Magdalena Hykšová

Fraktály a objektově orientované programování

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 46 (2001), No. 3, 232--253

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/141087`

Fraktály a objektově orientované programování

Magdalena Hykšová, Praha

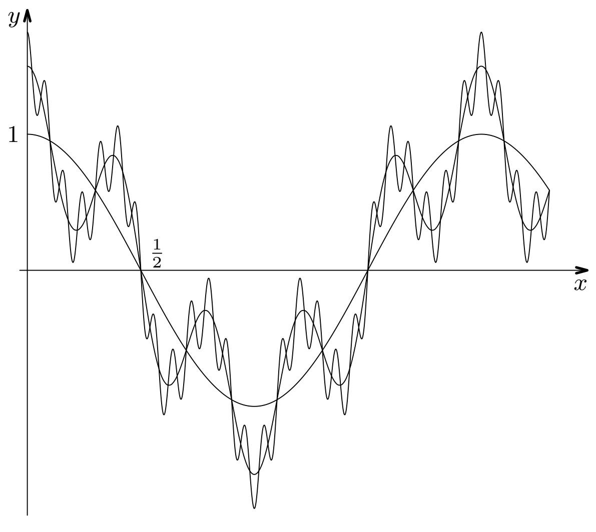
Úvod

Motivací pro tuto práci bylo studium spojitých nediferencovatelných funkcí. Připomeňme si úvodem historii tohoto pojmu.

Karl Weierstrass ukázal 18. 7. 1872 ve své přednášce v Královské akademii věd v Berlíně funkci, která je v celém reálném oboru spojitá, ale nemá v žádném bodě derivaci:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(\pi b^n x); \qquad 0 < a < 1, \quad ab > 1 + \tfrac{3}{2}\pi.$$

Na obrázku vidíte první tři její aproximace pro $a = \frac{1}{2}$, $b = 5$.[1])



[1]) V roce 1916 dokázal G. F. Hardy, ze stačí předpokládat $0 < a < 1$, $ab > 1$. Viz [35], str. 408.

Mgr. MAGDALENA HYKŠOVÁ (1974), FD ČVUT, katedra aplikované matematiky, Na Florenci 25, 110 00 Praha 1.

Článek je rozšířenou verzí příspěvku M. HYKŠOVÁ: *Fraktály a jejich objektově orientované definice* ze sborníku *Matematika v proměnách věků I*, Dějiny matematiky, sv. 11, editoři J. BEČVÁŘ, E. FUCHS, Prometheus, Praha 1998, 192–210.

Weierstrassův příklad spojité nediferencovatelné funkce uveřejnil roku 1875 P. du Bois-Reymond v časopise Journal für die reine und angewandte Mathematik [14] (sám autor ho zveřejnil až v roce 1880). Dlouhou dobu pak byla tato funkce považována za první a přitom nejjednodušší funkci svého druhu.

V následující době se mnozí matematikové s nadšením zabývali problémem spojitých funkcí bez derivace (např. Darboux [13], 1875; Dini [15], 1878; Lerch [17], 1888 aj.), jiní se však na jejich snažení dívali nevraživě, jejich příklady nazývali *matematickými monstry*; Ch. Hermite například ve svém dopise T. Stieltjesovi roku 1893 napsal, že se *odvrátil s hrůzou a ošklivostí od toho politováníhodného zla, jímž jsou funkce bez derivací...*

Značné překvapení vyvolala koncem devatenáctého století funkce Charlese Celléríera, která byla zveřejněna roku 1890 v práci [18], ale sestrojena již kolem roku 1860:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n} b^{-n} \sin(\pi b^n x); \quad b > 1000.$$

Avšak daleko větší překvapení přišlo po první světové válce, kdy středoškolský profesor matematiky z Plzně Martin Jašek objevil v pozůstalosti Bernarda Bolzana ve vídeňské Národní knihovně jako součást rukopisu *Functionenlehre* později proslulou *Bolzanovu funkci* (srov. [27], [28], [29]). Bolzano ji definoval na intervalu $[a, b]$ jako limitu spojitých funkcí y_1, y_2, y_3, $\ldots$, kde y_1 je funkce, která pro $x = a$ nabývá hodnoty A, pro $x = b$ hodnoty B a uvnitř intervalu (a, b) je lineární, tj.

$$y_1 = A + (x - a)\frac{B - A}{b - a}\,.$$

Funkce y_2 je definovaná tak, aby byla v obou polovinách intervalu (a, b) nejdříve rostoucí a pak klesající (popř. naopak pro $B < A$): původní interval se rozdělí na čtyři intervaly s krajními body

$$a, \quad a + \tfrac{3}{8}(b - a), \quad \tfrac{1}{2}(a + b), \quad a + \tfrac{7}{8}(b - a), \quad b$$

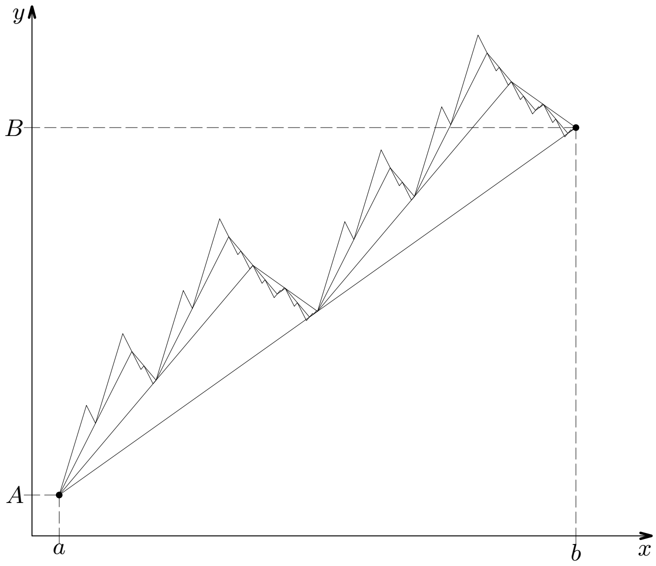
a těmto bodům se přiřadí po řadě hodnoty

$$A, \quad A + \tfrac{5}{8}(B - A), \quad A + \tfrac{1}{2}(A + B), \quad B + \tfrac{1}{8}(B - A), \quad B$$

s tím, že na každém ze čtyř intervalů je funkce y_2 lineární. Funkce y_3 je definovaná analogicky, jen se místo intervalu (a, b) uvažují postupně čtyři uvedené intervaly atd.

Bolzano ukázal, že body, ve kterých tato funkce nemá derivaci, tvoří v intervalu $[a, b]$ hustou množinu.

Bolzano samozřejmě neužíval dnešní terminologii; ukázal, že když ve dvou různých bodech jeho funkce derivaci nemá, pak existuje bod mezi nimi, v němž rovněž nemá derivaci. To je s hustotou zmíněných bodů ekvivalentní. Důkaz spojitosti výsledné funkce není u Bolzana korektní. Užívá totiž nesprávného tvrzení, že limitou (bodově) konvergentní posloupnosti spojitých funkcí je vždy spojitá funkce — neuvědomil si nutnost požadavku stejnoměrné konvergence.



Správný důkaz spojitosti podal v roce 1922 Karel Rychlík [25], který navíc dokázal, že derivace neexistuje v žádném bodě daného intervalu (výše popsanou Bolzanovu konstrukci Rychlík užívá pro případ $a = 1$, $b = 1$, $A = 0$, $B = 1$). Ke stejnému výsledku došel ve stejném roce (ale jinou cestou) také Vojtěch Jarník [26].

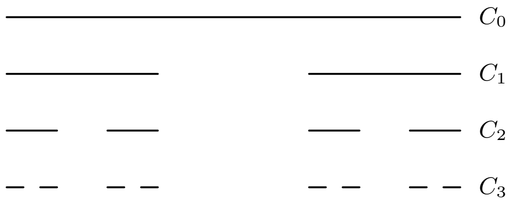
Bolzano napsal svou práci před rokem 1834 — předběhl tedy svou dobu o celá desetiletí. Na tom nic nezmění skutečnost, že rukopis tehdy vydán nebyl a další vývoj matematiky neovlivnil (*Functionenlehre* [31] byla vydána v roce 1930 jako 1. svazek *Spisů Bernarda Bolzana*). Navíc objevení Bolzanovy funkce bylo velkým stimulem pro české matematiky.

Koncem devatenáctého a počátkem dvacátého století se také objevily konstrukce různých „podivných útvarů", z nichž nejznámější jsou *Cantorovo diskontinuum* ([16], 1883), *Peanova křivka* ([19], 1890) a *Kochova křivka* ([21], 1904).

Připomeňme, že *Cantorovo diskontinuum* je podmnožina množiny reálných čísel

$$C = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C_k,$$

kde $C_0 = [0,1]$, množina C_1 vznikne vyjmutím „prostřední třetiny" intervalu $[0,1]$, tj. $C_1 = [0,\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3},1]$, množina C_2 vznikne vyjmutím prostředních třetin obou intervalů z C_1, tj. $C_2 = [0,\frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9},\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3},\frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9},1]$ atd.



Peanova křivka je příkladem spojitého zobrazení úsečky na čtverec. Peano uvažoval $t \in [0,1]$ vyjádřené v trojkové číselné soustavě:

$$t = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \cdots; \quad 0 \leqq a_i \leqq 2,$$

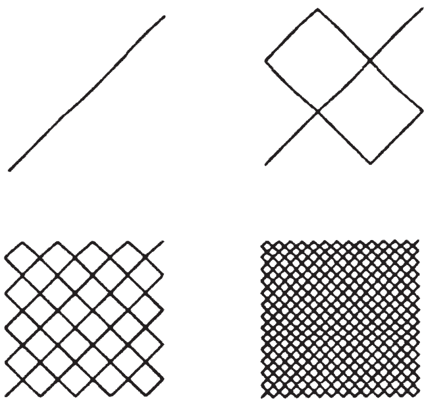
a_i celé. Této hodnotě přiřadil bod (x,y) v rovině, daný rozvoji:

$$x = \frac{b_1}{3} + \frac{b_2}{3^2} + \cdots; \qquad y = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \cdots,$$

kde

$$\begin{aligned} b_n &= K^{a_2+a_4+\cdots+a_{2n-2}}(a_{2n-2}), \\ c_n &= K^{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}}(a_{2n}), \end{aligned}$$

$K(0)=2$, $K(1)=1$, $K(2)=0$. Peano navíc ukázal, že $x(t)$, $y(t)$ jsou spojité nediferencovatelné funkce.

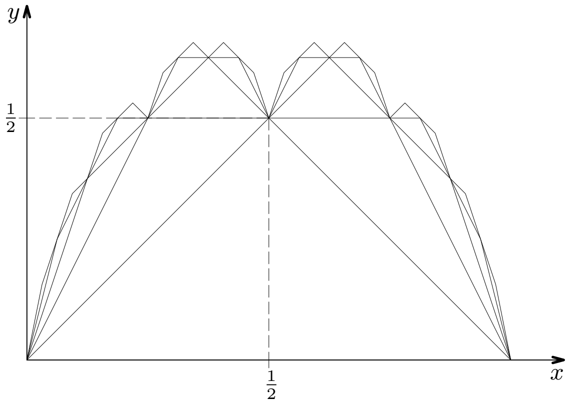


Kochově křivce je věnována pátá část tohoto článku.

Takové útvary jsou spolu se spojitými nediferencovatelnými funkcemi příklady fraktálů; tento dnes tolik populární pojem byl definován B. B. Mandelbrotem až v sedmdesátých letech dvacátého století. Mandelbrot nastínil svou teorii nejprve roku 1975 v knize [36], poněkud úplněji potom v práci [37] z roku 1982. Později se vyvinula poměrně rozsáhlá část matematiky, kterou lze prohlásit za studium fraktálů; sem patří především metody pro výpočet Hausdorffovy dimenze. Z monografií matematického charakteru věnovaných této problematice uveďme [38]–[42].

Vraťme se ještě ke spojitým nediferencovatelným funkcím. Za nejjednodušší příklad je obvykle považován tzv. *Waerdenův příklad* z třicátých let tohoto století, který je ovšem mírnou modifikací následující funkce definované roku 1903 T. Takagim [20]:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \Delta(2^n x); \quad \Delta(x) = \operatorname{dist}(x, \mathbb{Z}).$$



V roce 1920 publikoval v Časopise pro pěstování matematiky a fyziky příklad spojité nediferencovatelné funkce Karel Petr [22]. Jeho příklad, založený na podobné myšlence jako Peanova konstrukce, se běžně necituje jako příklady předchozí, je však velice jednoduchý; k pochopení konstrukce i důkazu spojitosti a nediferencovatelnosti stačí znalost definice spojitosti a derivace a jedné věty z počátků aritmetiky, která se týká desetinných rozvojů.

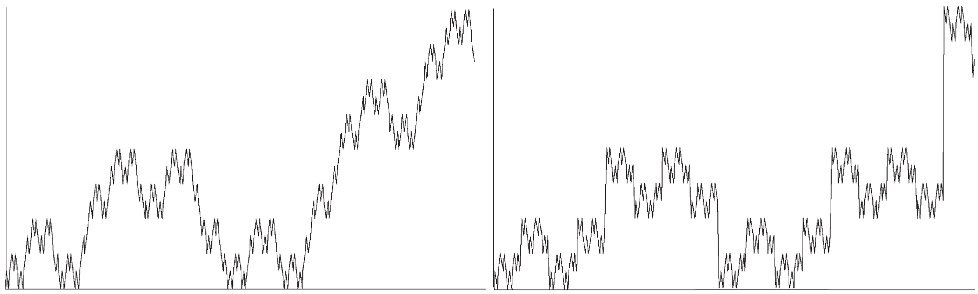
Petrova funkce je na intervalu $[0,1]$ definovaná takto:

$$x = \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \frac{a_4}{10^4} + \cdots; \quad a_k \text{ celá čísla}; \quad 0 \leqq a_k \leqq 9;$$

$$f(x) = \frac{b_1}{2^1} \pm \frac{b_2}{2^2} \pm \frac{b_3}{2^3} \pm \frac{b_4}{2^4} \pm \cdots; \quad b_k = \begin{cases} 0 & \text{pro } a_k \text{ sudé,} \\ 1 & \text{pro } a_k \text{ liché,} \end{cases}$$

$$\text{znaménko před členem } b_{k+1} \begin{cases} \text{opačné než před } b_k \text{ pro } a_k \in \{1,3,5,7\}, \\ \text{stejné ve zbývajících případech.} \end{cases}$$

Na obrázku je graf Petrovy funkce, resp. jejího hrubého přiblížení — pro lepší názornost je užita čtyřková číselná soustava. Proč je nejvyšší liché číslici udělena výjimka při určování znaménka, je vidět ze srovnání tohoto grafu s jiným grafem (vpravo), kde jsou všechny liché číslice rovnocenné: umožní nám to „vyplnit skoky“ a sestrojit funkci opravdu spojitou:



Petrovu funkci zobecnil Karel Rychlík ([23], 1920; [24], 1922), který přešel do tělesa *p-adických čísel.* Každý prvek tohoto tělesa lze jednoznačně znázornit ve tvaru

$$x = a_r p^r + a_{r+1} p^{r+1} + a_{r+2} p^{r+2} + \cdots,$$

kde r je celé číslo a koeficienty a_i jsou čísla z množiny $\{0, 1, \ldots, p-1\}$. Takovému prvku pak Rychlík přiřazuje hodnotu:

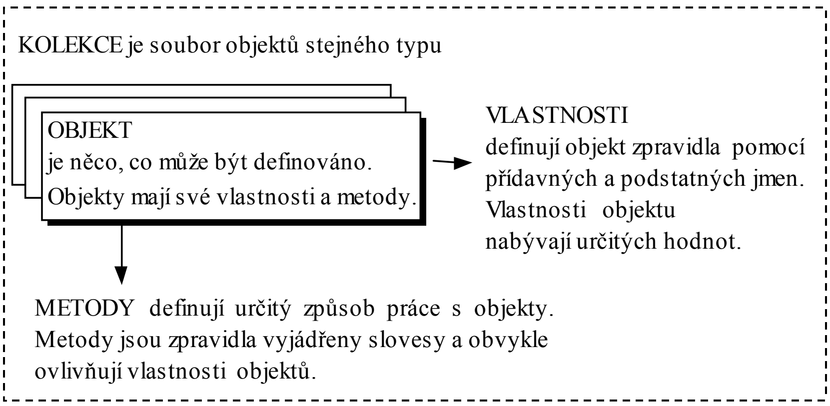
$$f(x) = a_r p^r + a_{r+2} p^{r+2} + a_{r+4} p^{r+4} + \cdots$$

V původním Petrově předpisu je každé číslici přisouzena nějaká vlastnost (hodnota 0 nebo 1, popř. znaménková změna). Stejně tak různé řády mají různé vlastnosti (mocnina 2^k ve jmenovateli). Chceme-li funkci graficky znázornit, přiřazujeme postupně číslům jisté *objekty* — úsečky. Nyní se nabízí, že bychom číslicím mohli přiřazovat i jiné vlastnosti a místo úseček bychom mohli uvažovat i jiné objekty (obdélník, trojúhelník, krychli atd.). Tím se před námi otevře svět roztodivných fraktálů. Pokaždé stačí říci, z jaké číselné soustavy budeme vycházet, jaké vlastnosti budeme jednotlivým číslicím přiřazovat, jakým způsobem budeme „skládat dohromady“ odpovídající hodnoty, jaké objekty si nakonec vymyslíme.

Společné jádro této skupiny fraktálů navíc vynikne, budeme-li fraktály definovat, ostatně i programovat, prostřednictvím jazyka *objektově orientovaného programování*, jehož hlavní ideou je právě využívání již vytvořených částí programu místo jejich znovuvytváření a jehož ústředním pojmem je *objekt* (pes, struktura číselné soustavy, číslice), jeho *vlastnosti* (barva srsti, hodnota) a *metody* (kousat, strukturní operace).

1. Objektový model fraktálu

Pro potřeby tohoto článku zcela vystačíme s následujícími objektovými definicemi:

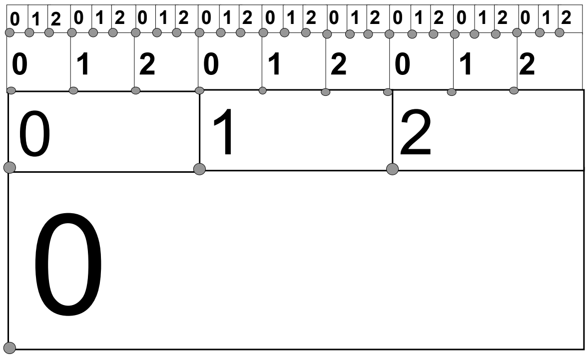


Grafické zobrazení číselné soustavy o základě 3:

Posloupnost čísel: 0000, 0001, 0002, 0010, 0011, 0012, 0020, 0021, 0022, ...

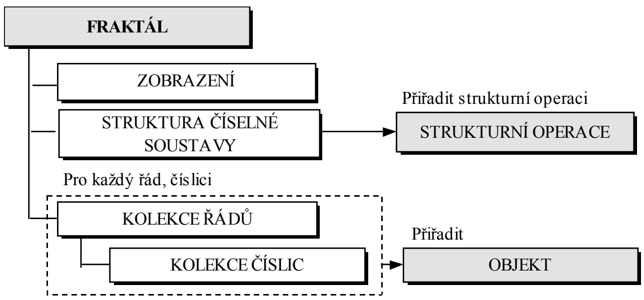
Přepis čísel do sloupců (na každém řádku jsou číslice stejného řádu):

0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	0	0	1	1	1	2	2	2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0



Vyjádření čísel pomocí kolekcí řádů a číslic
V tomto obrázku je možné nalézt fraktály vytvořené na základě:
– číselných bodů
– číslic
– obdélníků ohraničujících číslice

Objektový model fraktálu:

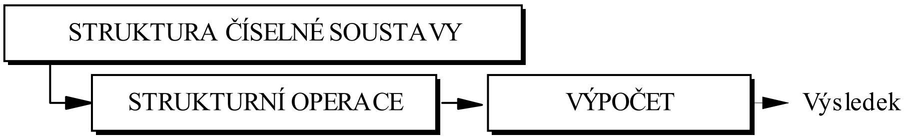


Objektový zápis definující fraktál vytvořený na základě objektu „StrukturaČíselnéSoustavy“:

Define Fraktál
  ČíselnáSoustava.Základ := 3
  Define Zobrazení
    KartézskéSouřadnice
  End Define
  Define StrukturaČíselnéSoustavy
    PřiřaditStrukturníOperaci
  End Define
  For Each {Řád}; {Číslice} **In** StrukturaČíselnéSoustavy
    StrukturníOperace. Výpočet
    Číslice.PřiřaditObjekt
  End Each
End Define

Pro každý fraktál je třeba definovat „Strukturní operaci“, na jejímž základě je vytvářen, a všechny objekty, které jsou přiřazovány jednotlivým číslicím.

Objektový model strukturní operace:



Objektový zápis výsledku strukturní operace:

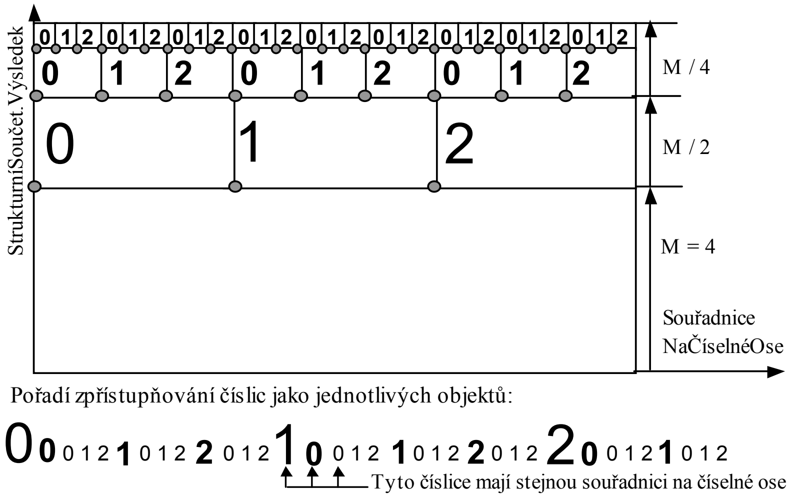
StrukturaČíselnéSoustavy.StrukturníOperace.Výpočet.Výsledek := 1

„StrukturníOperace“ je metodou vzhledem k objektu „StrukturaČíselnéSoustavy“, zároveň je ale objektem vzhledem k metodě „Výpočet“. Vlastností objektu „Výpočet“ je jeho „Výsledek“.

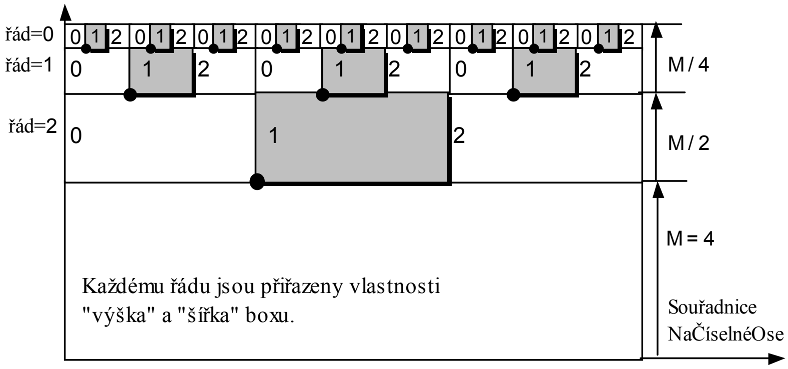
2. Definice strukturní operace

Nejjednodušší „Strukturní operací“ přiřazenou objektu „Struktura číselné soustavy“ je „Strukturní součet“. Jak se tato operace provádí, je ukázáno na následujícím konkrétním příkladě, ve kterém je použito číselné soustavy o základu 3:

Struktura číselné soustavy				**StrukturníOperace.StrukturníSoučet**			
Řád 2	Řád 1	Řád 0	Souřadnice na čís. ose	Označení členu	Hodnota členu	Výpočet	Výsledek
0			0	$\text{Člen}_{\underline{0}00}$	4	$\text{Člen}_{\underline{0}00}$	4
x	0		0	$\text{Člen}_{0\underline{0}0}$	2	$\text{Člen}_{\underline{0}00}+\text{Člen}_{0\underline{0}0}$	6
x	x	0	0	$\text{Člen}_{00\underline{0}}$	1	$\text{Člen}_{\underline{0}00}+\text{Člen}_{0\underline{0}0}+\text{Člen}_{00\underline{0}}$	7
x	x	1	1	$\text{Člen}_{00\underline{1}}$	1	$\text{Člen}_{\underline{0}00}+\text{Člen}_{0\underline{0}0}+\text{Člen}_{00\underline{1}}$	7
x	x	2	2	$\text{Člen}_{00\underline{2}}$	1	$\text{Člen}_{\underline{0}00}+\text{Člen}_{0\underline{0}0}+\text{Člen}_{00\underline{2}}$	7
x	1		10	$\text{Člen}_{0\underline{1}0}$	2	$\text{Člen}_{\underline{0}00}+\text{Člen}_{0\underline{1}0}$	6
x	x	0	10	$\text{Člen}_{01\underline{0}}$	1	$\text{Člen}_{\underline{0}00}+\text{Člen}_{0\underline{1}0}+\text{Člen}_{01\underline{0}}$	7
x	x	1	11	$\text{Člen}_{01\underline{1}}$	1	$\text{Člen}_{\underline{0}00}+\text{Člen}_{0\underline{1}0}+\text{Člen}_{01\underline{1}}$	7
x	x	2	12	$\text{Člen}_{01\underline{2}}$	1	$\text{Člen}_{\underline{0}00}+\text{Člen}_{0\underline{1}0}+\text{Člen}_{01\underline{2}}$	7
x	2		20	$\text{Člen}_{0\underline{2}0}$	2	$\text{Člen}_{\underline{0}00}+\text{Člen}_{0\underline{2}0}$	6
x	x	0	20	$\text{Člen}_{02\underline{0}}$	1	$\text{Člen}_{\underline{0}00}+\text{Člen}_{0\underline{2}0}+\text{Člen}_{02\underline{0}}$	7
x	x	1	21	$\text{Člen}_{02\underline{1}}$	1	$\text{Člen}_{\underline{0}00}+\text{Člen}_{0\underline{2}0}+\text{Člen}_{02\underline{1}}$	7
x	x	2	22	$\text{Člen}_{02\underline{2}}$	1	$\text{Člen}_{\underline{0}00}+\text{Člen}_{0\underline{2}0}+\text{Člen}_{02\underline{2}}$	7
1			100	$\text{Člen}_{\underline{1}00}$	4	$\text{Člen}_{\underline{1}00}$	4
x	0		100	$\text{Člen}_{1\underline{0}0}$	2	$\text{Člen}_{\underline{1}00}+\text{Člen}_{1\underline{0}0}$	6
x	x	0	100	$\text{Člen}_{10\underline{0}}$	1	$\text{Člen}_{\underline{1}00}+\text{Člen}_{1\underline{0}0}+\text{Člen}_{10\underline{0}}$	7
x	x	1	101	$\text{Člen}_{10\underline{1}}$	1	$\text{Člen}_{\underline{1}01}+\text{Člen}_{1\underline{0}1}+\text{Člen}_{10\underline{1}}$	7



Fraktál a jeho objektově orientovaná definice:

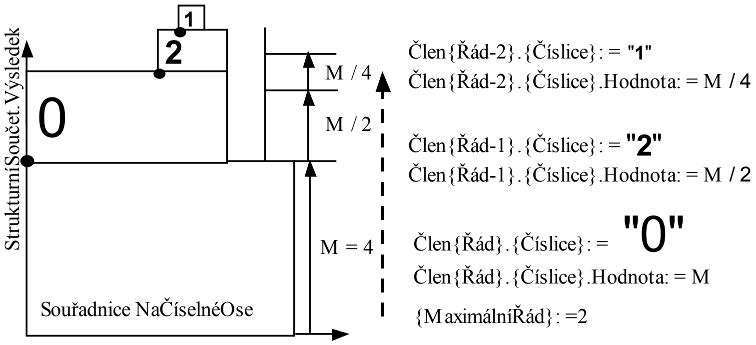


Define StrukturníOperace.StrukturníSoučet
  Člen{MaximálníŘád}.Hodnota := M
  For Each {Číslice} **In** KolekceČíslic(0, 1, 2)
    Člen{Řád − 1}.{Číslice}.Hodnota := $\frac{1}{2}$Člen{Řád}.Hodnota
  End Each
End Define

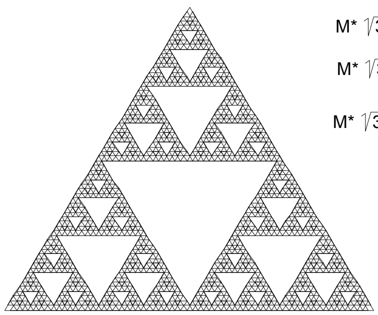
Definice objektu (zadat souřadnice levého dolního rohu, výšku a šířku boxu). Objekt je přiřazen pouze číslicím 1, a to pro všechny řády:

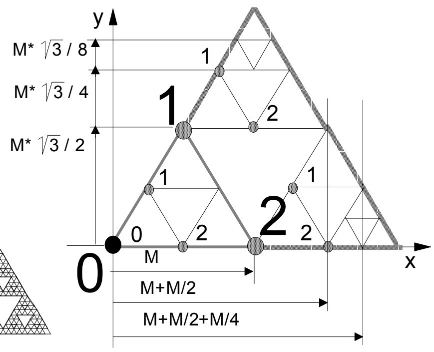
Define Objekt.Box
  If {Číslice} := 1
    Box.x := Člen.SouřadniceNaČíselnéOse
    Box.y := Člen.SouřadniceNaČíselnéOse StrukturníSoučet.Výsledek
    Box.Výška := Člen{Řád}.Hodnota
    Box.Šířka := {Základ}ˆ{Řád}
    Box.Výplň := „šedá“
  End If
End Define

Definice pro jednu strukturní větev:



3. Sierpińského těsnění





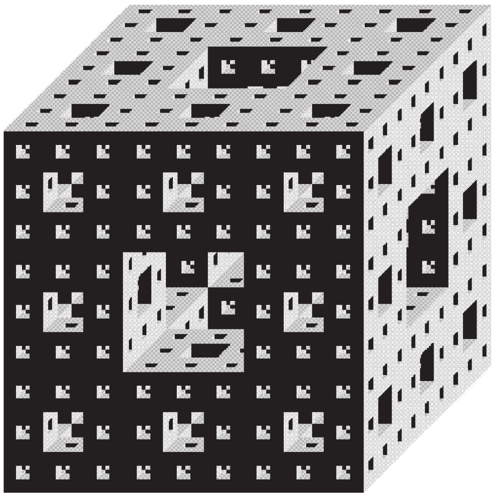
Define StrukturníOperace.StrukturníSoučet
  Define Člen{MaximálníŘád}
    If {Číslice} $= 0$
      Člen{MaximálníŘád}.Posunutí_$x := 0$
      Člen{MaximálníŘád}.Posunutí_$y := 0$
    ElseIf {Číslice} $= 1$
      Člen{MaximálníŘád}.Posunutí_$x :=$ M
      Člen{MaximálníŘád}.Posunutí_$y :=$ M$\sqrt{3}/2$
    ElseIf {Číslice} $= 2$
      Člen{MaximálníŘád}.Posunutí_$x :=$ M
      Člen{MaximálníŘád}.Posunutí_$y := 0$
    End If
  End Define
  Define Člen{Řád $- 1$}
    For Each {Číslice} **In** KolekceČíslic$(0, 1, 2)$
      Člen{Řád $- 1$}.{Číslice}.Posunutí_x: $= \frac{1}{2}$Člen{Řád}.{Číslice}.Posunutí_x
      Člen{Řád $- 1$}.{Číslice}.Posunutí_y: $= \frac{1}{2}$Člen{Řád}.{Číslice}.Posunutí_y
    End Each
  End Define
End Define

Define StrukturníOperace.StranaTrojúhelníka
Člen{MaximálníŘád}.DélkaStrany := M
Člen{Řád − 1}.DélkaStrany := $\frac{1}{2}$Člen{Řád}.DélkaStrany
End Define

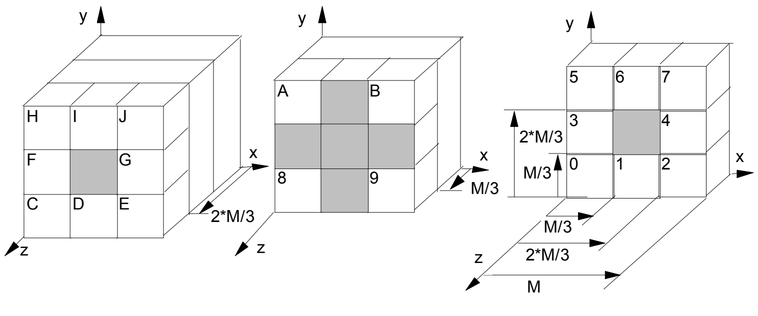
Definice objektu (zadat souřadnice levého dolního vrcholu trojúhelníka a délku strany):

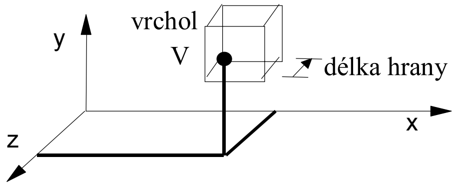
Define Objekt.Trojúhelník
Trojúhelník.SouřadniceVrcholu_x: =
Člen.StrukturníSoučet.Výsledek.SouřadniceNaOseX
Trojúhelník. SouřadniceVrcholu_y: =
Člen.StrukturníSoučet.Výsledek.SouřadniceNaOseY
Trojúhelník.DélkaStrany: = Člen.StranaTrojúhelníka.DélkaStrany
End Define

4. Mengerova houba



Nejdůležitější je správně stanovit základ číselné soustavy. Krychle se při každém přechodu na nižší řád rozdělí na 27 menších krychlí. Základ číselné soustavy je však 20, protože právě tolik krychlí se bude dál dělit. Hrana krychle se při každém přechodu na nižší řád zmenší na třetinu.





Výsledné posunutí v určitém směru vznikne „strukturním součtem“ dílčích posunutí přiřazených jednotlivým číslicím daného řádu.

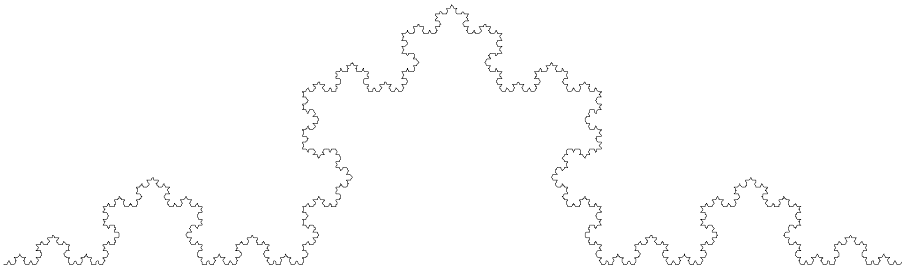
Define StrukturníOperace.StrukturníSoučet
    Define Člen{MaximálníŘád}
        If {Číslice} = 0 or 1 or 2 or 3 or 4 or 5 or 6 or 7
            Člen{MaximálníŘád}.Posunutí_z := 0
        ElseIf {Číslice} = 8 or 9 or A or B
            Člen{MaximálníŘád}.Posunutí_z := M/3
        ElseIf {Číslice} = C or D or E or F or G or H or I or J
            Člen{MaximálníŘád}.Posunutí_z := 2M/3
        ElseIf {Číslice} = 0 or 1 or 2 or 8 or 9 or C or D or E
            Člen{MaximálníŘád}.Posunutí_y := 0
        ElseIf {Číslice} = 3 or 4 or F or G
            Člen{MaximálníŘád}.Posunutí_y := M/3
        ElseIf {Číslice} = 5 or 6 or 7 or A or B or H or I or J
            Člen{MaximálníŘád}.Posunutí_y := 2M/3
        ElseIf {Číslice} = 0 or 3 or 5 or 8 or A or C or F or H
            Člen{MaximálníŘád}.Posunutí_x := 0
        ElseIf {Číslice} = 1 or 6 or D or I
            Člen{MaximálníŘád}.Posunutí_x := M/3
        ElseIf {Číslice} = 2 or 4 or 7 or 9 or B or E or G or J
            Člen{MaximálníŘád}.Posunutí_x := 2M/3
        End If
    End Define
    Define Člen{Řád − 1}
        For Each {Číslice}In KolekceČíslic$(0, 1, \dots, 9, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \dots, \mathrm{J})$
            Člen{Řád − 1}.{Číslice}.Posunutí_x := $\frac{1}{3}$Člen{Řád}.{Číslice}.Posunutí_x
            Člen{Řád − 1}.{Číslice}.Posunutí_y := $\frac{1}{3}$Člen{Řád}.{Číslice}.Posunutí_y
            Člen{Řád − 1}.{Číslice}.Posunutí_z := $\frac{1}{3}$Člen{Řád}.{Číslice}.Posunutí_z
    End Define
End Define

Define StrukturníOperace.StranaKrychle
    Člen{MaximálníŘád}.DélkaStrany := M
    Člen{Řád − 1}.DélkaStrany := $\frac{1}{2}$Člen{Řád}.DélkaStrany
End Define

Definice objektu (zadat souřadnice vrcholu V a délku strany):

Define Objekt.Krychle
    .SouřadniceVrcholu_x := Člen.StrukturníSoučet.Výsledek.SouřadniceNaOseX
    .SouřadniceVrcholu_y := Člen.StrukturníSoučet.Výsledek.SouřadniceNaOseY
    .SouřadniceVrcholu_z := Člen.StrukturníSoučet.Výsledek.SouřadniceNaOseZ
    .DélkaStrany := Člen.StranaKrychle.DélkaStrany
End Define

5. Kochův fraktál



Define StrukturníOperace.StrukturníSoučet
    Define Člen{MaximálníŘád}
        If {Číslice} = 0
            Člen{MaximálníŘád}.Posunutí := 0
        Else If {Číslice} = 1
            Člen{MaximálníŘád}.Posunutí := M
            Člen{MaximálníŘád}.Otočení.Úhel := 60°
            Člen{MaximálníŘád}.Otočení.Střed := M
        Else If {Číslice} = 2
            Člen{MaximálníŘád}.Posunutí := M
            Člen{MaximálníŘád}.Otočení.Úhel := −60°
            Člen{MaximálníŘád}.Otočení.Střed := 2M
        Else If {Číslice} = 3
            Člen{MaximálníŘád}.Posunutí := 2M
        End If
    End Define
    Define Člen{Řád − 1}
        For Each {Číslice} **In** KolekceČíslic(0, 1, 2, 3)
            Člen{Řád − 1}.{Číslice}.Posunutí := $\frac{1}{3}$Člen{Řád}.{Číslice}.Posunutí
            Člen{Řád − 1}.{Číslice}.Otočení.Úhel := Člen{Řád}.{Číslice}.Otočení.Úhel
            Člen{Řád − 1}.{Číslice}.Otočení.Střed := $\frac{1}{3}$Člen{Řád}.{Číslice}.Posunutí
        End Each
    End Define
End Define

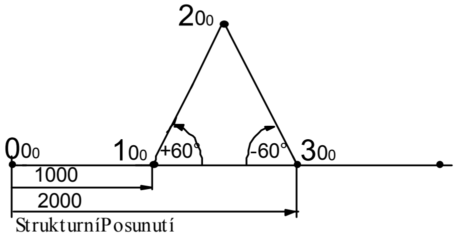
Definice objektu (zadat souřadnice levého a pravého krajního bodu úsečky):

Define Objekt.Úsečka
    Úsečka.x_0 := Zobrazení.PředchozíČlen.SouřadniceNaOseX
    Úsečka.y_0 := Zobrazení.PředchozíČlen.SouřadniceNaOseY
    Úsečka.x := Člen.SouřadniceNaOseX
    Úsečka.y := Člen.StrukturníSoučet.Výsledek
End Define

Grafické zobrazení strukturní operace:

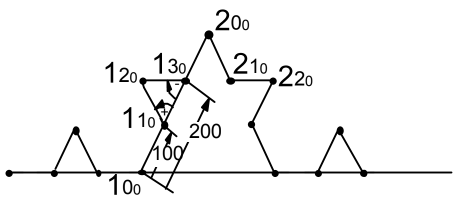
Zobrazení: KartézskéSouřadnice
ČíselnáSoustava.Základ = 4
MaximálníŘád = 2
KolekceČlenů(Člen) = 0, 1, 2, 3

KolekceŘádů(2)



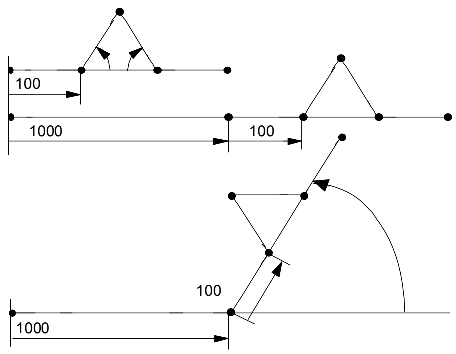
$\{\text{Člen}_{\underline{0}00}\}$.StrukturníPosunutí := 0
$\{\text{Člen}_{\underline{1}00}\}$.StrukturníPosunutí := 100
$\{\text{Člen}_{\underline{1}00}\}$.StrukturníOtočení.Úhel := 60
$\{\text{Člen}_{\underline{1}00}\}$.StrukturníOtočení.Střed := 100
$\{\text{Člen}_{\underline{2}00}\}$.StrukturníPosunutí := 100
$\{\text{Člen}_{\underline{2}00}\}$.StrukturníOtočení.Úhel := −60
$\{\text{Člen}_{\underline{2}00}\}$.StrukturníOtočení.Střed := 200
$\{\text{Člen}_{\underline{3}00}\}$.StrukturníPosunutí := 200

KolekceŘádů(1,2)

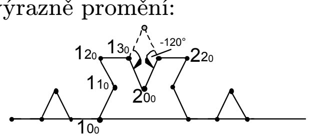


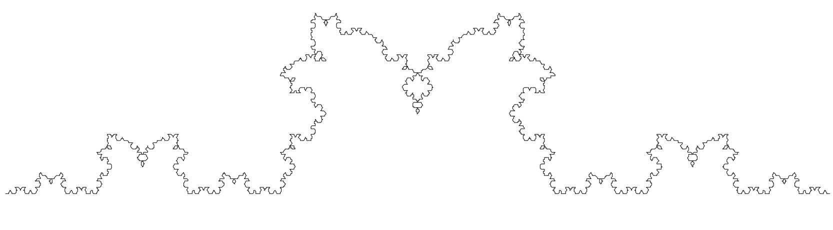
$\{\text{Člen}_{1\underline{0}0}\}$.StrukturníPosunutí := 0
$\{\text{Člen}_{1\underline{1}0}\}$.StrukturníPosunutí := 10
$\{\text{Člen}_{1\underline{1}0}\}$.StrukturníOtočení.Úhel := 60
$\{\text{Člen}_{1\underline{1}0}\}$.StrukturníOtočení.Střed := 10
$\{\text{Člen}_{1\underline{2}0}\}$.StrukturníPosunutí := 10
$\{\text{Člen}_{1\underline{2}0}\}$.StrukturníOtočení.Úhel := −60
$\{\text{Člen}_{1\underline{2}0}\}$.StrukturníOtočení.Střed := 20
$\{\text{Člen}_{1\underline{3}0}\}$.StrukturníPosunutí := 20

Algoritmus se zjednoduší, provádí-li se výpočet strukturní operace od nejnižšího řádu k nejvyššímu.

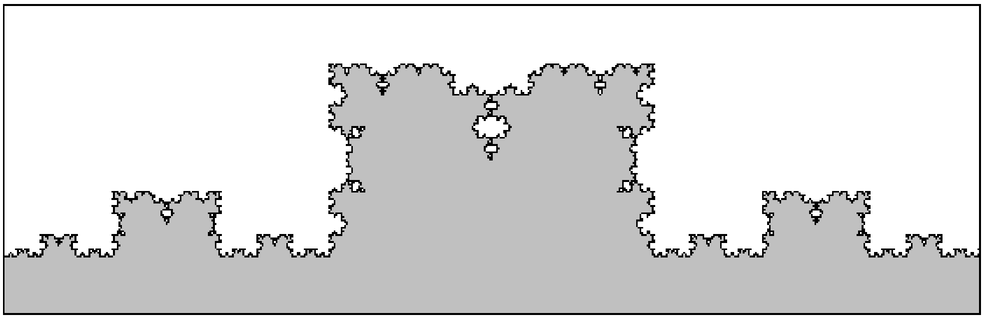


Stačí malá změna a fraktál se výrazně promění:

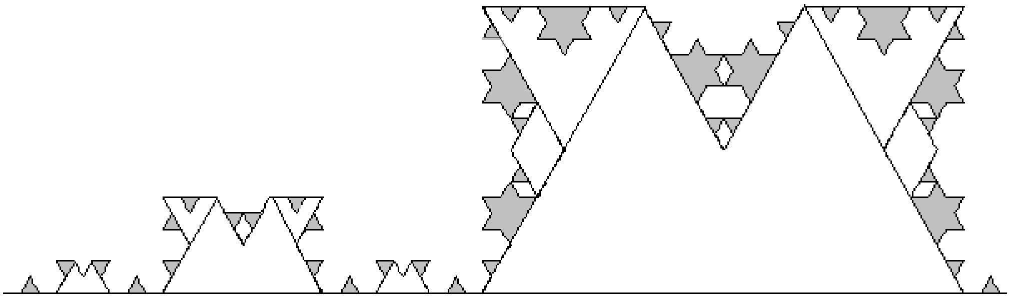


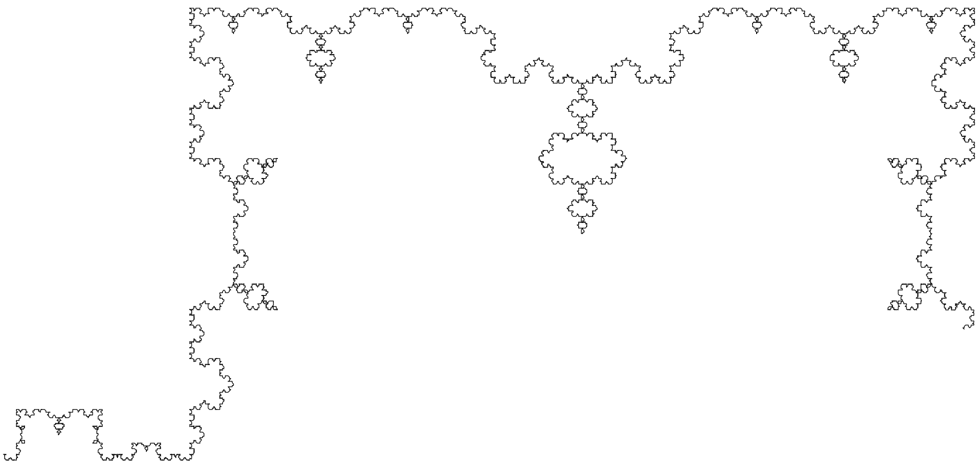


6. Variace na Cantorovo diskontinuum



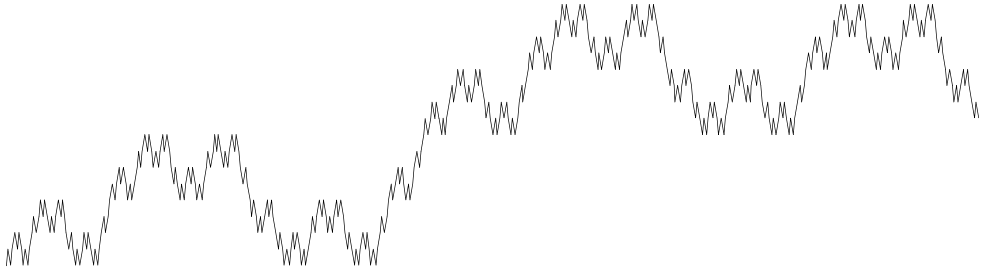
Návod, jak upravit předchozí strukturní definici, plyne z tohoto obrázku:





Podíváte-li se pozorně na horní obrázek, obálka křivky by vám mohla připomínat Petrovu funkci vytvořenou na základě trojkové číselné soustavy — tam se však objevují „skoky, které se nechtějí zaplnit“.

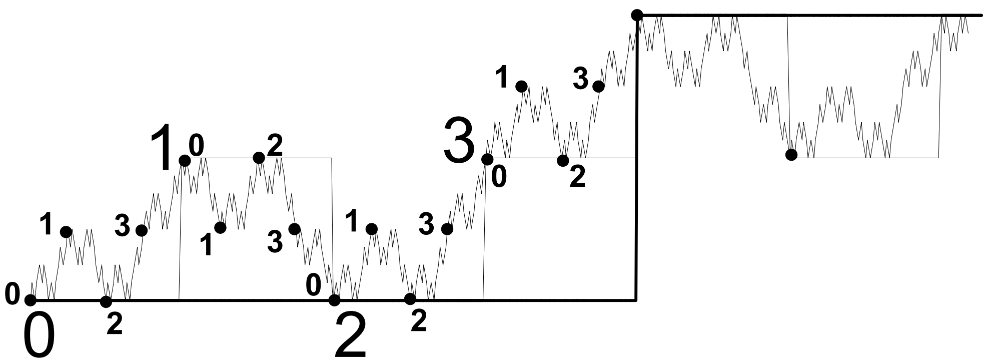
7. Spojnicový fraktál podle Petra



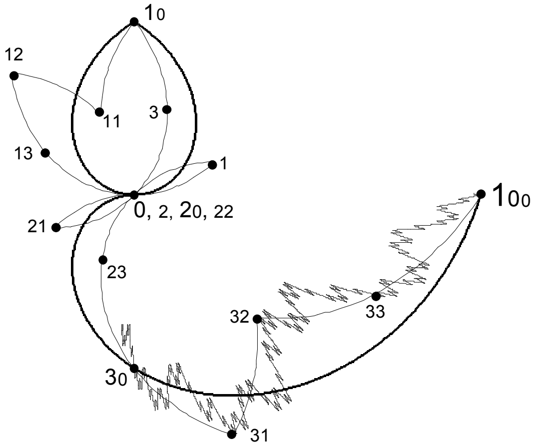
```
Define StrukturníOperace.StrukturníSoučet
    Define Člen{MaximálníŘád}
        If {Číslice} = 1 or 3
            Člen{MaximálníŘád}.Hodnota := M
        ElseIf {Číslice} := 0 or 2
            Člen{MaximálníŘád}.Hodnota := 0
        End If
    End Define

    Define Člen {Řád − 1}
        For Each {Číslice} In KolekceČíslic(1, 3)
            If Člen{Řád}.Hodnota := 0
                Člen{Řád − 1}.{Číslice}.Hodnota := ½Člen{Řád}.{Číslice}.Hodnota
            Else
                Člen{Řád − 1}.{Číslice}.Hodnota := −½Člen{Řád}.{Číslice}.Hodnota
            End If
        End Each
        For Each {Číslice} In KolekceČíslic(0, 2)
            Člen{Řád − 1}.{Číslice}.Hodnota := 0
        End Each
    End Define
End Define

Define KorekcePodlePetra
    For Each {Číslice} In KolekceČíslic(3)
        Člen{Řád − 1}.{Číslice}.Hodnota := −Člen{Řád − 1}.{Číslice}.Hodnota
    End Each
End Define
```



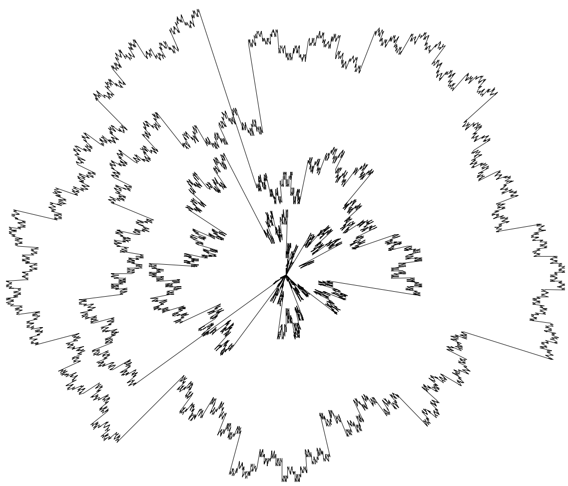
Petrova funkce v polárních souřadnicích:



8. Chaos

Jak bylo uvedeno v úvodu, Petr [22] si položil za cíl definovat spojitou funkci, která nemá v žádném bodě derivaci. Podařilo se mu však něco víc: do periodické funkce „vložil“ nepatrnou odchylku, která s přibývajícími řády nabývá stále větších rozměrů. Navíc je tato odchylka definována tak, že zachovává původní „periodický motiv“. Při pohledu na graf Petrovy funkce se nabízí srovnání s chytrou horákyní ve známé české pohádce: „funkce je spojitá, ale v žádném bodě nemá derivaci; ve funkci se opakuje stále stejný motiv, ale přesto není periodická; ten stále se opakující motiv není zase tak úplně stejný, protože je do něj vložena odchylka, která je pro nejnižší řády sice nepatrná, ale s přibývajícími řády nabývá obrovských rozměrů; nejde vlastně ani o odchylku, ale jenom o původní periodický motiv s opačným znaménkem. . . “

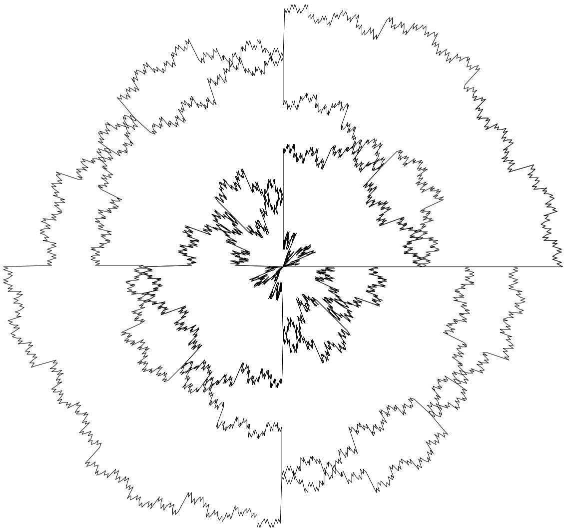
Zobrazení „zjednodušené Petrovy funkce“ ve čtyřkové soustavě v polárních souřadnicích:



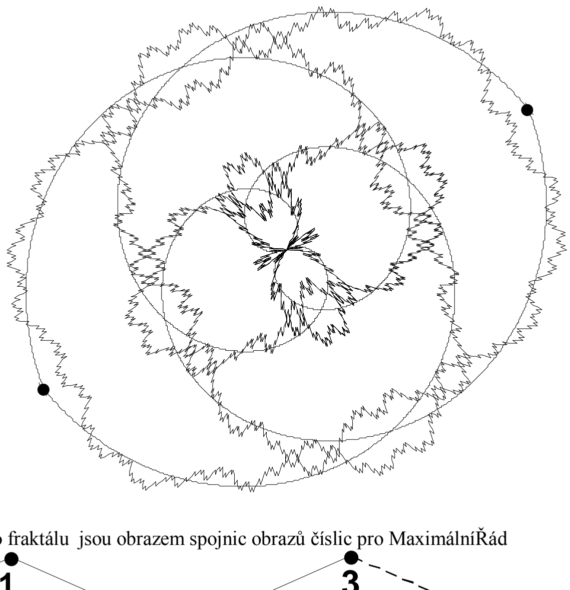
Při převodu fraktálu zobrazeného v kartézských souřadnicích do zobrazení v polárních souřadnicích je třeba vhodně zvolit přírůstek úhlu průvodiče:

$$\Delta\varphi_0 = A\pi/\{\text{Základ}\}^B,$$

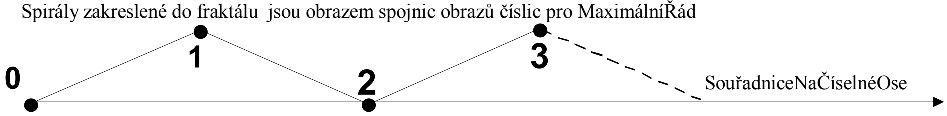
kde A, B jsou přirozená čísla.



Zobrazení spojnicového fraktálu podle Petra v polárních souřadnicích:

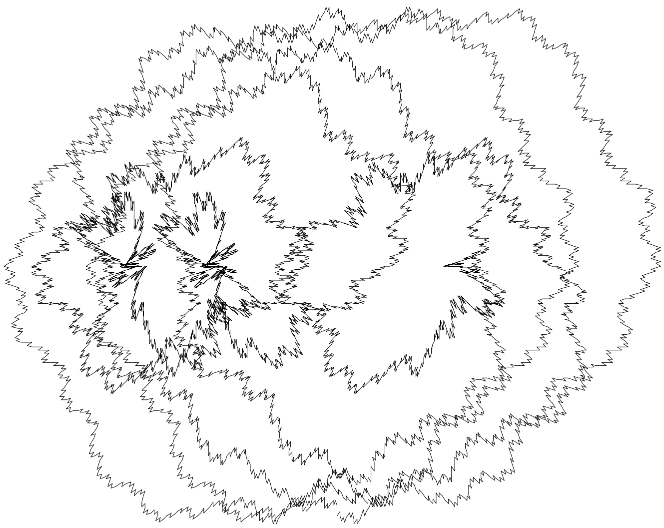


Spirály zakreslené do fraktálu jsou obrazem spojnic obrazů číslic pro MaximálníŘád

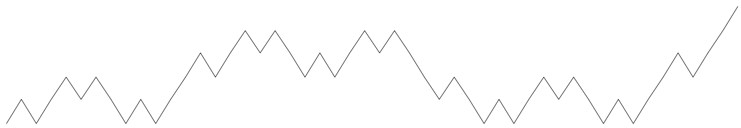


Mraky se rozlévají po obloze a tvoří neurčité formace, ano, ovšem, najdou se i takové, které nejsou neurčité, jejich špice stojí vyrovnaně vedle sebe nebo se valí v pravidelně rýhovaných útvarech, připomínajících mozkovou kůru.

James Gleick

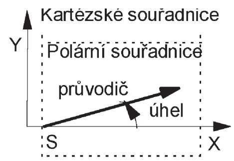


Vnímavý pozorovatel v tomto „mračnu“ nachází neustále se obměňující motiv:

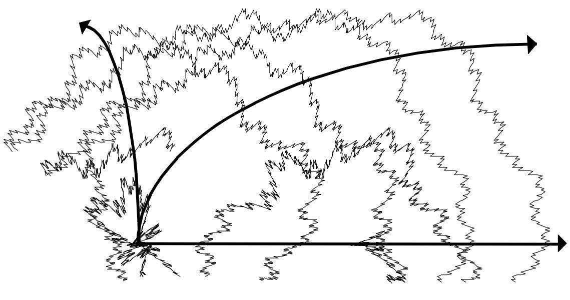


Zobrazením fraktálu v polárních souřadnicích se narušily proporční vztahy uvnitř, ale zachovala se jeho „uspořádanost“. Z pohledu výchozích kartézských souřadnic byla do systému vložena nutná nelinearita.

Nepatrným posouváním středu souřadnicové soustavy se naruší proporční vztahy uvnitř fraktálu i jeho „uspořádanost“, nemění se však základ číselné soustavy ani na něm závisející vlastnosti.

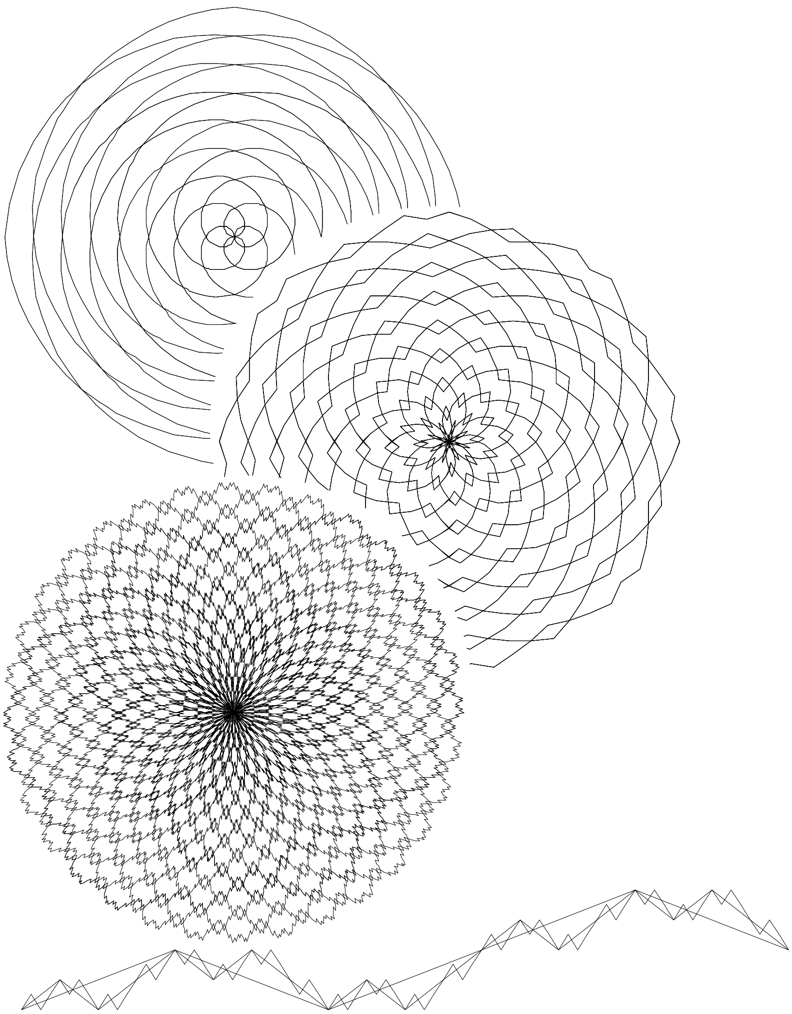


Tento posun, u Petrovy funkce podporovaný vloženou odchylkou, se projeví vznikem „za sebou se valících vln“. Každá z „vln“ se přitom skládá z několika různě modifikovaných základních motivů.



9. Závěr

Jak bylo ukázáno v tomto článku, je možno jednotlivým objektům „strukturně definovaných číselných soustav" přiřazovat libovolné vlastnosti. To umožňuje vytvářet velice zajímavé fraktály na základě jednoduchých a hlavně algoritmizovatelných pravidel. Zároveň to ukazuje jedno z možných využití *objektově orientovaného programování* (OOP — *Object oriented programming*) či obecněji *objektově orientovaného přístupu* (*Object oriented paradigm*) jako takového, který se již netýká jen vlastního procesu programování, ale i například metodiky řešení celého problému, reprezentace světa v počítači apod. Úvod do OOP bývá popisován v učebnicích programování i v uživatelských příručkách k různým aplikacím. Uveďme zde např. [47]–[54]; tyto publikace však umožňují i podstatně hlubší proniknutí do celé problematiky.



Motivem pro vytvoření tohoto fraktálu je Petrova funkce.

L i t e r a t u r a

- Práce uveřejněné v Pokrocích matematiky, fyziky a astronomie:

[1] Mišík, K.: *Derivácia a spojitosť.* PMFA *16* (1971), 301–310.
[2] Macháček, M.: *Teorie dynamických systémů.* PMFA *27* (1982), 162–173.
[3] Preiss, D.: *Nederivovatelné funkce.* PMFA *28* (1983), 148–154.
[4] Redakce PMFA: *Benoit Mandelbrot a fraktální geometrie.* PMFA *33* (1988), 156–162.
[5] Preiss, D.: *Něco málo matematiky k fraktálům.* PMFA *33* (1988), 162–164.
[6] Kůrková, V.: *Fraktální geometrie.* PMFA *34* (1989), 267–277.
[7] Král, J.: *Hausdorffovy míry a odstranitelné singularity řešení parciálních diferenciálních rovnic.* PMFA *35* (1990), 319–330.
[8] Grygar, J.: *Chaos ve sluneční soustavě.* PMFA *36* (1991), 141–148.
[9] Dvořák, I., Šiška, J.: *Teorie deterministického chaosu a některé její aplikace.* PMFA *36* (1991), 73–91, 155–171.
[10] Pekárek, L., Kolařík, P.: *Deterministické fyzikální soustavy s chaotickým chováním.* PMFA *36* (1991), 319–335.
[11] Wojtzak, L.: *Chaos a fantasie.* PMFA *39* (1994), 108–112.
[12] Brunovský, P.: *Koniec chaosu?* PMFA *40* (1995), 233–242.

- Pojednání věnovaná spojitým nediferencovatelným funkcím a jiným fraktálním křivkám:

[13] Darboux, G.: *Mémoire sur les fonctions discontinues.* Annales de l'Ecole normale (2) IV (1875), 57–112.
[14] du Bois-Reymond, P.: *Versuch einer Classification der willkürlichen Functionen reeler Argumente nach ihren Aenderungen in den kleinsten Intervallen.* Journal für die reine und angewandte Mathematik *79* (1875), 21–37.
[15] Dini, V.: *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali.* Pisa 1878.
[16] Cantor, G.: *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre.* Leipzig 1883.
[17] Lerch, M.: *Über die Nichtdifferentiirbarkeit gewisser Function.* Journal für die reine und angewandte Mathematik *92* (1888), 126–138.
[18] Cellérier, Ch.: *Note sur les principes fondamentaux de l'analyse.* Bulletin des sciences mathématiques *14* (1890), 142–160.
[19] Peano, G.: *Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane.* Mathematische Annalen *36* (1890), 157–160.
[20] Takagi, T.: *A simple example of the continuous function without derivative.* Tokyo sugaku butsurigaku kwai kiji (English and Japan) *1* (1903), 176–177.
[21] von Koch, H.: *Sur une courbe continue sans tangente obtenue par une construction géométrique élémentaire.* Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik, utgivet af K. Svenska Vetenskaps-Akademien. Stockholm *1* (1903/04), 681–702.
[22] Petr, K.: *Příklad funkce spojité nemající v žádném bodě derivace.* Časopis pro pěstování matematiky a fyziky *49* (1920), 25–31.
[23] Rychlík, K.: *Funkce spojité nemající pro žádnou hodnotu proměnné derivace v tělese čísel Henselových.* Časopis pro pěstování matematiky a fyziky *49* (1920), 222–223.
[24] Rychlík, K.: *Eine stetige nicht differenzierbare Funktion im Gebiete der Henselschen Zahlen.* Journal für die reine und angewandte Mathematik *52* (1922–23), 178–179.
[25] Rychlík, K.: *Über eine Funktion aus Bolzanos handschriftlichen Nachlasse.* Věstník Královské české společnosti nauk 1921–22, č. 4, 6 stran.
[26] Jarník, V.: *O funkci Bolzanově.* Časopis pro pěstování matematiky a fyziky *51* (1922), 248–264.
[27] Jašek, M.: *Aus dem handschriftlichen Nachlass B. Bolzano's.* Věstník KČSN 1920–21, č. 1, 1–32.
[28] Jašek, M.: *Funkce Bolzanova.* Časopis pro pěstování matematiky a fyziky *51* (1922), 69–76.

[29] JAŠEK, M.: *O funkcích s nekonečným počtem oscilací v rukopisech Bernarda Bolzana.* Časopis pro pěstování matematiky a fyziky *53* (1923–24), 102–109.
[30] VAN DER WAERDEN, B. L.: *Ein einfaches Beispiel einer nicht-differenzierbaren stetigen Funktion.* Mathematische Zeitschrift *32* (1930), 474–475.
[31] BOLZANO, B.: *Functionenlehre.* Ed. K. RYCHLÍK, Královská česká společnost nauk, Praha 1930.
[32] HLAVÁČEK, M.: *Příklad funkce spojité nemající v žádném bodě derivace.* Časopis pro pěstování matematiky a fyziky *60* (1931), 157–159.
[33] PETR, K.: *Poznámka k článku pana Hlaváčka.* Časopis pro pěstování matematiky a fyziky *60* (1931), 160–161.
[34] PREISS, D.: *Nederivovatelné funkce.* Konference českých matematiků, Zvíkovské podhradí. Matematická vědecká sekce JČSMF, Praha 1981, 13–18.
[35] VESELÝ, J.: *Matematická analýza pro učitele II.* Matfyzpress, Praha 1997.

• Monografie věnované fraktálům:

[36] MANDELBROT, B. B.: *Les objects fractals: forme, hasard et dimension.* Flammarion, Paris 1975.
[37] MANDELBROT, B. B.: *The Fractal Geometry of Nature.* W. H. Freeman and Company, San Francisco 1982.
[38] FALCONER, K. J.: *The Geometry of Fractal Sets.* Cambridge University Press, Cambridge 1985.
[39] FALCONER, K. J.: *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications.* Wiley, Chichester 1990.
[40] PEITGEN, H.-O., FICHTER, P. H.: *The Beauty of Fractals.* Springer Verlag, Berlin 1986.
[41] JÜRGENS, H., PEITGEN, H.-O., SAUPE, D.: *Fractals for the Classroom, part I, II.* Springer Verlag, New York 1992.
[42] DAVID, G., SEMMES, S.: *Fractured Fractals and Broken Dreams (Self–Similar Geometry through Metric and Measure).* Clarendon Press, Oxford 1997.

• Další publikace:

[43] ŠUSTER, G.: *Determinirovanyj chaos.* Mir, Moskva 1988.
[44] MAREK, M., SCHREIBER, I.: *Chaotic Behavior of Deterministic Dissipative Systems.* Academia, Praha 1991.
[45] SLAVÍK, P., SEIGE, V., SERÉDI, L.: *Fraktály a deterministický chaos.* Softwarové noviny *6* (1995), č. 8, 35–41.
[46] GLEICK, J.: *Chaos: Vznik nové vědy.* Ando Publishing, Brno 1996.

• Literatura k objektově orientovanému programování:

[47] POLÁK, J., MERUNKA, V.: *OOP I–IV.* Softwarové noviny *4* (1993), č. 2, 80–82; č. 3, 84–88; č. 5, 98–101; č. 6, 114–116.
[48] POLÁK, J., MERUNKA, V.: *Objektově orientované pojmy.* Softwarové noviny *4* (1993), č. 8, 82–84.
[49] MOLHANEC, M.: *Objektově orientované metody.* Softwarové noviny *4* (1993), č. 11, 59–62.
[50] JILKOVÁ, H., RYANT, I.: *Tvorba aplikací v objektovém prostředí.* Grada, Praha 1994.
[51] KALIŠ, J.: *Excel — učebnice programování.* GComp, Praha 1995.
[52] BUDD, T.: *An Introduction to Object-Oriented Programming.* Addison-Wesley, Reading 1997.
[53] CASTAGNA, G.: *Object-Oriented Programming: A Unified Foundation.* Birkhäuser, Boston 1997.
[54] SADR, B.: *Unified Objects: Object-Oriented Programming Using C++.* IEEE Computer Society Press, Los Alamitos 1998.