděkování. Děkuji Gerardu Albertsovi a Witoldu Więsławovi za cenné podněty a připomínky, které přispěly ke zlepšení textu. Poděkování náleží též nakladatelství Springer za laskavé svolení k publikaci tohoto článku, který vznikl volným překladem předmluvy ke knize [10]. Upřímný dík patří Ludmile Dobiášové a Jaromíru Antochovi za povzbuzující materiály z Fermatovy vlasti.

L i t e r a t u r a

[1] Barner, K.: *How old did Fermat become?* Univ. Gesamthochschule Kassel, Fachbereich Mathematik/Informatik, Preprint No. 17/00, 2000, 1–22.

[2] Beran, L.: *Fermatova metoda rozkladu ve vašich rukách.* Rozhledy mat.-fyz. *72* (1975), 277–283.

[3] Breger, H.: *The Mysteries of Adequare: A Vindication of Fermat.* Archive for History of Exact Sciences *43* (1993/94), 193–219.

[15]) Obecnější věta rozšířená Eulerem říká, že *libovolná přirozená čísla a a n jsou nesoudělná, právě když $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$, kde $\varphi(n)$ je počet přirozených čísel nepřevyšujících n, která jsou nesoudělná s n* (tzv. Eulerova funkce φ). Na tomto tvrzení je založena např. známá metoda RSA pro šifrování tajných zpráv pomocí velkých prvočísel.

Obr. 7. Pierre de Fermat.

[4] Fermat de, P.: *Œuvres.* 4 svazky + Supplement. Gauthier-Villars 1891–1912, 1922.

[5] Gillispie, Ch. C. (ed.): *Dictionary of Scientific Biography.* New York 1972–90.

[6] Granville, A.: *Recenze pořadu Horizon stanice BBC „Fermatova poslední věta“.* PMFA *42* (1997), 184–187.

[7] Huron, R.: *L'aventure mathématique de Fermat.* In: *Pierre de Fermat, Toulouse et sa région*, CNRS, Toulouse 1966, 13–34.

[8] Huron, R. (ed.): *Pierre de Fermat, Toulouse et sa région.* CNRS, Toulouse 1966.

[9] Křížek, M.: *O Fermatových číslech.* PMFA *40* (1995), 243–253.

[10] Křížek, M., Luca, F., Somer, L.: *17 lectures on Fermat numbers: From number theory to geometry.* Springer-Verlag, New York 2001.

[11] Lamé, G.: *Mémoire sur le dernier théorème de Fermat.* Comptes Rend. Acad. Sci. Paris *9* (1839).

[12] Lepka, K.: *Historie Fermatových kvocientů.* Prometheus, Praha 2000.

[13] Mahoney, M. S.: *The Mathematical Career of Pierre Fermat (1601–1665).* Princeton University Press, Princeton, New Jersey 1973, 1994.

[14] Rouse Ball, W. W.: *A Short Account of the History of Mathematics.* 4. vyd., 1908.

[15] Singh, S.: *Fermat's Last Theorem* (v českém překladu *Velká Fermatova věta*). Fourth Estate, London (Academia, Praha) 1997 (2000).

[16] Skula, L.: *Některé historické aspekty Fermatova problému.* PMFA *39* (1994), 318–330.

[17] Stillwell, J.: *Mathematics and Its History.* Springer, New York 1989.

[18] Šolcová, A., Křížek, M.: *Fermatova metoda nekonečného sestupu.* Rozhledy mat.-fyz. *78* (2001), 1–7.

[19] Taylor, R., Wiles, A.: *Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras.* Ann. of Math. *141* (1995), 553–572.

[20] Wiles, A.: *Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem.* Ann. of Math. *141* (1995), 443–551.