Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Phillip A. Griffiths
Matematika na přelomu tisíciletí

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 46 (2001), No. 3, 205--218

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/141085`

Matematika na přelomu tisíciletí

Phillip A. Griffiths

1. Úvod

Minulé století představovalo zlatý věk matematiky. Bylo vyřešeno mnoho důležitých starých problémů, většinou díky lepšímu pochopení složitých vzájemných vztahů mezi jednotlivými obory matematiky. Protože se tyto vztahy stále rozšiřují a prohlubují, matematika se začíná soustřeďovat na souvislosti s jinými vědními obory. Toto vzájemné působení jak uvnitř rozmanitých oblastí matematiky, tak mezi matematikou a jinými vědními obory vedlo k velkým objevům a k rozšíření a prohloubení pole působnosti matematiky. Některými z těchto vztahů a objevů se budu zabývat, popíšu několik úspěchů matematiky 20. století a zformuluji některé výzvy a možnosti, které nás očekávají ve 21. století.

2. Svět matematiky

Když my matematici mluvíme o svém oboru, máme před sebou dilema. Nejúčinnější způsob, jak vysvětlit matematiku laickému čtenáři, je použít metafor, což způsobí ztrátu přesnosti a přináší s sebou nebezpečí nedorozumění. Na druhé straně složité matematické termíny jsou pro většinu lidí, a to včetně jiných vědců, nesrozumitelné. Jak řekl můj kolega David Mumford, bývalý prezident Mezinárodní matematické unie: „Jako profesionální matematik jsem zvyklý žít v jakémsi vakuu, obklopen lidmi, kteří ... prohlašují s určitou podivnou hrdostí, že jsou matematicky negramotní.“

Ovšem uvnitř matematické komunity je použití přesného jazyka nespornou výhodou. Díky své abstraktní povaze a univerzálnosti matematika nezná lingvistické ani politické hranice. To je jeden z důvodů, proč měla matematika vždy výrazný mezinárodní charakter. Japonský matematik obvykle dokáže číst článek kolegy z Německa bez překladu.

Počet špičkových profesionálních matematiků-vědců ve světě je malý. Pravděpodobně jich je o dost méně než 10 000, takže každá oblast matematiky může být „obydlena“ pouze malým počtem vysoce specializovaných jedinců. Tito kolegové se z nutnosti navzájem dobře znají, bez ohledu na to, v jaké zemi žijí, a spolupracují na velké vzdálenosti. Během 20. století narůstal počet studií a článků, které měly několik autorů, matematiků různých národností (mezi rokem 1981 a 1993 tento počet

---

P. A. Griffiths je editorem časopisu Annals of Mathematics.
Mathematics at the Turn of the Millennium. Amer. Math Monthly, January 2000, 1–14.

Přeložila Naďa Stehlíková.

vzrostl asi o 50 procent). A tak se matematici dobře přizpůsobili současnému trendu směřujícímu ke světu, v němž mizejí hranice.

A co vlastně tito matematici dělají? Matematika může být obecně popsána jako hledání struktur a vzorů, které do našeho vesmíru vnášejí pořádek a jednoduchost. Můžeme říci, že předmět nebo východisko matematického studia nejsou tak důležité jako vzory a souvislosti, které se vynořují. A právě tyto vzory a souvislosti dávají matematice její moc, protože často objasňují úplně jiný objekt či proces — jinou větev matematiky, jinou vědu či společnost jako celek.

Mluví-li matematici o své práci, dvě slova jsou velmi důležitá. Matematika je vědní obor, v němž „problém“ neznamená nic špatného. Dobrý problém je vlastně to, po čem matematici touží, co slibuje zajímavou práci. Druhé slovo „důkaz“ silně evokuje přesnost disciplíny. Sir Arthur Eddington jednou řekl: „Důkaz je idol, před nímž se matematik mučí.“ Matematický důkaz je formální a logická úvaha, která začíná soustavou axiomů a logickými kroky vede k závěru. Jakmile je důkaz podán, je neměnný. Některé důkazy přetrvaly z dob starých Řeků. Důkaz je pro matematika stejným potvrzením pravdy, jako je experiment či pozorování pro badatele v přírodních vědách.

Dvacáté století bylo bohaté na vyřešení dlouho existujících problémů a na hojnost úspěchů, jejichž popis by vyžadoval nejméně encyklopedii. Podívejme se pouze na dva z těch zajímavějších úspěchů — vyřešení problémů, které byly více než tři sta let staré. Oba se objevily ke konci století a mohlo k nim dojít pouze díky matematice, která je předcházela.

Velká Fermatova věta. Prvním je důkaz Velké Fermatovy věty Andrewa Wilese, který jako velká novina oběhl zeměkouli v roce 1993. Tento příklad je zajímavý díky Fermatovi, excentrickému právníkovi a amatérskému matematikovi, který nikdy nic nepublikoval, díky Wilesovi, který se s tímto problémem sám po sedm let lopotil, a díky samotnému problému, jehož řešení záviselo na podstatném pokroku v teorii čísel, na němž se po dobu 350 let a zejména během posledního půlstoletí podílelo mnoho matematiků.

Věta byla zformulována v roce 1637, kdy Pierre de Fermat studoval starobylou učebnici o teorii čísel — Diofantovu *Aritmetiku.* Zájem o teorii čísel od doby starých Řeků sice vybledl, ale Fermat miloval čísla. Narazil na slavnou Pythagorovu rovnici, kterou většina z nás zná ze školy: $x^2 + y^2 = z^2$. Dokonce i dnes se nespočet školních dětí učí odříkat: „Obsah čtverce nad přeponou pravoúhlého trojúhelníka se rovná součtu obsahů čtverců nad oběma odvěsnami.“

Zejména zajímavá jsou řešení Pythagorovy rovnice v celých číslech, jako například krásný pravoúhlý trojúhelník o stranách délek 3, 4, 5. Když to Fermat uviděl, poznamenal si, že pro žádný exponent větší než dva nemá daná rovnice v oboru celých čísel řešení. Také latinsky zapsal, že našel nádherný důkaz, ale že je okraj stránky příliš malý, aby jej mohl zapsat. Žádný důkaz se nikdy nenašel. Fermat zapsal mnoho takových poznámek na okraji (některé z nich jsou považovány za výsměch jeho kolegům matematikům) a během staletí byly všechny kromě jediné, Velké Fermatovy věty, vyřešeny.

Andrew Wiles se s Velkou Fermatovou větou poprvé setkal ve věku devatenácti let v knihovně v Cambridge v Anglii, kde vyrůstal. Rozhodl se, že ji jednou dokáže. Když se však stal mladým matematikem, uvědomil si, že není vhodné pokoušet se o tento problém sám, a rozhodl se místo toho pracovat ve složité oblasti algebraické teorie čísel, známé jako Ivasavova teorie. Ale na Fermata nikdy nezapomněl.

V roce 1986 se dozvěděl o prvořadém vědeckém objevu. Kolega Ken Ribet z Kalifornské univerzity v Berkeley spojil Velkou Fermatovu větu s jiným nevyřešeným problémem zvaným Tanijamova-Šimurova domněnka, překvapivým a skvělým objevem v algebraické geometrii, který byl zformulován v roce 1955. Abychom zkrátili velmi složitou řadu úvah, stručně řečeno toto spojení spočívalo v tom, že důkaz Tanijamovy-Šimurovy domněnky by také dokázal Velkou Fermatovu větu. Tato domněnka tvořila logický most mezi složitými světy eliptických křivek a modulárních forem, jakýsi slovník umožňující překlad otázek a objevů mezi těmito dvěma světy. Také to znamenalo, že Wilesova dřívější práce v algebraické teorii čísel mu bude nápomocná a že pravděpodobně vytvoří zajímavé problémy, ať už najde důkaz či ne.

Důkaz opravdu našel — po řadě frustrujících překážek a náhlých objevů. Dokonce i poté, co své výsledky publikoval, se při posuzování práce našla zásadní chyba, což vedlo k dalšímu roku práce. Znovu se zdálo, že je problém neřešitelný, a znovu se ukázalo, že řešení existuje. Wiles nazval tento poslední objev „nejdůležitějším okamžikem mého života. Bylo to tak nepopsatelně krásné, tak jednoduché a elegantní, že jsem na to dvacet minut jen nevěřícně zíral.“

> „Svou zkušenost s matematickým výzkumem mohu asi nejlépe popsat jako cestu temným neprozkoumaným zámkem. Vstoupíte do první komnaty zámku a tam je úplná tma. Klopýtáte kolem a vrážíte do nábytku, ale postupně poznáte, kde který kus nábytku stojí. Nakonec, asi po takových šesti měsících, najdete vypínač, otočíte jím a náhle je vše osvětleno. Vidíte přesně, kde se nacházíte. Pak přejdete do další místnosti a strávíte dalších šest měsíců v temnotě. Tak každý z těchto objevů, zatímco někdy jsou dílem okamžiku, někdy to trvá den či dva, je vyvrcholením mnoha měsíců tápání v temnotě, jež mu předcházelo a bez kterého by nemohl vzniknout.“
>
> *Andrew Wiles, který v roce 1993 dokázal Velkou Fermatovu větu.*

Dokončil opravdu v 17. století Fermat svůj důkaz? Někdo se nepochybně bude dál snažit nalézt nějaké svědectví, že ano, ale je to vysoce nepravděpodobné. Wiles použil ve svém důkazu celé oblasti matematiky 19. a 20. století, které ve Fermatově době ještě neexistovaly. Za Fermatovou rovnicí teď leží obrovská a složitá formální struktura — ten druh struktury, o niž matematici usilují. Řešení Fermatova problému spočívá na důsledcích porozumění této struktuře.

Keplerova domněnka o nejhustším uspořádání koulí. Druhým problémem je Keplerova domněnka o nejhustším uspořádání koulí. Stejně jako Fermatův problém mohlo být uspořádání koulí vyřešeno tím způsobem, jakým k tomu došlo, pouze v několika posledních desetiletích. I tak to trvalo Thomasu Halesovi, profesoru matematiky na univerzitě v Michiganu, deset let. Podobně jako Fermatův problém zní problém uspořádání koulí jednoduše, ale vyhrával nad matematiky po téměř čtyři století. Oba problémy navíc obsahují jemné obtíže, které vedly nesčetné matematiky k domněnce, že našli řešení — ale tato „řešení“ se ukázala být chybná.

Otázka byla vznesena ve druhé polovině 16. století, když Sir Walter Raleigh požádal matematika Thomase Harriota o rychlý způsob, jak odhadnout počet dělových koulí, které se mohou naskládat na palubu lodi. Harriot pak napsal německému astronomovi Johanessovi Keplerovi, který se již o rovnání věcí na sebe zajímal: jak se mohou koule uspořádat tak, aby mezery mezi nimi zabíraly co nejmenší prostor? Kepler nedokázal najít účinnější způsob než ten, který přirozeně používali námořníci k rovnání dělových koulí či prodavači při stavbě pyramid pomerančů, známý jako kubické plošně centrované uspořádání (face-centred cubic packing). Kepler prohlásil, že touto technikou „bude uspořádání nejhustší, takže při žádném jiném uspořádání nemůže být do stejné nádoby napěchováno více koulí“. Tento výrok je dnes znám jako Keplerova domněnka.

Zásadní pokrok byl učiněn v 19. století, když legendární německý matematik Carl Friedrich Gauss dokázal, že uspořádání hromady pomerančů je nejhustší mezi všemi „mřížovými uspořádáními“, ale to nevyloučilo možnost ještě hustšího nemřížového uspořádání. Do 20. století se Keplerova domněnka stala natolik významnou, že ji David Hilbert zmínil v souvislosti se svým seznamem dvaceti tří největších nevyřešených problémů.

Problém je složitý díky nesmírnému počtu možností, které se musí vyloučit. Do poloviny 20. století matematici uměli redukovat problém na konečný, přesto ale početně příliš složitý. Zásadní průlom přišel v roce 1953, kdy maďarský matematik Laszlo Fejes Tóth redukoval problém na ohromný výpočet zahrnující mnoho speciálních případů a také navrhl, jak je možné vyřešit problém pomocí počítače.

To byla pro Halese obrovská výzva. Jeho rovnice měla 150 proměnných, z nichž každá musí být měněna, aby se popsalo každé případné uspořádání. Důkaz, vysvětlený na dvou stech padesáti stranách úvah a obsahující tři gigabyty počítačových souborů, se do značné míry opírá o metody z teorie globální optimalizace, lineárního programování a intervalové aritmetiky. Hales uznal, že potrvá nějaký čas, než někdo dokáže potvrdit všechny detaily takového dlouhého a složitého důkazu.

Ovšem za povšimnutí stojí, že toto cvičení zdaleka nebylo marné. Téma uspořádání koulí patří k rozhodující části matematiky založené na samodetekujících se a samoopravných kódech, které se široce používají k uchovávání informací na kompaktních discích a ke kompresi dat pro přenos po celém světě. V současné informační společnosti lze těžko vymyslet důležitější aplikaci.

Problém čtyř barev. Příbuzným problémem, který si zaslouží zmínku, je doplněk k uspořádání koulí — takzvaný problém čtyř barev při vybarvování map. Jde o tvrzení, že pro obarvení každé mapy tak, že žádné dvě sousedící země nejsou obarveny stejnou barvou, stačí pouze čtyři barvy. Problém je podobný uspořádání koulí: jde o elementární problém, který pravděpodobně vypadal dostatečně jednoduše, když ho jako první vyslovil anglický matematik Francis Guthrie v roce 1852. Podobnost je také v tom, že existující důkaz jej redukoval na konečný problém, který vyžaduje velké množství výpočtů.

Důkaz, který objevili v roce 1976 Wolfgang Haken a Kenneth Appel, spočívá v tom, že se ukáže, že pokud je každá ze seznamu x map obarvitelná čtyřmi barvami, pak je každá mapa obarvitelná čtyřmi barvami. Ačkoli je počet možných map nekonečný, Haken a Appel ukázali, že obarvitelnost všech z nich záleží pouze na obarvitelnosti velké, ale konečné množiny základních map. Toto byl první podstatný problém, který podlehl „hrubé síle" počítače. Současně však vyvolal prohlášení některých lidí, že hrubá síla počítačových důkazů postrádá čistotu tradičního důkazu: tvůrci důkazu sice dokázali, že je tvrzení pravdivé, ale nevysvětlili proč. Na toto téma se dá předpokládat další diskuse.

Duální povaha matematiky. Řekli jsme, že matematika má pověst samolibosti; vlastně byla nazvána královnou věd, trochu povýšenou vůči sobě samé. Vyvolává pocit modré oblohy, vzletných úloh, které se řeší kvůli nim samým. Vskutku, matematik G. H. Hardy jednou řekl, že matematická praxe může být ospravedlněna pouze jako umělecká forma.

Paralela s uměním vlastně existuje. Matematici podobně jako umělci se hodně spoléhají na estetiku stejně jako na intuici a není neobvyklé, že problémy řeší ve sprše či na procházce. Ale co se týče užitečnosti, mluví ve prospěch matematiky silný argument. Abychom uvedli jen několik příkladů: moderní počítač by nemohl existovat bez Leibnizova binárního číselného kódu, Einstein by nemohl formulovat svou teorii relativity bez rozvoje Riemannovy geometrie a stavby kvantové mechaniky, krystalografie a komunikační technologie pevně spočívají na základech teorie grup.

Kromě toho „dosah" matematiků se zdá být v porovnání k jejich počtu obrovský. Tedy zdá se, že mentální konstrukce matematiků (nepatrné populace jediného druhu na jediné planetě) odrážejí principy, které platí v celém vesmíru. Dříve v tomto století nazval fyzik Eugene Wigner tento jev „absurdní účinnost [abstraktní] matematiky v přírodních vědách". Dnes bychom dodali účinnost ve výrobě léků, financích a mnoha dalších odvětvích. O prapůvodu matematických konstrukcí existuje mnoho názorů. Arthur Jaffe navrhuje: „Matematické ideje se nevynořují z myslí výzkumníků jako zcela dospělé. Matematika se často inspiruje ze vzorů v přírodě. Poznatek, který získáme při zkoumání určité části přírody, poslouží stejně dobře, když zkoumáme jiné přírodní jevy."

Matematici vždy přenášeli své objevy do sousedících oblastí, kde vytvořili nové poznatky a celá nová pole. Na prahu osvícení v roce 1605 Francis Bacon předznamenal tento princip integrující vědy výstižným obrazem: „Na rovině či na hladině nelze učinit dokonalý objev; stejně tak není možné odhalit odlehlejší či hlubší partie žádné vědy, pokud stojíte pouze na úrovni této vědy a nevystoupíte do vědy vyšší."

V průběhu 20. století matematika opakovaně dosáhla těch nejvyšších met. Například rozvoj rentgenové tomografie (CAT a MRI technologie snímání) byl založen na diskrétní geometrii, generování kódů pro bezpečný přenos dat záleží na aritmetice prvočísel a návrhy velkých účinných sítí v telekomunikacích využívají nekonečně dimenzionální reprezentace grup.

Matematika má tak duální povahu: je nezávislou disciplínou ceněnou pro svou přesnost a vnitřní krásu a současně bohatým zdrojem nástrojů pro svět aplikací. A obě části této duality jsou úzce spojeny. Jak uvidíme v následujícím odstavci, právě posílení těchto spojení v 20. století umožnilo, že matematika plynule získávala na účinnosti — jak uvnitř sama sebe, tak ve světě mimo ni.

3. Trendy 20. století

Hlavním důvodem, že je dnes matematika zdravá, je rozpad bariér uvnitř disciplíny. Na první pohled se zdá, že se plné rozpětí matematiky — obrovské množství pojmů, tvrzení, hypotéz a vět nahromaděných během více než dvou tisíc let — vzpírá možnosti jednoty. Pryč jsou dny, kdy jediný obr — jakýsi Euler či Gauss — by ji mohl zvládnout v její úplnosti. S rychlým rozvojem jednotlivých oblastí matematiky po druhé světové válce se matematika tak specializovala, že ti, kdo ji praktikovali, měli potíže s dorozumíváním se s kýmkoli vně jejich vlastní specializace. A dnes jsou tito specialisté běžně rozseti mezi Bonnem, Princetonem, Berkeley a Tokiem.

Tento trend k fragmentaci je však doplněn rostoucí tendencí uchopovat zajímavé problémy „překlenovacím" způsobem. Díky novým spojením jsou dnes oblasti, kdysi viděné jako zcela oddělené, součástí jednoho celku. Například algebraická geometrie, obor, který je mně nejznámější, spojuje algebru, geometrii, topologii a analýzu. Jak se blížíme ke konci tohoto století, spolupráce v rámci této silně vzájemně propojené oblasti hraje hlavní roli v některých z vrcholných úspěchů čisté matematiky. Jedním z nich je samozřejmě vyřešení Velké Fermatovy věty. Dalším je vyřešení Mordellovy domněnky, která tvrdí, že polynomická rovnice stupně alespoň čtyři s racionálními koeficienty může mít nejvýše konečný počet racionálních řešení (Fermatova rovnice nemá žádné takové řešení). Třetím je řešení Weilových domněnek, které jsou analogiemi pro konečná tělesa Riemannovy hypotézy. Všechny tyto úspěchy odrážejí schopnost matematiků současně využívat několika podoborů a vnímat svůj předmět jako celek.

Solitony. Jedním z nejpozoruhodnějších úspěchů matematiky druhé poloviny 20. století je teorie solitonů, která ilustruje základní jednotu oboru. Solitony jsou nelineární vlny, které se vyznačují neočekávaným a zajímavým chováním.

Nejdříve se stručně zmíním o pozadí problému. Obvykle mluvíme o dvou různých druzích vln. První, lineární vlny, známe z každodenního života. Příkladem jsou světelné vlny či zvukové vlny. Lineární vlny se pohybují stejnoměrně prostorem beze změn. Tedy mají konstantní rychlost bez ohledu na svůj tvar; cis se pohybuje stejnou rychlostí jako es. A mají konstantní vlnovou délku; cis zůstává cis, i když ho slyšíte z vedlejšího bloku. Lineární vlny se také řídí zákonem superpozice. Hrajete-li několik tónů na pianu současně, vždycky slyšíte všechny tóny najednou, což způsobuje harmonii. Dokonce i velmi komplikovaný zvuk může být rozložen na své ustavující harmonie.

Druhý druh vln, nelineární vlny, je méně známý a zcela odlišný. Jednoduchým příkladem je mořská vlna blížící se k pobřeží. Amplituda, vlnová délka a rychlost, které jsou u lineárních vln konstantní, se v nelineárním případě viditelně mění. Vzdálenost mezi vršky vln se zmenšuje, výška se zvyšuje, když se vlny „dotýkají" dna, a rychlost se mění. Horní část předstihne spodní část a přepadne přes ni, když se vlna zlomí. Ještě komplikovanějším případem je, když se setkají dvě vlny. Působí na sebe komplikovaným, nelineárním způsobem a dají vzniknout třem vlnám místo dvou.

Tím se dostáváme k solitonům. Příběh začíná v roce 1834, kdy se skotský inženýr jménem John Scott Russell pokoušel navrhnout nejefektivnější loď určenou pro plavbu kanálem. Jednoho dne si všiml, že se vlny v mělkém kanálu někdy chovají velmi zvláštním způsobem. Dlouhou dobu se vlny sice mohly pohybovat konstantní rychlostí bez změn tvaru, ale ty, které měly větší amplitudu, se pohybovaly rychleji než ty s malou amplitudou. Velká vlna může předstihnout menší a může dojít ke složité interakci, načež se objevuje ještě větší vlna a pohybuje se rychleji než ta menší. Po této nelineární interakci se vlny znovu chovají jako lineární vlny.

V polovině 20. století studovala nelineární vlnovou rovnici skupina matematiků. Protože tato rovnice popisovala nelineární vlny, očekávali, že její řešení vytvoří singularity, nebo se v určitém bodě zhroutí, podobně jako na sebe vzájemně působí a lámou se nelineárním způsobem vzájemně se křižující vlny. Napsali počítačový program pro numerické řešení rovnice a zjistili, že se vlna neláme podle jejich očekávání. To je vedlo k tomu, aby se podívali na Korteweg-de Vriesovu rovnici, která byla napsána před stoletím pro popis chování vln v mělké vodě. Zjistilo se, že jev, který pozoroval Russell, se dal pro Korteweg-de Vriesovu rovnici matematicky dokázat. Jinými slovy, řešení této rovnice vykazovalo chování solitonu. Jde o vysoce neobvyklé rovnice, protože solitony jsou v určitém ohledu jako lineární vlny a v jiném jako nelineární vlny.

Tento objev vyvolal horečnou aktivitu, která tím nejkrásnějším způsobem předvedla jednotu matematiky. Došlo k rozvoji ve výpočtové matematice a v matematické analýze, což jsou tradiční prostředky studia diferenciálních rovnic. Ukazuje se, že se řešení těchto diferenciálních rovnic dá porozumět prostřednictvím určitých velmi elegantních konstrukcí v algebraické geometrii. Řešení jsou také úzce spojena s teorií reprezentací v tom, že tyto rovnice mají nekonečný počet skrytých symetrií.

Konečně mají také vztah zpětně k problémům v elementární geometrii. Například zajímavým problémem je najít kužel o daném objemu, ale nejmenším povrchu mezi všemi kuželi. Na první pohled není zřejmé, že to má něco společného s vlnami v mělké vodě, ale ve skutečnosti tomu tak je. Ukazuje se, že diferenciální rovnice, které popisují řešení, se chovají stejně jako solitony a rovnice popisující vlny v mělké vodě. Takže jsme začali s dvěma matematickými problémy — jedním z matematické fyziky a jedním z diferenciální geometrie — a zjistili jsme, že oba se vyznačují stejným, vysoce vzácným a zajímavým chováním solitonů.

Matematika a jiné vědy. Po rozpadu vnitřních bariér se matematika začala mnohem více ovlivňovat jinými vědami a obchodem, financemi, procesy zabezpečení, řízení, rozhodování a modelováním komplexních systémů. A zpětně každá z těchto disciplín předkládá matematice zajímavé nové typy problémů, které následně vedou k novým aplikacím.

Matematika a teoretická fyzika. Nikde se to nedá lépe ilustrovat než v teoretické fyzice. Kromě čistě matematických výsledků používají teoretičtí fyzici algebraickou geometrii při hledání jednotné teorie pole — či přesněji teorie, která spojuje gravitační sílu se třemi základními silami fyziky: silnou jadernou interakcí, slabou jadernou interakcí a elektromagnetismem.

Jedním horkým kandidátem nové jednotící teorie je teorie strun. Její jméno pochází z myšlenky, že nejelementárnější stavební bloky hmoty jsou nepatrné kmitající smyčky či segmenty, které jsou tvarem podobné strunám a kmitají v mnoha různých módech jako houslové struny. Touha porozumět této vysoce komplexní teorii vedla skupinu teoretických fyziků hluboko do matematiky, kde vytvořili sérii působivých předpovědí o matematice. Tyto předpovědi se začínají ověřovat. Jejich výsledky vyvolaly příval práce, díky níž je teorie stále věrohodnější. Také daly vzniknout novému odvětví čtyřdimenzionální matematiky jménem kvantová geometrie, která zpětně otevírá nové obzory pro fyziku.

Dalším ukazatelem blízkosti vztahu mezi matematikou a fyzikou bylo udělování Fieldsových medailí, nejvyšší pocty v matematice, v roce 1998. Tři ze čtyř oceněných pracovali v oblastech silně ovlivněných fyzikou a zvláštní ocenění bylo uděleno za práci v kvantovém programování, které má kořeny v kvantové mechanice.

Matematika a vědy o životě. Jedním z nejrychleji rostoucích nových partnerství je spolupráce mezi matematikou a biologií. Partnerství začalo na poli ekologie ve dvacátých letech 20. století, když italský matematik Vito Volterra vyvinul první modely vztahů predátor–kořist. Zjistil, že přibývání a ubývání populace predátorů a kořisti se u ryb dá popsat matematicky. Po druhé světové válce byly metody modelování, které Volterra vyvinul pro populace, rozšířeny do epidemiologie, studia nemocí ve velkých populacích.

V poslední době inspirovaly objevy v molekulární genetice vědce k adaptaci těchto metod na infekční nemoci, kde objekty studia nejsou populace organismů či lidí, ale populace buněk. V buněčném systému je predátorem například populace virů a kořistí je populace lidských buněk. Tyto dvě populace rostou a ubývají v komplikovaném darwinovském souboji o přežití, který je vhodný pro matematický popis. Možnost použít matematické modely, které popisují infekční agenty jako predátory a hostitelské buňky jako kořist, v posledním desetiletí znovu definovala mnoho aspektů imunologie, genetiky, epidemiologie, neurologie a přípravy léků. Důvod, proč je toto partnerství úspěšné, spočívá v tom, že matematické modely poskytují účinné nástroje k popisu obrovských počtů a vztahů, které se nacházejí v biologických systémech.

Například matematičtí biologové byli schopni formulovat kvantitativní předpovědi o tom, jak viry a jiné mikroby ve svých hostitelích rostou, jak mění genetickou strukturu hostitelů a jak na sebe vzájemně působí s imunitním systémem hostitele. Některé z nejpřekvapivějších výsledků se objevily při studiu epidemie AIDS a změnily naše chápání HIV virů u nakažených pacientů. Převažoval názor, že HIV viry leží po dobu asi deseti let nečinně, než nakazí hostitelské buňky a způsobí nemoc. Matematické modelování prokázalo, že HIV viry, které způsobují nemoc, nejsou převážně nečinné. Plynule a rychle rostou, s poločasem rozpadu asi pouhé dva dny.

Proč tedy trvá v průměru deset let, než se infekce projeví? Matematické modelování ukázalo, že postup nemoci může být způsoben virovým rozvojem. Imunitní systém je schopen virus po dlouhou dobu potlačovat, ale nakonec mutují nové formy virů, objeví se jich nadbytek a zdolají imunitní obranu. K tomu dochází, protože se viry stejně jako další infekční agenti dokáží reprodukovat rychleji než jejich hostitelé a reprodukce jejich genetického materiálu je méně přesná. Na téměř každou HIV infekci lze nahlížet jako na evoluční proces, v němž se virová populace neustále mění a soustavně se objevují nové virové mutace. Přirozená selekce upřednostňuje varianty schopné uniknout imunitní reakci či nakazit více druhů buněk lidského těla či reprodukovat se rychleji. Modely ukazují, že všechny evoluční změny zvyšují nadbytek virů v pacientovi a tak urychlují nemoc.

Tyto stejné matematické modely přinesly porozumění, proč by měly být léky proti HIV podávány v kombinaci a co nejdříve po infekci. Tyto léky jsou nejúčinnější v kombinaci, protože viry zřídka produkují více mutací najednou. A měly by být podány včas, než může virová evoluce příliš postoupit.

Hlavní hrozbou lidského zdraví v dalším století bude mikrobiální odolnost k lékům, a to bude další oblast, kde mohou matematické modely přispět. Mohou přinést jasné pokyny pro sběr a analýzu dat, což může zefektivnit léky. Dobré modely komplexních interakcí mezi infekčními agenty a imunitním systémem mohou nakonec vytvořit novou disciplínu kvantitativní imunologie.

Mezi matematikou a jinými vědami existuje mnohem více nových partnerství. Mnoho průkopnické a produktivní práce je uděláno na pomezí mezi obory a disciplínami. Výborným příkladem je studium dynamiky tekutin. Popis komplikovaného pohybu tekutin — hurikány, proudění krve srdcem, ropa v pórovité půdě — byl dříve téměř nemožný, než došlo k objevu, že k tomu účelu lze použít čistě matematickou konstrukci tzv. Navierovy-Stokesovy rovnice. Dalším příkladem je teorie řízení, odvětví teorie dynamických systémů. Dnes se dá provést mnoho testování vysoce výkonného letadla počítačovou simulací při jediné aplikaci a tak se značně sníží výdaje a nebezpečí aerodynamických tunelů a zkušebních letů.

Je důležité zdůraznit, že i když modelování a simulace jsou moderní a důležitá témata, stále se nedokážeme vyrovnat s nejistotami, které jsou přítomny v těchto komplikovaných simulacích. Naučit se vyrovnat s nejistotou je vysoko na seznamu priorit pro matematiky, kteří musí vytvořit zásadně nové přístupy, pokud mají porozumět, jak nejistoty v modelech vznikají a jak se v systémech množí. Naše modely budou jen natolik přesné, nakolik budeme schopni omezit jejich nejistoty.

4. Výzvy pro výzkum ve 21. století

Navzdory nesmírným úspěchům 20. století desítky vynikajících problémů stále čekají na svá řešení. Většina z nás by pravděpodobně souhlasila, že následující tři problémy patří mezi nejnáročnější a nejzajímavější.

Riemannova hypotéza. První je Riemannova hypotéza, která mučí matematiky po 150 let. Má co do činění s pojmem prvočíslo, což je základní stavební kámen aritmetiky. Prvočíslo je přirozené číslo větší než 1, které není dělitelné žádným přirozeným číslem kromě sama sebe a čísla 1. Řada prvočísel začíná čísly 2, 3, 5, 7, 11, 13 a pokračuje bez omezení. Již ve 3. století před naším letopočtem Eukleides dokázal, že nikdo nemůže najít „největší“ prvočíslo; jinými slovy, že prvočísel je nekonečně mnoho.

Ale tvoří prvočísla nějaký vzor? Pro toho, kdo je studuje pomocí tužky a papíru, se zdají zpočátku být náhodná. Ale v 19. století německý matematik Bernhard Riemann rozšířil Eukleidův poznatek a tvrdil, že nejenže je prvočísel nekonečně mnoho, ale také se objevují v určitém jemném a přesném vzoru. Dokázat, že tomu tak je (nebo není), je snad nejhlubší existující problém čisté matematiky.

Poincarého domněnka. Tento problém je záhadný jak proto, že je tak základní, tak proto, že se zdá být tak jednoduchý. V době Poincarého před sto lety byl dokonce považován za triviální, stejně jako celá oblast topologie — oboru, který Poincaré v podstatě vytvořil. Ale dnes je topologie vitálním a významným oborem matematiky.

Zhruba řečeno se topologie týká základních vlastností struktur a prostorů. Například koule může být natažena, stlačena či zkrabacena libovolným způsobem (očima topologa) a stále zůstává koulí, pokud není roztržena či propíchnuta. Topolog považuje věneček a šálek na kávu za identické, protože každý z nich může být modifikován do stejného základního tvaru — prstenec s otvorem čili torus. Topology zajímají zejména variety, což znamená „mít mnohočetné rysy či formy“. Například fotbalový míč je dvoudimenzionální varieta či dvoudimenzionální sféra. Můžeme ho upravit jakýmkoli způsobem, aniž bychom jej roztrhli, a stále to bude fotbalový míč.

Topologové se snaží identifikovat všechny možné variety, včetně tvaru vesmíru — což je tématem Poincarého domněnky. Ve dvou dimenzích to je relativně lehké a do konce 19. století byl problém vyřešen. Test, zda je varieta opravdu dvoudimenzionální sféra, je také zřejmý. Představte si, že položíte gumovou pásku na povrch fotbalového míče. Pokud může být gumová páska smrštěna do bodu, aniž by opustila povrch, a pokud to lze udělat kdekoli na povrchu, je míč dvourozměrná sféra a říkáme, že je jednoduše souvislá.

V roce 1904 vyslovil Poincaré domněnku, že to, co platí pro dvě dimenze, platí také pro tři dimenze — že každá jednoduše souvislá kompaktní třírozměrná varieta (jako například vesmír) musí být třírozměrná sféra. Věc se zdá být intuitivně jasná, ale nikdo zatím neukázal, že neexistují nějaké falešné třírozměrné sféry, takže domněnka zatím nebyla dokázána. Je překvapující, že jsou známy důkazy pro ekvivalenty Poincarého domněnky pro všechny dimenze větší než 3, ale ne pro dimenzi 3.

Platí P = NP? Třetí problém je úzce spojen s filozofickou otázkou, co je poznatelné a co je nepoznatelné. V roce 1931 dokázal logik narozený v Rakousku Kurt Gödel, že v aritmetice nelze najít naprostou jistotu — za předpokladu, že je aritmetika založena na určitých „samozřejmých“ vlastnostech či axiomech o celých číslech. Ve třicátých letech 20. století ustanovil Alan Turing v teorii programování pravidla, podle nichž se dalo rozhodnout, co je spočítatelné a co ne. Přesnější je ptát se, co je spočítatelné v polynomiálním čase čili P čase. Například ve známém problému obchodního cestujícího polynomiální čas znamená, že můžeme napsat počítačový program, který určí nejlepší trasu pro n měst v rozumném počítačovém čase, což je úměrné čtverci n, nebo třetí mocnině n.

Jak se problém stává komplikovanějším, počítačový čas se může zvyšovat exponenciálně, až dokud se problém nestane výpočetně neřešitelný čili NP. Například většina šifrovacích kódů je dnes založena na předpokladu, že rozložení velkých celých čísel na prvočinitele je výpočetně neřešitelný problém.

Ve skutečnosti dnes dochází v otázce „P versus NP“ k zajímavému vývoji, který se dá spojit s Gödelovou větou o neúplnosti. Zdá se být možné, že určitá matematická tvrzení, která v konečném důsledku obsahují dolní hranice počítání, jako např. „P se nerovná NP“, se nedají dokázat v rámci Peanovy aritmetiky, standardní či nejpřirozenější verzi aritmetiky. Tato teze ještě nebyla dokázána, ale řešení se zdá být v dohledné době proveditelné. Je známo, že všechny techniky dosud použité k důkazu dolní hranice počítacích modelů spočívají v určitém dolním fragmentu Peanovy aritmetiky. Navíc prokázané techniky v těchto fragmentech nemohou oddělit P od NP — pokud nepoznáme mnohem rychlejší algoritmy rozkladu čísla na prvočinitele než ty, které známe dnes. Jinými slovy, zda je problém P či NP, bude záležet na tom, zda dokážeme rozložit celá čísla na prvočinitele mnohem rychleji, než jsme dosud považovali za možné.

Teoretická počítačová věda. Obor, o kterém mluvíme, teoretická počítačová věda, je dnes jednou z nejdůležitějších a nejaktivnějších oblastí vědeckého studia. Vlastně byl založen před půl stoletím, ještě než existovaly první počítače, když Alan Turing a jeho současníci začali matematicky definovat pojem „výpočet“ a studovat jeho moc a omezení. Tyto otázky vedly von Neumanna k praktickému sestrojení prvního počítače, po čemž následovala počítačová revoluce, které jsme dnes svědky.

Praktické použití počítačů a neočekávaná hloubka pojmu „výpočet“ značně rozšířila teoretickou počítačovou vědu čili TCS. Během poslední čtvrtiny století vyrostla TCS v bohaté a krásné odvětví, vytvořila spojení s jinými vědami a přilákala prvotřídní vědce. Všimněme si několika aspektů tohoto vývoje.

Za prvé, pozornost tohoto oboru se přesunula od pojmu „výpočet“ k mnohem tížeji postižitelnému pojmu „účinný výpočet“. Byl formulován základní pojem NP-úplnost, postupně vyšel najevo jeho téměř univerzální dosah a ustavily se dlouhodobé cíle, jako vyřešit otázku P versus NP. Vytvořila se teorie algoritmů a široká paleta výpočetních modelů. Náhodnost se stala klíčovým nástrojem a zdrojem a způsobila základní převrat v teorii algoritmů.

Podstatné je, že objev pojmu jednosměrné funkce založeného na složitosti společně s použitím náhodnosti vedl k rozvoji moderní kryptografie. Co mnozí lidé zpočátku považovali za pouhé duševní hry, za snahu hrát poker bez karet, se změnilo v mocnou teorii a praktické systémy zásadního ekonomického významu. Teorie složitosti, která se snaží klasifikovat problémy podle početní náročnosti, spojila mnohé z těchto myšlenek a dala vzniknout oboru výpočetní složitosti, jehož cílem je kvantifikovat, co tvoří těžký důkaz.

Kromě těchto činností, které probíhají uvnitř TCS, je důležité ovlivňování mezi TCS a jinými odvětvími, jako kombinatorikou, algebrou, topologií a analýzou. Navíc základní problémy TCS, zvláště „P versus NP“, získaly důležité místo jako základní problémy matematiky. Více a více matematiků začíná brát v úvahu výpočetní aspekty svých oblastí. Jinými slovy, začínají faktem „objekt existuje“ a následuje problém „Jak rychle lze tento objekt najít?“.

Závěrečný aspekt TCS, který je pro některé tím nejzajímavějším, je, že se obor dnes překrývá s celou novou množinou algoritmických problémů z ostatních věd. V těchto problémech není požadovaný výstup dobře definován předem a může začínat s téměř libovolným druhem dat: obrázek, sonogram, údaje z Hubbleova vesmírného teleskopu, hodnota akcií na kapitálovém trhu, posloupnosti DNA, záznamy neuronů zvířat reagujících na podněty. Matematické modely se používají k pokusu porozumět údajům či předpovědět jejich budoucí hodnoty.

Sám pojem „výpočet“ a zásadní problémy, které jej obklopují, získaly postupně hluboký filozofický význam a důsledky. Kromě otázky „P versus NP“ se obor soustředil na několik jasných a hlubokých otázek. Například: Mohou generátory náhodných čísel pomoci při výpočtech? Kvůli čemu je těžké dokázat nějakou větu? Může být kvantová mechanika účinně simulována klasickými prostředky? Čas je zralý pro vzrušující vývoj a základní nové poznatky v celém novém oboru teoretické počítačové vědy.

Kvantové programování. Další novou a vzrušující oblastí výzkumu je zkoumání kvantového programování. Toto téma je úzce spojeno s otázkou „P versus NP“, což bylo překvapivým způsobem ukázáno v roce 1994. Bylo zjištěno, že pokud by se kvantový počítač dal sestavit, byl by schopen rozluštit jakýkoli počítačový kód, který se dnes používá, či o kterém se dosud soudí, že je bezpečný.

Potřeba zásadní nové podoby programování je velmi reálná, zejména pro běh komplikovaných simulačních modelů. I když jsou moderní počítače nesmírně rychlé, stále používají klasickou binární číselnou soustavu nul a jedniček, kterou lze vysledovat 150 let zpátky do časů sčítacího stroje George Booleho. Po mnoho let se to zdálo být dostatečné, zejména při existenci „Mooreova zákona“: postřeh, že se kapacita počítačových čipů zdvojnásobuje asi každé dva roky, zatímco jejich cena se snižuje na polovinu. Toho se dosáhlo lepší konstrukcí a výrobou stále menších čipů. Ale dnes se blížíme kvantově mechanickému limitu, jak malý může čip vůbec být.

Toto omezení bylo předpovězeno už v roce 1982, kdy Richard Feyman předvídal, že úsilí simulovat kvantově mechanické systémy na digitálních počítačích s sebou ponese vnitřní „limitu“. Ale v obsáhlé poznámce navrhl, že tuto obtíž lze obejít určitou formou kvantového počítače. V roce 1985 David Deutsch urychlil diskusi návrhem, že pokud by kvantové počítače byly dostatečně rychlé, aby vyřešily kvantově mechanické problémy, mohly by i klasické problémy řešit rychleji.

Zdá se, že tomu tak je. V roce 1994 Peter W. Shor ukázal, že kvantový počítač umí rozložit velká čísla na prvočinitele v čase, který je polynomiální vzhledem k délce čísel, což je téměř exponenciální zrychlení oproti klasickým algoritmům. To bylo překvapivé ze dvou důvodů. Za prvé, moderní kryptografové používají dlouhá čísla jako bezpečnostní kódy, protože je velice obtížné je rozložit na prvočinitele — to dokáže kvantový počítač udělat dost rychle. Za druhé, teoretičtí počítačoví vědci předtím věřili, že žádný druh programování nemůže být mnohem rychlejší než konvenční digitální počítače.

Na druhou stranu experimentalisté si nejsou vůbec jisti, že dokáží kvantový počítač sestrojit. Zatímco o tuto možnost usilují, paralelně existují nesčetné snahy vytvořit jiné druhy počítačů založených na jiných principech, než je Booleova aritmetika — všechny se stejným cílem: výrazně zvýšit kapacitu počítače. V nadcházejících letech můžeme očekávat vzrušující a intenzivní práci v této oblasti.

5. Udržení moci matematiky ve 21. století

Podstatná část tohoto pojednání byla věnována trendům a problémům výzkumu. Ovšem je nezodpovědné diskutovat o výzkumu bez zmínky o kontextu, v němž k němu dochází. Úspěch výzkumu záleží na kvalitě lidí, kteří ho dělají, a na stupni trvalé podpory od společnosti. Jinými slovy vyžaduje „trpělivý kapitál". Nové tisíciletí přinese řadu kontextových otázek, v každém ohledu stejně náročných jako výzkumné problémy, které chceme vyřešit.

Vzdělání. Za prvé, jak můžeme přilákat nejlepší mladé talenty k matematice? V této oblasti jsme viděli během posledního půlstoletí výraznou změnu. Za druhé světové války přinesla věda a technika hodně vzrušení a přitáhla poválečné studenty k celoživotní výzkumné práci. Tento trend získal mocný impuls v roce 1957, kdy byl vypuštěn sovětský satelit Sputnik a věda byla oceněna za svou politickou a ekonomickou moc, kterou umí vytvořit. Výzkum se pro společnost stal stejně důležitý, jako byl pro vědce fascinující.

Avšak ke konci století se zdá, že se zájem společnosti o mnoho oblastí výzkumu ve většině zemí světa snížil. Matematika a ostatní přírodní vědy s výjimkou biomedicínských oborů se už nezdají být tak důležité pro společnost jako kdysi a ani neposkytují žádoucí příležitosti kariéry. V rozvinutých i rozvojových zemích se mnoho nadaných studentů, kteří by se dříve byli rozhodli pro kariéru v matematice, vydává jinam. Vybírají si aplikovanou informatiku, obchod a jiné oblasti, kde se budoucnost jeví zajímavěji. Zdá se, že bohatost a užitečnost předmětu samého není vůbec oceněna.

Je ironické, že zájem studentů je nízký právě teď, kdy profesní příležitosti pro matematiky vědce nikdy nebyly větší či rozmanitější. To platí jak pro tradiční oblasti disciplíny, které jsou bohaté novými poznatky a náročnými problémy, tak pro aplikované oblasti a další části vědy, kde bude v blízké budoucnosti poptávka po matematicích s patřičným vzděláním stále rychle růst.

Zřejmým důvodem nezájmu studentů je, že nepředáváme úplný obrázek matematiky jako oboru, kde si člověk může vybrat mezi tolika intelektuálně vděčnými a náročnými oblastmi. Lidé, kteří k tomu mají nejlepší příležitost, jsou středoškolští učitelé, vysokoškolští pracovníci a kolegové. Ovšem tyto skupiny mohou popsat současné příležitosti a rychle rostoucí disciplínu pouze tehdy, pokud jsou zase oni informováni těmi, kdo se jimi zabývají. Matematická komunita jako celek tak čelí rozhodující výzvě: rozvíjet více vzájemných interakcí na každé úrovni výuky a praxe a rozšířit komunikační kanály se studenty, kteří nás nakonec nahradí a rozšíří naši práci v novém století.

Dosah. Úzce spojena s výukovými potřebami je příležitost lépe komunikovat s veřejností a vzdělat ji v matematických otázkách. Matematici očividně rozumějí účelu a hodnotě své práce, ale mnoho lidí ve vládě, obchodu a dokonce i ve vzdělání toto porozumění nesdílí. Pokud matematici očekávají, že jejich výzkum na univerzitách bude podporován veřejnými fondy, musejí veřejnosti předvést živější obrázek tohoto výzkumu a jeho moci prohloubit naše porozumění světu a zvýšit prosperitu. Již není možné zůstat stranou pomíjivých potřeb světa či pracovat ve věži ze slonoviny.

Kultura nového tisíciletí bude vysoce interaktivní a kolaborativní. Matematici se musí chopit příležitosti nejen spolupracovat s jinými matematiky a vědci, ale také se obrátit ke společnosti jako takové. Jsou jedinečně kvalifikovaní srozumitelně vyjádřit hodnotu matematiky pro dosažení významného pokroku v oblasti věd a zdraví, prosazování silných ekonomických nástrojů a zkoumání vzorů a pravd ve vesmíru, v němž žijeme.

Interakce. Nakonec si zaslouží zmínku trend k interakci. Viděli jsme, že uvnitř matematiky a věd se mnoho produktivní práce udělá na pomezí mezi podobory, obory a disciplínami. Matematika něco ztrácí, když je izolována či fragmentována podle paradigmat jednotlivých odvětví. Ovšem řada institucí se adaptuje na tuto realitu jen pomalu. Univerzity na celém světě a mnoho průmyslových odvětví a státních agentur mnoho získávají, pokud jejich vzájemná spolupráce přispívá k odbourání bariér uvnitř matematiky.

Zvlášť hodně se dá udělat k zintenzívnění vztahů mezi akademickými a průmyslovými matematiky. Primární cíle akademického světa a průmyslu se vskutku liší, přesto se mají tyto dvě kultury hodně co učit jeden od druhého a mohou ze vzájemné spolupráce mnoho získat. Vědecké podnikání může obecně dosáhnout plného potenciálu, jen pokud je mezi tvůrci a uživateli matematiky těsná spolupráce.

Nové tisíciletí. Globalizace, interakce a „otevření se“ matematiky je nový a silný trend. Jako posla věcí příštích si všimněte způsobu, kterým se Thomas Hales rozhodl zvěstovat svůj důkaz Keplerova problému uspořádání koulí. Místo aby ho publikoval v odborném časopise, kde by jeho výsledky viděl jen malý počet odborníků, otevřel ho široké veřejnosti na internetu. Navíc otevřeně vyzval k podrobnému zkoumání svého důkazu a dalším příspěvkům k jeho zpřesnění, což je významný krok v soutěživém světě špičkových matematiků.

Obecně tedy my matematici máme dva cíle při vstupu do dalšího tisíciletí. Prvním je udržet tradiční sílu základního výzkumu, který je líhní nových myšlenek a aplikací. Druhým je rozšířit naše zkoumání terénu mimo tradice našeho oboru — v dalších vědách a světě mimo vědu. Každým dalším rokem dosahují matematici větší účinnosti své práce tak, že ji nabízejí ostatním a naopak — zvou ostatní do světa matematiky.

Poděkování. Tento článek byl připraven na základě vystoupení na konferenci Frontiers of the Mind in the 21st Century, která se konala v kongresové knihovně ve Washingtonu, DC, 15. června 1999. Cílem vystoupení bylo sdělit široké veřejnosti něco o matematice.

PHILLIP A. GRIFFITHS se stal 7. ředitelem Institutu pokročilých studií v roce 1991. V letech 1983–91 zastával post profesora matematiky na Duke University. V letech 1972–83 byl profesorem matematiky na univerzitě v Harvardu. Učil také na univerzitě v Princetonu a na Kalifornské univerzitě v Berkeley. Dr. Griffiths pochází z Raleigh v Severní Karolíně a titul PhD mu byl udělen na Princeton University. Je členem Národní akademie věd a Americké filozofické společnosti a v letech 1991–96 byl členem Národní vědecké rady.