R. W. Hamming

Matematika na vzdálené planetě

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 46 (2001), No. 3, 219--231

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/141086

Matematika na vzdálené planetě

R. W. Hamming

Z recenze Dennise F. Almeidy v Math. Reviews (99h:00008):

Hamming využívá spekulace o tom, jak by se mohla matematika vyvíjet na vzdálené planetě, ke zpochybnění obecně sdíleného vnímání matematiky. Argumentuje spíše z pozice uživatele matematiky než z pozice čistého matematika. V podstatě tvrdí, že platonismus v matematice je neudržitelná filozofie. Je kritický k některým zpochybnitelným praktikám v matematice včetně důkazů sporem a „her se skleněnými kuličkami“, kam zahrnuje nemožnost trisekce úhlu pomocí pravítka a kružítka. O posledním tvrzení říká, že to není matematická věta z reálného světa.

Článek ukazuje, že Hammingovy názory se během jeho dlouhé a vynikající životní dráhy vyvíjely: od váhavé loajality k platonismu ke zřejmému pragmatismu. Hamming připouští, že kdysi napsal, že matematika je „rozšiřování, zobecňování a abstrakce“, ale nyní věří, že to možná není nic jiného než „jasné myšlení“. Článek si rozhodně zaslouží, aby se o něm diskutovalo na matematických pracovištích.

Cílem této přednášky je, abyste se vážně zamysleli nad otázkou, do jaké míry je matematika libovolná a do jaké míry je pevně daná, a také nad tím, co si o povaze matematiky myslíte.

Tento proslov vznikal v mé hlavě již dávno, a to v počátcích kampaně SETI (pátrání po inteligentních mimozemšťanech), kdy se k tomuto průzkumu používaly obrovské satelitní antény v Arecibu. Nyní po mnoha letech provádíme toto pátrání mnohem efektivněji a přesto jsme dosud nezjistili žádné určité známky života.

Matematika má tři stránky. Za prvé jsou zde postuláty, axiomy nebo předpoklady, ať už tomu budeme říkat jakkoliv. Bourbakiho přístup se soustřeďoval právě na tyto záležitosti. Alternativní postuláty popisující tutéž matematiku nejsou považovány za jinou matematiku.

Za druhé jsou zde definice; ty určují velkou část matematiky. Například standardní definice funkce jedné reálné proměnné umožňuje pozorovat mnoho zvláštností. Jestliže uvažujeme spojitou „zubatou“ funkci, jejíž graf se skládá z úseček vedených pod úhly $+45°$ a $-45°$ a jestliže provedeme rotaci souřadnicového systému o $45°$, potom dostaneme něco, co už není spojitou funkcí, a dokonce ani funkcí [protože příslušná lomená čára přestane být grafem funkce ve smyslu definice]! Euler ani Fourier by s něčím takovým nesouhlasili! Myšlenka spojitosti vznikla z představy, že kreslíme (ideálním) perem křivku, aniž bychom pero zvedli, a nemá tedy žádnou souvislost s volbou nějakých souřadnic. To, že jsme zkreslili jednoduchou intuitivní myšlenku

Mathematics on a distant planet. Amer. Math. Monthly *105* (1998), no. 7, 640–650.

Přeložil Oldřich Kowalski.

spojitosti tak, že začala být závislá na volbě souřadnic, se mi zdá pošetilé, neboť pojem funkce a pojem křivky se tak staly různými pojmy.

Za třetí jsou zde určité povolené způsoby logického odvozování. Způsoby logického uvažování jsou dnes zřídkakdy zpochybňovány, a proto se jimi budeme zabývat jen krátce a jen v jednom směru.

Nejprve však bych se rád zmínil o některých epizodách z mého života, které formovaly mé názory. První z nich se udála v Los Alamos za druhé světové války, když jsme pracovali na vývoji atomové bomby. Krátce před první skutečnou jadernou zkouškou (jistě chápete, že nemohl být proveden žádný experiment v malém měřítku — buď máte kritické množství materiálu, nebo je nemáte) mě požádal jeden kolega, abych zkontroloval některé jeho numerické výpočty, a já jsem souhlasil s tím, že to vše postoupím některému ze svých podřízených. Když jsem se zeptal, o co zde jde, řekl mi: „Jde o pravděpodobnost toho, že pokusná bomba zapálí celou atmosféru.“ Poté jsem se rozhodl provést kontrolu osobně! Nazítří, když si kolega přišel pro odpověď, poznamenal jsem: „Aritmetické výpočty jsou zjevně v pořádku, ale nejsem si jist, pokud jde o účinné průřezy záchytu pro kyslík a dusík — zřejmě se nedají udělat žádné experimenty na potřebné energetické úrovni.“ Jeho odpověď byla odpovědí fyzika matematikovi: on mě pouze žádal o kontrolu výpočtů, ne fyziky, a odešel. Řekl jsem si: „Co jsi to, Hammingu, provedl, že se účastníš na podniku ohrožujícím všechno živé ve vesmíru a přitom toho víš tak málo o podstatných věcech?“ Přecházel jsem sem a tam po chodbě, až se mě jeden přítel zeptal, co mě trápí. Řekl jsem mu to. Jeho odpověď zněla: „Neboj se, Hammingu, nikdy se nenajde žádný žalobce.“ Ano, riskovali jsme veškerý život v nám známém vesmíru na základě nějaké matematiky. Matematika není pouze planý druh umění; je podstatnou součástí naší společnosti.

Od toho dne jsem často dělal (samozřejmě méně dramatické) předpovědi založené na konvenční matematice, zejména když jsem pracoval v Bellových telefonních laboratořích. Jestliže zmenšíte rozměr křídel na jednu třetinu a vzdáte se šikmého vypálení střely, odstartujete mnohem lépe a zasáhnete cíl v mnohem větší vzdálenosti; jestliže sestrojíte tranzistor tímto způsobem místo jiným, bude to znamenat velký přínos; centrální úřad postavený podle tohoto projektu bude méně zahlcen než v případě jiného projektu, vezme-li se v úvahu předpokládané provozní zatížení atd. Mnohokrát jsem učinil od svého psacího stolu předpovědi o reálném světě, které byly založeny na matematice. Samozřejmě že se Příroda nestará o moje výpočty ani o použité matematické postuláty, ale důsledky mohou být vážné. Proto má zvláštní důležitost zeptat se, které druhy matematiky mohou ovlivnit můj život a které ne. To je ta otázka!

Vraťme se zpět k hlavnímu tématu. Připomeňme si, že základní hypotéza [při pátrání po inteligenci ve vesmíru] je, že se nacházíme v obousměrné komunikaci se vzdálenou civilizací pomocí radiových vln. Věříme, že jejich fyzikální a chemický svět je podobný našemu, tedy že mají také gravitaci, setrvačnost, teplo, zákon zachování energie, termodynamiku, entropii a jiné detaily z našeho světa. Že mají tytéž fyzikální problémy jako my a musí se s nimi vyrovnat. Pokud věříte ve stvoření světa a tedy v Boha, potom je ovšem On mohl stvořit velmi odlišné od nás, ale jestliže věříte v evoluci, potom se museli vyvíjet podle stejných přírodních zákonů, s rostoucí schopností volného křížení na všech stupních vývoje, od jednoduchých začátků až po jejich nynější složitost. Galileo Galilei jednou řekl: „Matematika je jazyk přírody.“ Takže tváří v tvář stejným přírodním zákonům musí jejich matematika být hodně podobná té naší.

Bezprostřední otázka zní, jaké způsoby komunikace bychom mohli očekávat s těmito bytostmi — jistě nemluví anglicky ani žádným jiným pozemským jazykem. Podotýkám, že ačkoliv na Zemi máme mnoho různých přirozených jazyků, zdá se, že máme v podstatě jen jeden jazyk pro matematiku. Budou mít i oni takový univerzální jazyk?

Když jsem každé léto navštěvoval na dva týdny vědecké laboratoře v Los Alamos jako konzultant, brzy jsem začal klást tyto otázky svým přátelům fyzikům. Za již uvedeného předpokladu všichni souhlasili s tím, že mimozemšťané by měli mít v podstatě stejnou matematiku. Ale slova „v podstatě“ potřebují vysvětlení. Všichni fyzikové vědí, že kvantová mechanika má tři různé popisy: vlnový popis, maticový popis a existuje též grupově-teoretický přístup. Tedy daná soustava experimentálních dat nebo, chcete-li, sama příroda nemusí být podložena jedinou teorií. Padl zde argument, že mimozemšťané musí mít něco podobného Maxwellovým rovnicím. Ale tyto rovnice vyžadují kalkulus, víceméně v té formě, jak jej známe my.

Lidé s velkou představivostí si mohou v tomto směru představit téměř cokoliv a píší vědecko-fantastické povídky o obláčcích plynu, které jsou vnímajícími bytostmi, ale když je přinutíte zamyslet se nad tím, co je skutečně pravděpodobné a co jsou pouhé jalové výmysly, mnohé z těchto vrtochů fantazie rázem uvadnou. Skutečně, v souvislosti s přistáním na Měsíci někteří lidé tvrdili, že jeho povrch může být pokryt 17 stopami prachu a že každá sonda se po přistání v tomto prachu utopí. Ukázalo se, že povrch vypadá skoro tak, jak jsme si představovali — očekávali jsme více eroze způsobené dopadajícími částicemi a solárním větrem a méně eroze způsobené vodou nebo obyčejným větrem, a to z prostého důvodu, že na Měsíci existuje jen nepatrné množství atmosféry. Proto mám sklon ignorovat divoké módní nápady. Ve skutečnosti, když je všechny sepíšete, potom součet pravděpodobností všech těchto nekonvenčních předpokladů je tak malý, že je můžete ignorovat a předpokládat, že Měsíc se v rozumné míře podobá Zemi.

S jalovými spekulacemi se nikam nedostaneme; musíme začít od nějakého základu. Připomněl jsem, že Descartes, když začal přemýšlet o světě, zjistil jednou, že mnohé z toho, co ho naučili, byla nepravda a za své heslo si zvolil „myslím, tedy jsem“. Rozhodl jsem se začít s Kroneckerovou klasickou poznámkou „celá čísla stvořil Bůh, zbytek je dílem člověka“. Můžete předstírat, že nevěříte v něco jiného, ale nutnost žít, přežívat a rozlišovat jednu věc od druhé pro mne znamená, že pravděpodobně máte diskrétní výpočetní soustavu, která je neomezená rozsahem — celá čísla jsou konečná a lineárně uspořádaná, ale množina celých čísel je neomezená.

Peanovy postuláty pro celá čísla jsou zábavné, ale určitě si nikdo skutečně nemyslí, že tyto postuláty dávají vzniknout celým číslům; ve skutečnosti, pokud by se ukázaly jako nedostatečné, můžeme je změnit a dostat to, co chceme. Naše představy o celých číslech jsou nezávislé na Peanových postulátech!

Euklidovská geometrie je svázána se spojitostí. Staří Řekové nakonec čelili problému existence dvou přístupů, spojitého a diskrétního, a popravdě řečeno dopadli neslavně, stejně špatně jako my. Byly zde dvě filozofické školy — ta, která lpěla na neexistenci změn (věc, která je sama sebou, se nemůže změnit a zůstává sama sebou), a ta, která věřila ve změnu jakožto základ vesmíru (Hérákleitos: všechno podléhá neustálé změně a nevstoupíš dvakrát do téže řeky). Zénónovy paradoxy byly, jak věřím, dramatickým pokusem poukázat na základní potíže, které vznikají mezi diskrétním a spojitým hlediskem. Vezměme jen jeden z nich, paradox letícího šípu. Pokud se čas skládá z okamžiků, tak jako se reálná přímka pokládá za složenou z bodů, pak v každém okamžiku je šíp v některé poloze, a tedy se nemůže nikdy pohybovat. Něco podobného můžeme říci o přímce — ta je složená z bodů, které nemají žádnou dimenzi, ale celá přímka má nenulovou dimenzi. Je to rozumné? Na druhé straně ti, co věřili ve změnu, museli nakonec říci, že existuje nějaká mez v naší schopnosti rozdělovat na části a že je tedy svět složen z nedělitelných atomů. Diskrétní přístup uvízl v logickém závěru, že není možná žádná změna, změna je pouhou iluzí, protože jinak by nic nebylo určité a pevné. Spojité a diskrétní se nedají smísit, jsou jako olej a voda.

Mám sklon věřit, že na vymyšlené vzdálené planetě dojdou její obyvatelé ke stejnému druhu logiky, jako máme my, a to dokonce, i kdyby jejich život byl založen na bázi křemíku místo na bázi uhlíku. Koneckonců i oni se setkávají se stejným druhem fyzikálního vesmíru ve své blízkosti, a tedy budou mít stejné problémy, na které důrazně upozornil Zénón. Znovu opakuji, že jak si všiml Galilei, matematika je jazykem vědy, a protože jejich hmotný svět se řídí stejnými zákony jako náš, nemohou se příliš odchýlit od matematiky, kterou známe my. Nebo snad mohou?

Řekové uskutečnili přechod od celých čísel ke zlomkům, racionálním číslům, k číslům vyjadřujícím poměry a já věřím, že na vzdálené planetě učinili totéž. Ale Řekové, když zjistili, že délka úhlopříčky jednotkového čtverce není racionální číslo, rozhodli se, že to vůbec není číslo; v nejlepším případě že je to jakási veličina. Velká část Euklidových *Základů*, počínaje pátou knihou, se zabývá Euklidovou teorií veličin. Někdy ve středověku, spolu se vznikem desetinného zápisu čísel, jsme se patrně rozhodli, že iracionální čísla jsou také čísla. Museli mimozemšťané dojít ke stejnému závěru? Pravděpodobně měli podobně jako Euklidés dvě paralelní teorie. Transcendentní čísla, jako jsou π, γ a e, se zdají být nevyhnutelná a oni na své planetě s nimi museli nějakým způsobem zacházet.

V roce 1937 Turing zavedl do logiky Turingův stroj (na papíře, nikoliv jako skutečný výrobek), aby vyhověl Hilbertově touze po mechanických důkazech, o kterých Hilbert předpokládal, že to budou dokonalé důkazy platné pro všechny časy. Tím Turing změnil definici [reálných] čísel! Předtím byla čísla zřejmě ztotožňována se svými reprezentacemi (skoro vždy v desítkové soustavě, jako by Bůh měl pět prstů! — výjimečně ve dvojkové soustavě). Turing se soustředil na otázku, co vlastně stroj může vyprodukovat při použití programů, které jsou konečnými posloupnostmi instrukcí (vyjádřených pro pohodlí ve dvojkové soustavě) a které po spuštění stroje tento stroj v jistém okamžiku zastaví, takže poznáme, že jsme obdrželi odpověď. Tudíž *vyčíslitelné číslo* [computable number] je takové reálné číslo, pro které existuje nějaký program umožňující na Turingově stroji určit takový počet jeho číslic (libovolný, ale nutně konečný), jaký si předem zadáme.

To znamená, že Turing ve snaze získat mechanické důkazy změnil pojem čísla z jeho *reprezentace* pomocí číslic [kterých je obecně nekonečně mnoho] na odpovídající *proces* získání tolika z těchto číslic, kolik si jich přejeme mít. Číslo π je nyní totéž co nějaký program, například program, který generuje jeho prvních 6 miliard číslic a ne už jako dříve nekonečné desetinné číslo. Tím Turing učinil nový malý krok směrem od aktuálního nekonečna zpět ke konečnu, které nemá omezení, totiž k potenciálnímu nekonečnu ve smyslu Aristotelově, což je protiklad aktuálního nekonečna ve smyslu Cantorově. Většina matematiků si patrně není vědoma této změny, ale ti, kteří se zabývají výpočty, ji shledávají přirozenou. Tato změna v definici obrací vniveč některé staré důkazy a výsledky a současně umožňuje jiné důkazy jiných výsledků.

Tato změna od nekonečna ke konečnu je v souladu s vývojem mnoha jiných partií matematiky; viz například „delta-epsilonový“ proces [v definici spojitosti funkce]. Znovu připomínám svoji pochybnost, že by se mimozemšťané na své planetě mohli vyhnout problémům spojeným s rozporem mezi spojitým a diskrétním a z toho plynoucím potížím s nekonečnem. Tak či onak měli pravděpodobně svého Zénóna s jeho paradoxy a také jiné potíže. Koneckonců žijeme v konečném světě a stará myšlenka, že $\frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots$ atd., je v rozporu s naším vlastním přesvědčením a pravděpodobně i s jejich přesvědčením.

Aniž bychom se pokoušeli o důkaz, a já se k té záležitosti týkající se matematické přesnosti a důkazů dostanu za chvíli, můžeme vidět toto: protože program je definován jako konečná posloupnost instrukcí, jsou možné počítačové programy vesměs konečné, ale množina všech programů je neomezená a tedy spočetná. Odtud vidíme, že množina všech vyčíslitelných čísel jakožto podmnožina množiny všech programů je rovněž spočetná. Poznamenejme, že podmnožina programů v množině řetězců instrukcí není dobře definována ve smyslu, který bude dále upřesněn, že totiž nemůžeme říci, zdali nějaký řetězec instrukcí je programem nebo ne. Ale každopádně většina z nás věří, že reálných čísel od nuly do jedné je nespočetně mnoho, protože nám to bylo tak řečeno a protože nám byl ukázán jakýsi druh důkazu.

V logice máme známou Löwenheimovu-Skolemovu větu, říkající, že každá konečná množina postulátů má spočetnou realizaci — a nyní opět, aniž bych vám nabídl důkaz, můžete jistým způsobem vidět, proč by měla být pravdivá — jednoduše nepřijmeme nekonečně dlouhé důkazy. Ale jak potom můžete z konečného počtu postulátů dokázat nespočetnost množiny čísel definovaných těmito postuláty, když je jisté, že cokoliv můžete dokázat z těchto postulátů, musí platit i pro každou jejich realizaci? Připomeňme tedy Cantorův důkaz a jeho diagonalizační proces, který využívá *reprezentace* čísel [s nekonečně mnoha číslicemi]. Čemu dát přednost, intuitivně zřejmému důkazu, že každý konečný počet postulátů připouští spočetnou realizaci, nebo diagonalizačnímu procesu použitému k důkazu nespočetnosti? Co by udělali mimozemšťané na své planetě, až by se dříve nebo později dostali k této otázce? Já mám sklon věřit, že by Cantora *v posledním období jeho života* zavřeli do ústavu pro choromyslné. K jeho diagonalizačnímu procesu se vrátím později.

Mohou mi vytknout, že jsem nezašel příliš hluboko do konvenční logiky. Jako doktorandský student jsem našel a prostudoval Booleovy *Zákony myšlení* a shledal jsem, že jsou zajímavé, důležité a důvěryhodné. Ale když prozkoumám jen pouhé úvody do matematické logiky, nacházím zde neuvěřitelné hnidopišství. Nemohu uvěřit, že by kterákoliv z těch odlišností nebo dokonce všechny ty jemné odlišnosti dohromady mohly někdy udělat z prvočísla složené číslo, zpochybnit Cauchyovu větu z komplexní analýzy nebo přimět raketu, aby místo zasažení cíle jej o celou míli minula. Aktivity logiků se zdají být nedůležité pro matematiku v tom smyslu, jak ji chápu já, a logika je spíše ideální hra, kterou si hrají čistí matematikové pro svou vlastní zábavu.

Dokud se omezíte na uspořádané posloupnosti a uspořádané množiny, pak přirozený způsob, jak vypočítat hustotu řekněme sudých čísel [v posloupnosti všech přirozených čísel], je vzít limitní poměr čísel s danou vlastností ke všem zkoumaným číslům a dostanete tak číslo $\frac{1}{2}$ pro hustotu sudých čísel. Vyhnete se pak paradoxním tvrzením, která zpočátku lidi matou, dokud se jim neujasní, že v takovém případě jsme použili zvláštní a spíše nepřirozený způsob srovnávání velikostí uspořádaných množin. Dokonce Galilei se zmiňuje o paradoxu, který se objeví, když zkusíte metodu vzájemně jednoznačného přiřazování mezi celými čísly; obzvláště si všiml, že metoda přiřazování dává stejný počet čtverců přirozených čísel, jako je počet všech přirozených čísel. Takové podivné výsledky neobdržíte, pokud užíváte [přirozeně] uspořádané množiny a počítáte hustoty v konečných intervalech. Cantor totiž použil vzájemně jednoznačného zobrazení k definici stejné velikosti množin, protože chtěl pracovat s *neuspořádanými* množinami. Nejsem si nijak jist, že na vzdálené planetě by si vybrali tento druhý způsob, a to má vážné důsledky pro Lebesgueovo integrování, které přiřazuje míru nula každé spočetné množině a tím i množině všech vyčíslitelných čísel [na reálné ose], a tedy podle mého názoru veškeré realitě, kterou vůbec můžete pojmenovat nebo o ní hovořit! Opravdu jsem více než 40 let tvrdil, že pokud by schopnost letadla létat závisela na tom, zda některé funkce, které se objeví ve výpočtech projektu, jsou lebesgueovsky, *ale ne riemannovsky* integrovatelné, pak bych do takového letadla nesedl. Vy snad ano? Dokáže příroda rozpoznat rozdíl? Pochybuji o tom. Samozřejmě, že se v této situaci můžete rozhodnout, jak je Vám libo, ale všiml jsem si, že jak léta běží, Lebesgueova integrace a ve skutečnosti celá teorie míry se zdá hrát stále menší a menší roli v jiných oblastech matematiky a vůbec žádnou v těch oblastech, které matematiku pouze používají. Nedávno se ukázalo, že Henstockův integrál, který je jednoduchým, rozumně přirozeným zobecněním Riemannova integrálu, je obecnější než Lebesgueův integrál se všemi jeho zvláštními vlastnostmi.

Vím, že velký Hilbert řekl: „Nenecháme se vyhnat z ráje, který pro nás stvořil Cantor.“ Já na to odpovídám: „Nevidím žádný důvod, abychom do toho ráje vcházeli.“ Skutečně, v době, kdy stále více lidí si zvyká používat počítače, mám sklon věřit, že na této Zemi se nakonec rozhodneme, že vystačíme s vyčíslitelnými čísly. Zřejmě nikdo nebude potřebovat nevyčíslitelné číslo! Vezměme například část klasické reálné osy od nuly do jedničky a odstraňme vyčíslitelná čísla. Zbývá nespočetně mnoho čísel a žádné z nich nemůžeme nikdy popsat (jak můžete dostatečně popsat číslo, jestliže nemůžete udat, přinejmenším implicitně, způsob jeho nalezení)! Přesto axiom výběru říká, že můžete některé z nich vybrat. Opravdu můžete? Které z nich to bude, když je nikdy nemůžete popsat tak, aby jiná osoba věděla, o čem mluvíte? Je axiom výběru rozumný? Je bezpečné být závislý na tomto axiomu v reálném světě? Stejně jako fyzikové se nakonec rozhodli po mnoha letech dohadování o vlastnostech éteru, že nic takového nemůže být změřeno, já rovněž věřím, že je lépe zcela ignorovat to, o čem nemůžete [konkrétně] hovořit nebo co nemůžete změřit.

Před mnoha lety, když jsem vzal do ruky jeden článek, abych si něco přečetl o nevyčíslitelných číslech, náhle jsem si uvědomil, že nikdo nepřijde do mé pracovny, aby si vyžádal nevyčíslitelné číslo. Jestliže se nikdy neobjeví, tak proč si dělat starosti? Tak jsem hodil ten článek nepřečtený do koše na odpadky!

Zde by již mělo být zřejmé, že si nemyslím, že matematické věty jsou skutečně dokazovány. Jak již dávno řekl G. H. Hardy, dáváme do oběhu nějaké symboly, jiní lidé je čtou a jsou jimi buď přesvědčeni, nebo ne. Pro prosté lidi, kteří věří všemu, co čtou a neberou sami nic v potaz, „důkaz je důkaz — prostě důkaz“, ale pro jiné lidi důkaz pouze poskytuje způsob, jak přemýšlet o nějaké větě, a záleží na jednotlivci, jaký si vytvoří názor. Formální důkazy, ve kterých úmyslně není obsažen žádný význam, mohou přesvědčit pouze formalisty a ti sami získaným výsledkům upírají jakýkoliv význam. Má toto být matematika, jakou máme používat, abychom porozuměli světu, ve kterém žijeme?

Když Shannon poprvé publikoval svou Teorii informace (1947), většina odborníků seznala, že věty jsou pravdivé, ale důkazy jsou nedostatečné. Profesor Doob z univerzity v Illinois přísně zkontroloval všechny důkazy a otevřeně zapochyboval o Shannonově matematické integritě. Tedy ještě jednou, existují dva velmi rozdílné názory na to, co je doopravdy matematika. A já nemohu žádným způsobem rozhodnout, zdali jeden nebo druhý zvítězil na vzdálené planetě nebo zdali, tak jako na Zemi, oba prosperují bok po boku s velmi malým vzájemným porozuměním. Pro mne jsou věty pravdivé nebo nepravdivé téměř zcela nezávisle na příslušných důkazech; moje vnitřní přesvědčení musí být konečným arbitrem toho, zdali přijmu nebo odmítnu část matematiky, se kterou se setkám. Ale puristé věří, že pravdivost vět určují postuláty, definice a přijatá logika!

Vraťme se nyní od módních a tajemných teorií, které se zdají v realitě neověřitelné, k Euklidově geometrii a jejím postulátům. Existuje standardní důkaz (užívající přijaté metody) věty, že všechny trojúhelníky jsou rovnostranné. „Důkaz“ spočívá, jak jistě nepochybujete, na nesprávně nakresleném obrázku. Hilbert rozpoznal, že Euklidés předpokládal, ale nedokázal fakta o protínání [přímek] a o vzájemném pořadí [bodů na přímce], a aby se vyrovnal s takovými „důkazy“, přidal mnohem více postulátů k těm, ze kterých vycházel Euklidés. Poprvé jsem si o tom četl jako doktorandský student a objevil jsem pozoruhodnou skutečnost, že žádná ze 400 nadbytečných matematických vět v Euklidově díle nebyla ani poté prokázána jako chybná! Po spoustě přemýšlení jsem si uvědomil, že Hilbert vytvořil přidané axiomy tak, aby tyto věty byly pravdivé — což znamená, že věty byly považovány za pravdivé bez ohledu na chabé důkazy (počínaje Větou 1) — a odtud jsem brzy zjistil, že Euklidés byl ve stejném postavení: znal spoustu pouček, o kterých „věděl, že jsou pravdivé“, včetně Pythagorovy věty, a musel jen najít postuláty, které by je podpořily. Matematika není prosté předpokládání libovolných postulátů a následné provádění dedukcí; je mnohem více: začnete s něčím, co chcete mít, a potom se snažíte najít podpůrné postuláty! Bourbaki přesto postupuje právě opačně.

Nyní se dostáváme k otázce důkazů a přesnosti. Dlouho jsem argumentoval, že se stále se zvyšujícími nároky na přesnost si nyní nemůžeme být jisti žádnými důkazy. Určitě většina našich běžných důkazů bude muset být dána do pořádku, stejně jako ve své době jsem zjistil, že musím dát do pořádku důkazy některých největších matematiků. Tak Gauss ve své doktorské disertaci, poté co ukázal, jak nedostatečné byly předchozí důkazy základní věty algebry, podal vlastní důkaz — ve skutečnosti během svého života podal několik důkazů — ale pravděpodobně ve všech z nich by moderní topolog shledal mezery! Dokázal Gauss vůbec někdy základní větu algebry? V jakém smyslu máme chápat, že ji dokázal? Polemizoval jsem s jedním velmi dobrým matematikem z matematického oddělení Bellových telefonních laboratoří a předložil jsem mu problém stále rostoucích nároků na důkaz. Spontánně tvrdil, že v té době (60. léta) jsme dosáhli konečného stupně přesnosti v důkazech a že už nebude nikdy zapotřebí záplatovat staré důkazy. Ovšem později, když se uklidnil a srovnal svoje myšlenky, mohl docela dobře změnit názor. Asi není pravda, že matematická věta může být jednou provždy dokázána nebo vyvrácena!

Takže se setkáváme se stejným problémem, pokud jde o vzdálenou planetu. Mohli objevit nějakou jistou, bezpečnou matematiku, která nevyžaduje ustavičně nové dokazování matematických vět, jako je tomu u nás? Může taková matematika existovat? Kéž bych to věděl.

A teď zpět ke geometrii. Na naší Zemi jsme se opatrně rozhodli ignorovat antisymetrii: dva rovinné trojúhelníky jsou pro nás shodné v případě, že si musíme odskočit do třetí dimenze, abychom je mohli položit na sebe. Zdá se mi pravděpodobné, že na vzdálené planetě mohli dát přednost tomu, že hned na počátku zavedli orientaci a nenutili většinu uživatelů geometrie osvojit si tento pojem až později. V naší klasické eukleidovské geometrii není místo pro důležitou větu, že ve třech dimenzích existují pouze dvě orientace, odpovídající levotočivému, resp. pravotočivému závitu.

Nyní se podívejme na jednu z nejčastěji citovaných vět eukleidovské geometrie o tom, že nemůžeme provést trisekci libovolného úhlu pomocí [jediné hrany] pravítka a kružítka. V určitém smyslu je to pravda, ale pokud připustíme na pravítku dvě rysky, potom je toto tvrzení nepravdivé (to věděl už Archimedes)! Pro praktické použití je to triviální rozdíl. Měli snad Oni svého Platóna, který byl tak posedlý ideálnem, že nechtěl mít v geometrii žádné hmotné nástroje s výjimkou pravítka a kružítka? Dokonce ani dvě rysky na pravítku? To, že matematikové tak často citují větu, jejíž pravdivost či nepravdivost závisí na tak triviálním rozdílu v definici, je nerozumné! To není věta důležitá pro reálný svět.

V tomto směru vás nechám zamyslet se nad tím, s jakou pohodlností mluvíme o vícenásobných nulových bodech funkce (kde si úmyslně pleteme polynomiální faktory a nulové body). Potom můžeme tento způsob argumentace rozšířit na duální grafy, zdůvodnit, že samoduální graf má být počítán dvakrát, a odtud získat větu, že v trojrozměrném prostoru existuje šest pravidelných těles a nikoliv pět. Nakonec šestka je dokonalé číslo! Aby bylo jasné, jsou to jen slova: nic se nezměnilo, svět je stejný, jako byl předtím, ale znění věty je zcela odlišné. [Překladatel se omlouvá, že on ani jeho poradci nebyli s to porozumět přesnému matematickému významu tohoto odstavce.]

Skutečně velká část naší matematiky je taková a nemůžeme tedy předpokládat, že by mimozemšťané sledovali stejnou úzkou stezku, jako jsme to udělali my. Aniž bych to blíže definoval, tvrdím, že „robustní“ partie matematiky mohou *všeobecně* záviset na tom, zdali pečujeme o to, abychom rozpoznali korespondenci mezi součástmi reality a matematickými vztahy (spolu s pečlivou kontrolou podpůrných předpokladů, obecné struktury a její užitečnosti v jiných aplikacích), a že „nerobustní" partie matematiky jsou pro nás neužitečné, stejně neužitečné, jako byla idea éteru pro fyziky.

Nyní pravděpodobně chcete, abych vám pověděl, čemu opravdu věřím, abyste mě mohli napadnout za všechny ty pobuřující věci, které jsem řekl o vaší matematice. Začnu s Hermitem, který řekl: „My nejsme pány matematiky, my jsme její sluhové." Já jsem často říkal pravý opak: „My jsme pány matematiky, ne její sluhové; matematika bude fungovat tak, jak si přejeme, aby fungovala." Popravdě se zdá, že věřím ve směs obojího; někdy nás matematika tak říkajíc žene před sebou a jindy nad ní máme kontrolu. Mimozemšťané jsou ve stejné situaci, a protože žijí ve stejném druhu fyzického světa a my navíc předpokládáme, že jsou s námi v radiovém spojení, jejich „robustní" užitečná matematika bude v rozumné míře podobná té naší, ale její „nerobustní" části mohou být velmi odlišné. Mohli by vůbec znát všechny naše triviální poučky nebo se o ně zajímat? Je známá Fermatova věta, která byla dokázána na základě našich předpokladů, definic a způsobů uvažování, pravdivá v jejich matematice? Není nutné brát ohled na to, co oni pokládají nebo nepokládají za důkaz, nebo dokonce na to, která tvrzení jsou smysluplná pro ně a pro nás?

Předtím, než si začnete myslet, že vylučuji příliš mnoho vyšší matematiky, dovolte mi poznamenat jinou věc, kterou říkám už dlouho. Jestliže přijdete do mé pracovny a ukážete mi, že Cauchyova věta z komplexní analýzy je nepravdivá, bude mě to velmi zajímat, ale nakonec vám řeknu, že byste se měli vrátit na začátek a použít jiné předpoklady, protože já „vím", že je „pravdivá". Je příliš potřebná v nějaké formě, třeba jen ve formě Greenovy věty, než aby nebyla pravdivá. Umožňuje například přiřadit potenciál některým vektorovým polím a je základem pro naši práci v komplexní analýze, ačkoliv víme, že existují přinejmenším tři různé přístupy k teorii funkcí komplexních proměnných: (1) přístup založený na Cauchyově větě, (2) Lagrangeův a Weierstrassův přístup používající mocninné řady a (3) přístup používající harmonické funkce, který nikdy nevyžaduje zavedení imaginární jednotky. To opět ilustruje moje stále opakované přesvědčení: nemusí zde být jediná teorie jako základ pro činnosti, o kterých předpokládáme, že je mimozemšťané jsou schopni vykonávat; mohou zde existovat velmi rozdílné matematické základy stejně jako rozdílné vnějškové detaily, pokud se o ně dají opřít výsledky potřebné pro reálný svět.

Konečně to nejsou jen postuláty a definice, které musí být prověřeny, ale také logika použitá v matematice. Nemohu v tak krátkém čase rozebrat většinu potíží v logice, proto se omezím na roli „odkazů na sebe" v matematice. Všichni známe výrok „*toto tvrzení* je nepravdivé". Je to gramaticky správně a není zde nic v nepořádku, *dokud* tento výrok neaplikujeme *sám na sebe.* Potom je-li výrok pravdivý, je tím nepravdivý, a pokud je nepravdivý, je tím pravdivý! Je zde mnoho dalších příkladů, jako je klasická moralita „buďte umírnění ve všech věcech". Zde slůvko „všech" znamená extrém, tedy uvedený výrok již v sobě obsahuje rozpor. Jeden můj přítel si zapisuje takové populární paradoxy.

Russellův paradox je obvyklý příklad užívaný v logice pro ilustraci nebezpečí plynoucích z „odkazů na sebe" v definicích a Russell vypracoval hierarchickou *teorii typů* jako východisko z takových problémů. Ale zdá se, že později svou teorii opět zavrhl! Jak jsem zjistil, teorie typů nebyla všeobecně přijata a jsme tak stále ještě v rozpacích, že si můžeme protiřečit v našich předpokladech, pokud použijeme „odkaz na sebe“ — a řešení se zdá být v nedohlednu.

Jako na jiný druh pochybných „odkazů na sebe“ se podívejme na „odkazy na sebe“ používané v logice pro důkaz. Nejprve ocituji Turingův hlavní výsledek týkající se problému zastavení jeho stroje, který říká toto: Neexistuje program, který by mohl určit, zda se při libovolně [pevně] vybraném programu stroj v konečném čase zastaví nebo ne. V důkazu Turing začíná předpokladem, že takový program existuje — přestože věří v jeho neexistenci! Protože nemůže nic vědět o tom, co se uvnitř programu skrývá, jediné, co může dělat, je, že nedbale zachází se vstupy a výstupy a jednoduše „obrací na ruby“ výstupy „zastavení“ a „nezastavení“. Potom aplikuje jeden program, totiž nepozměněný, na program pozměněný (je otázka, zda neexistující program lze pozměnit!) a dochází ke sporu. Takto dokazuje neexistenci programu. Je toto přípustná forma důkazu? Je pro vás přesvědčivá?

V důkazech nemožnosti něčeho často používáme výchozího předpokladu, že to, co chceme prokázat jako nemožné, je možné! Například v klasickém důkazu tvrzení, že odmocnina ze dvou není racionální číslo, vycházíme z toho, že tato odmocnina je rovna zlomku utvořenému ze dvou nesoudělných celých čísel, umocníme na druhou obě strany rovnosti a posléze dostaneme spor založený na dělitelnosti čitatele i jmenovatele dvěma. Na vzdálené planetě mohou docela dobře dát přednost obecnější větě, že žádný vlastní zlomek umocněný na celé číslo nedá jako výsledek celé číslo. Na naší Zemi jsou v současné době jak Turingova věta, tak iracionalita odmocniny ze dvou obvykle považovány za dokázané, i když první z těchto tvrzení podstatně využívá „odkazy na sebe“ [zatímco druhé je pro nás zcela přijatelné, pozn. překladatele].

Dále se podívejme na Cantorův diagonalizační proces, který leží někde mezi oběma uvedenými příklady. Cantor také začíná *předpokladem*, že kdyby množina reálných čísel byla spočetná, potom bychom ji mohli uspořádat v nějakém pořadí, a potom pozmění první číslici rozvoje prvního čísla, druhou číslici druhého čísla atd., v celém tomto nekonečném seznamu! Potom tvrdí, že takový seznam nemůže existovat a že čísla mezi nulou a jedničkou netvoří spočetnou množinu. Opět ve svém důkazu využívá pojmu aktuálního nekonečna a nikoliv Aristotelova potenciálního nekonečna. Ostatně Cantor neznal pojem vyčíslitelných čísel, takže je těžké ho nějak příliš obviňovat; prostě využíval tradiční reprezentaci reálných čísel běžnou v jeho době a my (nebo přinejmenším někteří z nás) jsme mu nyní vzali pevnou půdu pod nohama.

Zůstává otázkou, jaké množství „odkazů na sebe“ je přípustné v důkazu. Víme, že některé jednoduché „odkazy na sebe“ mohou dát rozporuplné výsledky. Máme sklon k pocitu, že jednoduchý důkaz o iracionalitě odmocniny ze dvou, který jen algebraicky přepisuje výraz bez dalších změn, je spolehlivý argument. Já (přinejmenším) mám pochybnosti o platnosti Turingova důkazu v jeho obvyklém tvaru, zatímco k pravdivosti příslušné věty se nevyjadřuji. Cantorova diagonalizace, která vyžaduje určité obměny v uvažovaných objektech, předpokládá, že si dokážeme poradit s aktuálním nekonečnem, a používá mnohem menší stupeň „odkazů na sebe“ než Turingův postup. Spadá tedy někam mezi oba předchozí příklady a moje víra ve spolehlivost takových výsledků je rozpačitá. Löwenheimův-Skolemův paradox se zdá být argumentem proti Cantorovu důkazu. Skutečně, jak chcete Cantorův postup vyzkoušet? Vzpomeňte si, že jsme patrně změnili definici čísla z jeho možné nekonečné reprezentace číslicemi (například využívající Dedekindovy řezy) na konečný proces, který je schopen vytvořit každou další číslici. Je Cantorův diagonalizační proces stále platný? Turingova věta citovaná výše (pokud k ní máte důvěru) ukazuje, že neexistuje žádný určitý způsob výběru programů vedoucích k vyčíslitelným číslům. Jak tedy může být výchozí Cantorův seznam zhotoven dokonce jen pro vyčíslitelná čísla, když neexistuje žádná mechanická metoda k rozeznání příslušných programů? Dokonce i když nevěříte v Turingovu větu, jak se má takový seznam vytvořit? Riskovali byste kvůli víře v pravdivost Cantorova postupu svůj život v reálném světě, nebo jde pouze o artefakt současné matematiky nemající nic společného s realitou? Pokud připustím druhou možnost, zdá se mi nemožné udělat seriózní předpověď, zda mimozemšťané mohou mít takovou matematiku. Každý argument o shodě naší matematiky s jejich musí být založen na potřebě vysvětlit náš společný hmotný svět a ne na bujné fantazii.

Zdá se mi, že ve výše uvedených důkazech jsou různé stupně „odkazů na sebe“, protože některé z nich mě přesvědčují a jiné ne. Mohli mimozemšťané na vzdálené planetě najít nějakou objektivní metodu rozlišování „odkazů na sebe“, takže by mě neponechali v nejednoznačné situaci, ve které se nacházím, když něčemu věřím a něčemu ne, a přitom zde neexistuje žádná ostrá dělící čára? Vraťme se k rozporu týkajícího se nespočetnosti množiny reálných čísel. Klasický důkaz, který vám byl vštěpován, je Cantorův diagonalizační proces. Předpokládejme, že uspořádám reálná čísla ve dvojkové soustavě v takovém pořadí, že nejprve dám jednociferná čísla, potom dvojciferná, trojciferná atd., tedy v pořadí 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, 010, 011… Dejte mi libovolný řetězec binárních číslic (a ve vesmíru to musí být konečný řetězec, protože vesmír je zřejmě konečný) a já mohu pojmenovat místo, na kterém se vyskytne.

Změňte některou číslici na kterémkoli místě takového řetězce a já vám opět mohu říci, kde se pozměněný řetězec vyskytne! Samozřejmě to není to, co udělal Cantor! Ten okamžitě popadl nekonečno a předpokládal, že může dělat to, co nedokáže žádný program, zatímco já lpím na přístupu, že číslo je proces a vy mi můžete pouze dodat další číslici v reprezentaci čísla, nikoliv řetězec všech číslic v jeho nekonečné reprezentaci. Pro jakou volbu se rozhodli mimozemšťané? A pro jakou volbu budete vy sami, když na výsledku bude možná záviset váš život?

Nechci, abyste věřili, že pokud přemýšlím o matematice, mám na mysli pouze její bezprostřední užitečnost, že její umělecká stránka není užitečná — obzvláště ve vyučování, kde krása může přispět k porozumění. Ale nyní se objem matematických výsledků zdvojnásobuje přibližně každých 17 let, každým rokem se objevuje více než 100 tisíc nových matematických vět, pokud extrapolujeme z odhadu, který již dávno učinil Ulam (viz *The Mathematical Experience*, Davis a Hersh, str. 20–21). A jak poznamenal Ralph P. Boas, když byl editorem Math. Reviews, nové výsledky v referovaných článcích jsou většinou správné, ale příslušné důkazy jsou snad z poloviny prostě špatné! Někteří lidé tvrdí, že velký nárůst v objemu publikovaných výsledků je způsoben opakovanou publikací v nějaké skryté formě, kterou je těžké odhalit vzhledem k novému žargonu, a že nejde o novou matematiku — ale stále se s tím problémem musíme vyrovnávat. Pokusme se to vysvětlit na základě toho, jak chápe matematiku platónský idealismus.

V platónském světě, jehož filozofii sdílí většina matematiků, pouze „objevujeme“ matematické věty, které zde existovaly od doby bezprostředně po velkém třesku. Tomuto pohledu oponuje názor, že jsem to já, kdo „vytvořil“ výsledek tím, že jej našel. Jestliže se snažím přezkoumat svoje vlastní mínění, aniž bych se nechal ovlivňovat tradičními názory, docházím k názoru, že pokud je výsledek důležitý, potom jsem jej objevil, ale pokud se zdá být spíše triviální, potom jsem jej vytvořil! A názor obyvatel na vzdálené planetě? Matematikové na této Zemi si všeobecně uvědomují, že platónský pohled se nedá logicky obhájit, ale přesto k němu lnou, s výjimkou, kdy jsou přitlačeni ke zdi, a potom se přesunou na udržitelné postavení a tvrdí, že matematika je jalová hra, manipulace se symboly bez vnitřního obsahu. Abychom parafrázovali Hilberta: „Když přichází přesnost, odchází smysl.“ Nakonec ti na své planetě budou, tak jako my, požadovat finanční podporu zvenčí, aby mohli pokračovat ve své aktivitě a zvyšovat ji. Obávám se, že budou mít podobné logické potíže s definováním matematiky a vysvětlováním, co to vlastně je. Ale zde i tam musí jít o víc, než jsou prázdné manipulace se symboly, pokud očekáváme vzájemnou komunikaci pomocí radiových vln, které byly předpovězeny Maxwellovými rovnicemi. Ale dát nějaké pozitivní vymezení je obtížné.

Když jsem psal jednu knihu (*Methods of Mathematics Applied to Calculus, Probability, and Statistics*), byl jsem nucen říci, že podstatou matematiky je rozšiřování, zobecňování a abstrakce. To jsou tři podobné, ale různé atributy matematiky a myslím, že jsou esencí veškeré matematiky jak na Zemi, tak na vzdálené planetě. Ale matematika je možná „pouze jasné myšlení“ a nic víc.

Když vyučujeme matematiku, měli bychom si být stále vědomi její dvojí přirozenosti; její abstraktní krásy a její praktičnosti, která je nezbytná, aby nám pomohla vyrovnat se s vesmírem, ve kterém se nacházíme. Ale potřebujeme se vyhnout starořeckému přesvědčení, že matematika je jisté, spolehlivé vědění. Mimozemšťané musí čelit podobnému problému na své planetě.

Účelem této přednášky bylo prozkoumat určité svévolné prvky v naší všeobecně přijaté matematice a učinit vás citlivějšími k těmto otázkám, stejně jako poukázat na skutečnost, že musíme mít takovou matematiku, jakou máme, protože je užitečná pro vysvětlení našeho reálného světa.

Také jsem chtěl naléhavě doporučit, že jestliže v budoucnu budete chtít státní granty a podpory, potom by posledně zmíněný druh matematiky měl získat velkou část vaší pozornosti, ale neměli byste se úplně vzdávat elegance. Argument, že v minulosti čistý matematický výzkum v protikladu k výzkumu účelově zaměřenému vedl k množství užitečné matematiky, je pravdivý, ale dokud neučiníte seriózní odhad matematiky, která ještě *nebyla* rozvinuta, protože byla dávána přednost čisté matematice před užitečnou matematikou, pak tento argument nemá žádnou platnost a matematik by se měl cítit zahanben, že jej používá. Kromě toho enormní nárůst výsledků, více než 100 tisíc nových (?) matematických vět každý rok (podívejte se na všechny svazky, které pokládáte za relevantní pro váš vlastní obor a které vycházejí každý měsíc), způsobuje, že vaše naděje vystopovat nový kus čisté matematiky a mít jej po ruce, až jej budete potřebovat, a nemuset jej vytvořit znovu, se neustále zmenšuje.

Znovuvytvoření je čím dál tím víc snadnější než vyhledání. Dokonce nyní je často snadnější znovu vymyslet nějaký druh pojmu než vyhledat jeho popis v literatuře — což pomáhá prudkému množení „nových výsledků“.

Neměli byste věřit všemu, co jsem řekl: tato přednáška měla být pro vás jen podnětem a vodítkem, abyste si přehodnotili své názory na to, co matematika je a co by měla být v blízké budoucnosti, v protikladu k tomu, co o tom říkají knihy a znalci. Zjistil jsem, že takové zamyšlení je velmi inspirativní a užitečné. Tak jako pravidelně říkám svým studentům: „V přírodních vědách a v matematice se nedovoláváme autorit, ale *spíše jsme odpovědni za to, čemu věříme*“. Nechám vás teď, abyste se zamysleli nad tím, čemu věříte, pokud jde o matematiku.

Poděkování. Autor děkuje Peteru Renzovi za jeho pečlivé, velmi užitečné poznámky, které významně zlepšily celkovou prezentaci této přednášky.

R. W. Hamming pracoval v Los Alamos během druhé světové války ve výpočetní skupině podílející se na vývoji atomové bomby. Potom na 30 let přešel do Bellových telefonních laboratoří, byl zde penzionován a dalších 21 let strávil přednášením na Naval Postgraduate School. V důsledku toho si ostře uvědomuje potřebu toho, aby naše předpovědi byly založeny na tom, že matematika bude co nejlépe odpovídat reálnému světu, ve kterém žijeme. Tento článek je založen na neformálním proslovu, který měl profesor Hamming v San Franciscu 22. února 1997 na zasedání sekce AMM Severní Karoliny. Dokázal ještě připravit článek do tisku před svou smrtí 7. ledna 1998. (Poznámka redaktora AMM).

Poznámka překladatele: Vsuvky v hranatých závorkách v textu byly pro lepší srozumitelnost dodány překladatelem. Překladatel děkuje všem kolegům, kteří svými připomínkami přispěli ke zlepšení překladu, především Jiřímu Fialovi a Jiřímu Veselému.

Poznámka redakce: R. W. Hamming v roce 1947 vynalezl metodu samoopravujících se kódů, aby ošetřil následky značné nespolehlivosti tehdejších počítačů. Dnes má jeho metoda obrovské aplikace např. při přenosu dat z meziplanetárních sond. Různé typy samoopravujících se kódů se používají k zabezpečení správného fungování pamětí některých počítačů, jsou jimi chráněny kompaktní disky CD před poškrábáním apod.