Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Jiří Bouchala

Přechodem hory k řešení okrajové úlohy

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 46 (2001), No. 1, 43--51

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/141062`

Přechodem hory k řešení okrajové úlohy

Jiří Bouchala, Ostrava

Spousta problémů, speciálně řešení řady diferenciálních rovnic, vede k úkolu najít stacionární bod nějakého funkcionálu. Budeme se zabývat otázkou existence takového bodu a ukážeme si tři z mnoha metod založených na splnění tzv. Palaisovy-Smaleovy podmínky.

Domluvme se takto: podnikneme tři výlety do různých říší. Při prvním nasbíráme nápady, při druhém je přebereme a zformulujeme příslušné věty a při třetím dokážeme pomocí těchto vět existenci alespoň jednoho slabého řešení jistých diferenciálních rovnic.

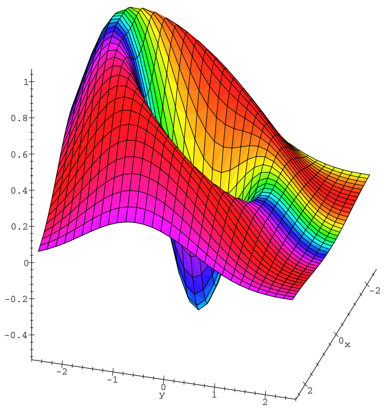
První výlet, a to do 2. semestru matematické analýzy

Mějme zobrazení

$$J : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

a hledejme podmínky, které zaručí existenci stacionárního bodu J.

Představme si pro inspiraci takovouto situaci:



$$\begin{gathered} J \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}), \\ r > 0, \quad e \in \mathbb{R}^2, \quad \|e\| > r, \\ \inf_{\|u\|=r} J(u) > J(0) \geqq J(e). \end{gathered} \tag{1}$$

Nabízí se tato myšlenka: uvažujme všechny křivky ležící na grafu funkce J a jdoucí z bodu $(0, J(0))$ do bodu $(e, J(e))$; na každé z těchto křivek vezměme *nejvyšší* bod. Zdá se, že *nejnižší* z takto vybraných bodů odpovídá stacionárnímu bodu funkce J.

RNDr. Jiří Bouchala, Ph. D. (1966), katedra aplikované matematiky, FEI, VŠB – TU Ostrava, e-mail: `jiri.bouchala@vsb.cz`

Tento text vznikl přepracováním stejnojmenné přednášky pronesené autorem na semináři *Moderní matematické metody v inženýrství* v Dolní Lomné v roce 1998.

Příspěvek vznikl za podpory grantů GAČR 201/00/0376 a MŠMT J17/98: 272400019.

Řekněme to přesněji: obrázek svádí k domněnce, že

$$c \overset{\text{def}}{=} \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in\langle 0,1\rangle} J\bigl(\gamma(t)\bigr), \tag{2}$$

kde

$$\Gamma \overset{\text{def}}{=} \{\gamma \in C(\langle 0,1\rangle, \mathbb{R}^2) : \ \gamma(0) = 0,\ \gamma(1) = e\}$$

je kritickou hodnotou J, tzn. že existuje $u \in \mathbb{R}^2$ takové, že

$$J(u) = c, \quad J'(u) = 0.$$

Nemusí to být pravda!

Hezký protipříklad nalezli Brézis s Nirenbergem (viz [5]):

$$J(x,y) \overset{\text{def}}{=} x^2 + (1-x)^3 \cdot y^2.$$

Volme

$$r = \tfrac{1}{2}, \quad e = (2,2).$$

Pak zřejmě

$$J(0) = 0 = J(e),$$
$$\inf_{\|(x,y)\|=r} J(x,y) = \min_{\|(x,y)\|=r} J(x,y) > 0.$$

Na druhou stranu snadno spočteme, že

$$\frac{\partial J}{\partial x}(x,y) = 2x - 3(1-x)^2 \cdot y^2,$$
$$\frac{\partial J}{\partial y}(x,y) = 2(1-x)^3 \cdot y,$$

a proto bod 0 je jediným stacionárním bodem J, přičemž $J(0) < c$; c není kritickou hodnotou J.

Příčinou potíží je tato skutečnost: volíme-li křivky $\gamma_n \in \Gamma$ a body $u_n \in \mathbb{R}^2$ tak, aby

$$\max_{t\in\langle 0,1\rangle} J\bigl(\gamma_n(t)\bigr) = J(u_n) \to c,$$

je $\|u_n\| \to \infty$. (Nápověda k podrobnějšímu rozmyšlení: znázorněte si v $\mathbb{R}^2$ vrstevnici $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : J(x,y) = 1\}$ a ukažte, že $c = 1$.)

Dá se ukázat (viz [2], Theorem 1.15, str. 12), že za situace (1) existuje posloupnost (u_n) v $\mathbb{R}^2$ taková, že

$$\bigl(J(u_n)\bigr) \to c \quad \text{a že} \quad J'(u_n) \to 0.$$

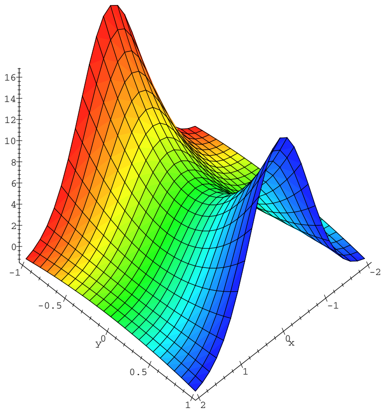
Pokud bychom věděli, že z takovéto posloupnosti lze vybrat posloupnost konvergentní, bylo by zřejmě c kritickou hodnotou J.

$$\Big(u_n \to u, \quad J(u_n) \to c, \quad J'(u_n) \to 0 \overset{J \in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})}{\Longrightarrow} J(u) = c, \quad J'(u) = 0.\Big)$$

Toho lze docílit například přidáním předpokladu:

$$\left.\begin{array}{l} (u_n) \text{ je posloupnost v } \mathbb{R}^2, \\ \big(J(u_n)\big) \text{ je omezená posloupnost v } \mathbb{R}, \\ J'(u_n) \to 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow (u_n) \text{ je omezená posloupnost.} \qquad (P)$$

Před zobecněním uvedených úvah si prohlédněme ještě jednu situaci:



$$\begin{gathered} J \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}), \\ \varrho > 0, \\ \inf_{u \in \{(0,y):y \in \mathbb{R}\}} J(u) > \max_{u \in \{(-\varrho,0),(\varrho,0)\}} J(u). \end{gathered} \tag{3}$$

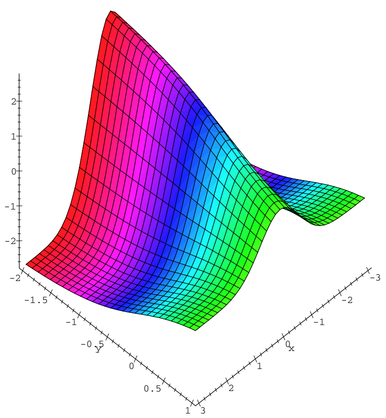
Opět: obrázek zrádně napovídá, že

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in \langle -\varrho, \varrho \rangle} J\big(\gamma(t)\big), \tag{4}$$

kde

$$\Gamma = \{\gamma \in C(\langle -\varrho, \varrho \rangle, \mathbb{R}^2) : \ \gamma(-\varrho) = (-\varrho, 0), \ \gamma(\varrho) = (\varrho, 0)\},$$

je kritickou hodnotou funkcionálu J. Opět dokažme pomocí protipříkladu, že tomu tak nemusí být:



$$J(x,y) \overset{\text{def}}{=} (2\mathrm{e}^{-x^2} - 1) \cdot \operatorname{arccotg} y$$

Volme $\varrho = 1$. Pak zřejmě platí:

$$\inf_{y\in\mathbb{R}} J(0,y) = 0 > \max\{J(-\varrho,0), J(\varrho,0)\} = \left(\frac{2-\mathrm{e}}{\mathrm{e}}\right)\cdot\frac{\pi}{2}\,.$$

Na druhou stranu, protože

$$\frac{\partial J}{\partial x}(x,y) = -4x\mathrm{e}^{-x^2}\cdot \operatorname{arccotg} y,$$
$$\frac{\partial J}{\partial y}(x,y) = -(2\mathrm{e}^{-x^2}-1)\cdot\frac{1}{1+y^2}\,,$$

neexistuje žádný stacionární bod J.

Příčinou nezdaru je totéž, co u prvního příkladu, a opět situaci zachrání, budeme-li kromě (3) předpokládat i (P).

Druhý výlet, tentokrát do říše funkcionální analýzy

Pokusíme se zobecnit již uvedená tvrzení pro funkcionály

$$J \in C^1(X,\mathbb{R}),$$

kde X je (reálný) Banachův prostor. Předpoklad (P) je však nutno nahradit „tvrdším“ omezením — tzv. Palaisovou-Smaleovou podmínkou (důvodem je skutečnost, že v nekonečně dimenzionálním prostoru nejsou omezené množiny relativně kompaktní):

$$\left.\begin{array}{l}(u_n) \text{ je posloupnost v } X,\\ \big(J(u_n)\big) \text{ je omezená posloupnost v } \mathbb{R},\\ J'(u_n)\to 0 \text{ v } X^*\end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l}\text{z posloupnosti } (u_n) \text{ lze vybrat}\\ \text{posloupnost konvergentní.}\end{array} \qquad (PS)$$

Získáme tak slíbené věty:

Věta 1 („Mountain Pass Theorem“; Ambrosetti, Rabinowitz, 1973). *Nechť*

- *X je Banachův prostor,*
- *$J \in C^1(X,\mathbb{R})$,*
- *$r > 0$, $e \in X$, $\|e\| > r$,*
- *$\inf\limits_{\|u\|=r} J(u) > J(0) \geqq J(e)$,*
- *J splňuje (PS) podmínku.*

Potom

$$c \overset{\text{def}}{=} \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in\langle 0,1\rangle} J\big(\gamma(t)\big), \quad \text{kde} \quad \Gamma \overset{\text{def}}{=} \{\gamma\in C(\langle 0,1\rangle, X):\ \gamma(0)=0,\ \gamma(1)=e\},$$

je kritickou hodnotou funkcionálu J.

Věta 2 („Saddle Point Theorem“; Rabinowitz, 1978). *Nechť*

- $X = Y \oplus Z$ *je Banachův prostor,*
- $\dim Y < \infty$,
- $\varrho > 0$,
- $M = \{u \in Y : \|u\| \leqq \varrho\}$,
- $N = \{u \in Y : \|u\| = \varrho\}$,
- $J \in C^1(X, \mathbb{R})$,
- $\inf\limits_{u \in Z} J(u) > \max\limits_{u \in N} J(u)$,
- J *splňuje* (PS) *podmínku.*

Potom

$$c \overset{\text{def}}{=} \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{u \in M} J\big(\gamma(u)\big), \quad \text{kde} \quad \Gamma \overset{\text{def}}{=} \{\gamma \in C(M, X) : \ \gamma|_N = \text{id}\},$$

je kritickou hodnotou funkcionálu J.

Uveďme si ještě jedno tvrzení o funkcionálech splňujících (PS) podmínku, pomocí něhož pak dokážeme existenci slabého řešení Poissonovy rovnice.

Věta 3 („Ekelandův variační princip“; Ekeland, 1974). *Nechť* X *je Banachův prostor a nechť funkcionál* $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ *je na* X *omezený zdola a splňuje* (PS) *podmínku. Pak existuje* $\min\limits_{u \in X} J(u)$.

Třetí a poslední výlet, výlet mezi diferenciální rovnice

Ukážeme si na třech příkladech, jak lze uvedených úvah a vět využít při důkazu existence řešení diferenciálních rovnic.

Věta 4. *Nechť* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geqq 1)$ *je omezená oblast s lipschitzovskou hranicí a nechť* $f \in L^2(\Omega)$. *Potom úloha*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{na } \ \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{na } \ \partial\Omega \end{cases} \tag{5}$$

má ve $W_0^{1,2}(\Omega)$ *alespoň jedno slabé řešení.*

Důkaz věty 4. Je známo, že slabá řešení úlohy (5) odpovídají stacionárním bodům funkcionálu

$$J(u) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x - \int_\Omega f \cdot u \, \mathrm{d}x \ : \ W_0^{1,2}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \tag{6}$$

s derivací

$$\langle J'(u), \varphi \rangle = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, \mathrm{d}x - \int_\Omega f \cdot \varphi \, \mathrm{d}x. \tag{7}$$

Značme

$$\|u\| = \sqrt{\int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x}$$

normu na prostoru $W_0^{1,2}(\Omega)$ a připomeňme si, že

$$W_0^{1,2}(\Omega) \subset\subset L^2(\Omega), \tag{8}$$

z čehož plyne existence $c > 0$ takového, že pro každé $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ platí:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\int_\Omega u^2 \, \mathrm{d}x} \leqq c \cdot \|u\|. \tag{9}$$

Odtud a z (6) pomocí Hölderovy nerovnosti získáme informaci:

$$\begin{aligned} J(u) &\geqq \tfrac{1}{2} \cdot \|u\|^2 - \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|u\|_{L^2(\Omega)} \geqq \\ &\geqq \tfrac{1}{2} \cdot \|u\|^2 - \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot c \cdot \|u\| \to \infty \quad \text{pro } \|u\| \to \infty, \end{aligned} \tag{10}$$

z níž vyplývá, že funkcionál J je na $W_0^{1,2}(\Omega)$ omezený zdola. K dokončení důkazu, že J nabývá na $W_0^{1,2}(\Omega)$ svého minima (v němž je pak nutně stacionární bod), stačí ukázat (viz větu 3), že J splňuje (PS) podmínku.

Předpokládejme, že pro posloupnost (u_n) platí:

$$\big(J(u_n)\big) \text{ je omezená posloupnost a } J'(u_n) \to 0. \tag{11}$$

Odtud a z (10) snadno plyne, že posloupnost (u_n) je omezená. Protože $W_0^{1,2}(\Omega)$ je reflexivní Banachův prostor, existuje $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ a posloupnost vybraná z posloupnosti (u_n) (značme ji stejně) taková, že

$$u_n \rightharpoonup u.$$

Navíc, protože

$$J'(u_n) \to 0,$$

platí:

$$\langle J'(u_n), u_n - u\rangle = \int_\Omega \nabla u_n \cdot \nabla(u_n - u) \, \mathrm{d}x - \int_\Omega f \cdot (u_n - u) \, \mathrm{d}x \to 0. \tag{12}$$

Všimněme si, že:

- $\left|\int_\Omega f \cdot (u_n - u) \, \mathrm{d}x\right| \leqq \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|u_n - u\|_{L^2(\Omega)} \to 0,$
  protože díky $u_n \rightharpoonup u$ a kompaktnímu vnoření (8) platí, že $u_n \to u$ v $L^2(\Omega)$;
- zobrazení $\varphi \mapsto \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi \, \mathrm{d}x \in \big(W_0^{1,2}(\Omega)\big)^*$
  $\big(\left|\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi \, \mathrm{d}x\right| \leqq \|u\| \cdot \|\varphi\|\big)$, a proto $\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(u_n - u) \, \mathrm{d}x \to 0$.

Z těchto pozorování a ze vztahu (12) snadno zjistíme, že

$$0 \leftarrow \int_\Omega \nabla u_n \cdot \nabla(u_n - u) \, \mathrm{d}x - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(u_n - u) \, \mathrm{d}x \geqq \big(\|u_n\| - \|u\|\big)^2 \geqq 0, \tag{13}$$

a proto $\|u_n\| \to \|u\|$. Protože navíc $u_n \rightharpoonup u$ a $W_0^{1,2}(\Omega)$ je uniformně konvexní Banachův prostor, je $u_n \to u$. To jsme si přáli dokázat. □

Věta 5. *Dirichletova úloha*

$$\begin{cases} -u'' = u^3 \quad \text{v } (0,\pi), \\ \quad u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases} \tag{14}$$

má ve $W_0^{1,2}(0,\pi)$ *alespoň jedno netriviální slabé řešení.*

Důkaz věty 5. Slabá řešení úlohy (14) odpovídají kritickým bodům funkcionálu

$$J(u) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\int_0^\pi \big(u'(x)\big)^2 \,\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int_0^\pi \big(u(x)\big)^4 \,\mathrm{d}x.$$

Je známo (opatrný čtenář si důkaz může vyhledat v [2]), že

$$J \in C^1\big(W_0^{1,2}(0,\pi), \mathbb{R}\big)$$

a že

$$\langle J'(u), \varphi\rangle = \int_0^\pi u'(x)\cdot\varphi'(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^\pi \big(u(x)\big)^3\cdot\varphi(x)\,\mathrm{d}x. \tag{15}$$

Připomeňme si, že

$$\|u\| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\int_0^\pi \big(u'(x)\big)^2 \,\mathrm{d}x}$$

je normou na prostoru $W_0^{1,2}(0,\pi)$. Protože

$$W_0^{1,2}(0,\pi) \subset\subset L^4(0,\pi), \tag{16}$$

existuje $c > 0$ takové, že pro každé $u \in W_0^{1,2}(0,\pi)$ platí:

$$J(u) = \tfrac{1}{2}\cdot\|u\|^2 - \tfrac{1}{4}\cdot\|u\|^4_{L^4(0,\pi)} \geqq \tfrac{1}{2}\cdot\|u\|^2 - \tfrac{1}{4}\cdot c\cdot\|u\|^4, \tag{17}$$

a proto existuje $r > 0$ takové, že

$$\inf_{\|u\|=r} J(u) > J(0) = 0. \tag{18}$$

Nyní vezměme libovolné

$$0 \not\equiv u \in W_0^{1,2}(0,\pi) \;\text{ a }\; t\in\mathbb{R}.$$

Potom

$$J(t\cdot u) = \frac{1}{2}\cdot t^2\cdot\int_0^\pi \big(u'(x)\big)^2\,\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\cdot t^4\cdot\int_0^\pi\big(u(x)\big)^4\,\mathrm{d}x \to -\infty \;\text{ pro }\; t\to+\infty,$$

a proto existuje $e = t\cdot u \in W_0^{1,2}(0,\pi)$ takové, že

$$\|e\| > r, \quad J(e) \leqq 0 = J(0). \tag{19}$$

Dokázali jsme, že funkcionál J splňuje „geometrické“ předpoklady věty 1. Zbývá dokázat, že funkcionál J splňuje (PS) podmínku. Buď (u_n) Palaisova-Smaleova posloupnost ve $W_0^{1,2}(0,\pi)$, tj. nechť platí:

$$c \overset{\text{def}}{=} \sup\{|J(u_n)| : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R} \quad \text{a} \quad J'(u_n) \to 0. \tag{20}$$

Odtud snadno plyne, že pro všechna dost velká $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$c + \|u_n\| \geqq J(u_n) - \tfrac{1}{4} \cdot \langle J'(u_n), u_n \rangle = \tfrac{1}{4} \cdot \|u_n\|^2,$$

a proto posloupnost (u_n) je omezená. Dále postupujme analogicky (a proto rychleji) jako v důkazu věty 4. Protože $W_0^{1,2}(0,\pi)$ je reflexivní Banachův prostor, existuje $u \in W_0^{1,2}(0,\pi)$ a posloupnost vybraná z posloupnosti (u_n) (značme ji stejně) taková, že $u_n \rightharpoonup u$. Z předpokladu (20) pak vyplývá:

$$\langle J'(u_n), u_n - u \rangle = \int_0^\pi u_n' \cdot (u_n - u)' \, \mathrm{d}x - \int_0^\pi u_n^3 \cdot (u_n - u) \, \mathrm{d}x \to 0. \tag{21}$$

Odtud získáme:

$$0 \leftarrow \int_0^\pi u_n' \cdot (u_n - u)' \, \mathrm{d}x - \int_0^\pi u' \cdot (u_n - u)' \, \mathrm{d}x \geqq (\|u_n\| - \|u\|)^2 \geqq 0, \tag{22}$$

a proto $\|u_n\| \to \|u\|$. Dokazované tvrzení $u_n \to u$ je přímým důsledkem uniformní konvexity prostoru $W_0^{1,2}(0,\pi)$ a konvergencí $u_n \rightharpoonup u$ a $\|u_n\| \to \|u\|$. $\square$

Pro ilustraci užitečnosti věty 2 uvažujme problém

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda_1 |u|^{p-2} u + g(u) - h(x) & \text{v } \Omega, \\ \quad u = 0 \quad \text{na } \partial\Omega, \end{cases} \tag{23}$$

kde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je omezená oblast s lipschitzovskou hranicí, $N \geqq 1$, $p > 1$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce, $h \in L^{p'}(\Omega)$ $(p' = p/(p-1))$, Δ_p je p-Laplacián, tj

$$\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u),$$

a λ_1 je první vlastní číslo $-\Delta_p$ na Ω (uvažujeme problém s nulovou Dirichletovou hraniční podmínkou). Dá se ukázat, že

$$\lambda_1 = \min\left\{ \int_\Omega |\nabla u|^p \, \mathrm{d}x : \; u \in W_0^{1,p}(\Omega), \; \int_\Omega |u|^p \, \mathrm{d}x = 1 \right\}$$

a že λ_1 je kladné, izolované a jednoduché vlastní číslo, k němuž existuje na Ω kladná vlastní funkce $\varphi_1 \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Věta 6. *Nechť*

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{g(x)}{|x|^{p-1}} = 0 \tag{24}$$

a nechť platí buď

$$\overline{F(-\infty)} \int_\Omega \varphi_1(x)\ \mathrm{d}x < (p-1) \int_\Omega h(x)\varphi_1(x)\ \mathrm{d}x < \underline{F(+\infty)} \int_\Omega \varphi_1(x)\ \mathrm{d}x, \tag{25}$$

nebo

$$\overline{F(+\infty)} \int_\Omega \varphi_1(x)\ \mathrm{d}x < (p-1) \int_\Omega h(x)\varphi_1(x)\ \mathrm{d}x < \underline{F(-\infty)} \int_\Omega \varphi_1(x)\ \mathrm{d}x, \tag{26}$$

kde

$$F(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{p}{x} \int_0^x g(s)\ \mathrm{d}s - g(x),$$

$$\overline{F(-\infty)} \overset{\text{def}}{=} \limsup_{x\to-\infty} F(x), \quad \underline{F(+\infty)} \overset{\text{def}}{=} \liminf_{x\to+\infty} F(x),$$

$$\overline{F(+\infty)} \overset{\text{def}}{=} \limsup_{x\to+\infty} F(x), \quad \underline{F(-\infty)} \overset{\text{def}}{=} \liminf_{x\to-\infty} F(x).$$

Pak má úloha (23) alespoň jedno slabé řešení $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Poznámka k důkazu věty 6. Dá se ukázat, že slabá řešení problému (23) odpovídají kritickým bodům funkcionálu

$$J(u) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla u|^p\ \mathrm{d}x - \frac{\lambda_1}{p} \int_\Omega |u|^p\ \mathrm{d}x - \int_\Omega G(u)\ \mathrm{d}x + \int_\Omega hu\ \mathrm{d}x\ :\ W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R},$$

kde

$$G(x) \overset{\text{def}}{=} \int_0^x g(s)\ \mathrm{d}s.$$

Předpoklady (24) a (25 nebo 26) zaručují, že J splňuje Palaisovu-Smaleovu podmínku. Navíc lze dokázat, že v případě (25) má J geometrii sedlového bodu a že v případě (26) je funkcionál J dokonce zdola omezený. Tvrzení věty proto snadno získáme aplikací věty 2 a věty 3.

Čtenáře, který touží po podrobném důkazu, (snad) uspokojí čtení [4].

L i t e r a t u r a

[1] RABINOWITZ, P. H.: *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations.* Amer. Math. Soc., Providence 1986.

[2] WILLEM, M.: *Minimax theorems.* Birkhäuser, Boston 1996.

[3] BOUCHALA, J.: *Zobecněné Landesman-Lazerovy podmínky.* Sborník ze 7. semináře Moderní matematické metody v inženýrství (3μ), Frýdlant n. O. 1999.

[4] BOUCHALA, J., DRÁBEK, P.: *Strong resonance for some quasilinear elliptic equations.* J. Math. Anal. Appl. *245* (2000), 7–19.

[5] BRÉZIS, H., NIRENBERG, L.: *Remarks on finding critical points.* Comm. Pure Appl. Math. *64* (1991).