Vojtěch Pravda
Spinory v teorii relativity

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 45 (2000), No. 4, 284--293

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/141048

Spinory v teorii relativity

Vojtěch Pravda, Praha

1. Úvod

Jedním z nejdůležitějších výsledků speciální teorie relativity je, že základní fyzikální zákony lze vyjádřit snadněji ve čtyřrozměrném Minkowského prostoročase než ve třírozměrném prostoru. V obecné teorii relativity, která na rozdíl od speciální teorie relativity popisuje i gravitaci, zavádíme zakřivený prostoročas, ve kterém lze lokálně (v každém bodě) zvolit tečný (plochý) Minkowského prostoročas, v němž platí zákony speciální teorie relativity. V Minkowského prostoročase lze pro popis fyzikálních veličin zavést nejrůznější matematické struktury. Mezi nejčastěji používané patří vektory a tenzory. Méně často jsou používány spinory, kterým je věnován tento článek. Než se jimi začneme zabývat, připomeňme si několik základních pojmů.

Minkowského prostoročas je čtyřrozměrný reálný vektorový prostor V a existuje v něm tedy báze čtyř vektorů $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$. Každý vektor z V (tzv. čtyřvektor) můžeme vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů báze

$$\boldsymbol{v} = v^0\boldsymbol{t} + v^1\boldsymbol{x} + v^2\boldsymbol{y} + v^3\boldsymbol{z},$$

kde v^α (řecké indexy nabývají hodnot 0, 1, 2, 3) jsou komponenty vektoru $\boldsymbol{v}$ v bázi $\boldsymbol{t}, \dots, \boldsymbol{z}$.

V Minkowského prostoročase též zavádíme skalární součin[1]) dvou vektorů

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u^0v^0 - u^1v^1 - u^2v^2 - u^3v^3,$$

což můžeme též zapsat ve tvaru

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \eta_{\alpha\beta}u^\alpha v^\beta, \tag{1}$$

kde používáme tzv. Einsteinovu sumační konvenci (tj. sčítáme přes všechny dvakrát se opakující indexy) a kde $\eta_{\alpha\beta}$ je metrický tenzor tvaru

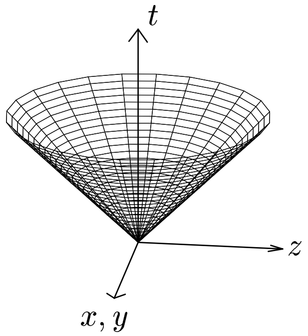
$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

[1]) V celém článku klademe podle rozšířené konvence rychlost světla rovnu jedné.

Mgr. Vojtěch Pravda, Ph. D. (1971), Matematický ústav AV ČR, Žitná 25, 115 67 Praha 1 (e-mail: pravda@math.cas.cz).

Podpořeno granty GAČR-201/98/1452 a GAČR-202/00/P030.

Takto definovaný skalární součin nesplňuje obvyklý požadavek, že skalární součin každého nenulového vektoru se sebou samým je kladný. Proto mají čtyřvektory v Minkowského prostoročase tu nezvyklou vlastnost, že se dělí na tři skupiny — podle toho, zda je jejich skalární součin se sebou samým kladný, nulový nebo záporný. Vektory splňující $\eta_{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta > 0$ nazýváme časupodobné, splňující $\eta_{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta < 0$ prostorupodobné a $\eta_{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta = 0$ nulového (nebo světelného) charakteru. Vektory se společným počátkem můžeme na časupodobné a prostorupodobné rozdělit pomocí tzv. světelného kužele (viz obr. 1). Uvnitř světelného kužele jsou vektory časupodobné, vně prostorupodobné a vektory nulového charakteru leží v površce světelného kužele.



Obr. 1. Světelný kužel v Minkowského prostoročase.

Vedle vektorů zavádíme v teorii relativity i 1-formy a tenzory. 1-formy jsou lineární zobrazení, která vektorům z V přiřazují reálná čísla. Všechny tyto 1-formy tvoří vektorový prostor V^* duální k V. Prvky z V bývají označovány jako kontravariantní vektory a často bývají stejně jako jejich komponenty označovány písmeny s horním řeckým indexem (např. $v^\alpha \in V$). Prvky z V^* se nazývají kovariantní vektory a označujeme je dolním řeckým indexem (např. $v_\alpha \in V^*$). Obecnější veličiny — tenzory typu (k, l) — jsou multilineární zobrazení (zobrazení lineární v každém argumentu), která k 1-formám a l vektorům přiřadí reálné číslo (blíže viz např. [6, 10]). Tenzor typu (k, l) obvykle označujeme k horními a l dolními řeckými indexy.

Příkladem tenzoru typu $(0, 2)$ je tenzor $F_{\alpha\beta}$ popisující elektromagnetické pole. Tento tenzor je antisymetrický (tj. $F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha}$) a má tedy šest nezávislých složek, stejně jako dvojice vektorů elektrické intenzity a magnetické indukce $\vec{E}$, $\vec{B}$.

Gravitační pole je v obecné teorii relativity popsáno metrickým tenzorem $g_{\alpha\beta}$ typu $(0, 2)$. Tento tenzor je symetrický ($g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$) a má obecně deset nezávislých složek. Speciálním případem je Minkowského prostoročas, ve kterém není přítomno gravitační pole a $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$. Z metrického tenzoru lze vypočítat Riemannův tenzor křivosti $R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}$ popisující křivost prostoročasu. Tento tenzor má určité symetrie a v obecném případě má 20 nezávislých složek. V plochém Minkowského prostoročase je Riemannův tenzor nulový.

2. Spinory

Jak jsme již uvedli, nejpoužívanějším formalismem v obecné teorii relativity je tenzorový počet. Existuje však i jiný formalismus, který je k řešení některých problémů výhodnější. Je to formalismus dvoukomponentových spinorů.

Pojem spinoru zavedl v roce 1913 E. Cartan [2]. Poprvé byly spinory použity ve fyzice v souvislosti s Diracovou rovnicí a pro potřeby obecné teorie relativity byly zobecněny v roce 1933 L. Infeldem a B. L. van der Waerdenem [5]. V šedesátých letech dal podnět k rozvoji této techniky R. Penrose svou prací [8]. V dnešní době lze v mnoha učebnicích obecné teorie relativity nalézt kapitoly věnované spinorovému počtu [7, 13, 11] a existují i monografie věnované této problematice [9, 4, 3, 1]. Český čtenář nalezne několik stran o spinorech i v publikaci [14].

Spinory jsou komplexní dvousložkové vektory. Všechny vektory a tenzory v prostoročase lze vyjádřit pomocí spinorů, není však možné vyjádřit všechny spinory pomocí vektorů a tenzorů (viz (5), (6)). Z tohoto hlediska jsou spinory obecnějšími veličinami než vektory a tenzory. Na rozdíl od kvantové teorie lze v obecné teorii relativity výpočty provádět jak pomocí tenzorového počtu, tak pomocí spinorů, avšak užitím spinorového formalismu lze mnohé výpočty výrazně zjednodušit.

Nechť W je dvojrozměrný komplexní vektorový prostor. Jeho prvky nazveme *kontravariantní* 1-spinory a budeme je značit řeckým písmenem s horním latinským indexem, např. $\xi^A \in W$, $A = 0, 1$. Dvojrozměrný komplexní vektorový prostor duální k W (tj. prostor všech lineárních zobrazení z W do komplexních čísel $\mathbb{C}$) označme W^*. Jeho prvky nazvěme *kovariantní* 1-spinory a budeme je značit řeckým písmenem s dolním latinským indexem, např. $\lambda_A \in W^*$.

Protože pracujeme s komplexním vektorovým prostorem, můžeme ještě definovat tzv. komplexně konjugovaný duální vektorový prostor — prostor všech antilineárních zobrazení z W do $\mathbb{C}$, který budeme značit $\overline{W}^*$. Zobrazení F z W do $\mathbb{C}$ je antilineární, pokud splňuje $F(x+y) = F(x) + F(y)$ a $F(cz) = \bar{c}F(z)$ pro všechna $x, y, z \in W$ a $c \in \mathbb{C}$, kde $\bar{c}$ označuje číslo komplexně sdružené k c. Prvky z prostoru $\overline{W}^*$ budeme značit řeckým písmenem s dolním latinským tečkovaným indexem, např. $\psi_{\dot{A}} \in \overline{W}^*$.

Ještě nám zbývá poslední dvojrozměrný komplexní vektorový prostor $\overline{W}$, který je duální k $\overline{W}^*$ a jehož prvky budeme značit řeckým písmenem s horním tečkovaným latinským indexem, např. $\varphi^{\dot{A}} \in \overline{W}$.

Spinorový počet se nepoužívá pouze v teorii relativity, ale též v kvantové teorii. Dvě komponenty spinoru z W odpovídají dvěma komponentám vlnové funkce částice se spinem $\frac{1}{2}$. V relativistické kvantové teorii je částice se spinem $\frac{1}{2}$ popisována Diracovým spinorem $\psi \in W \times \overline{W}^*$, který má 4 komponenty.

Spinorové tenzory lze zavést stejným způsobem jako tenzory — pomocí multilineárního zobrazení, což je zobrazení lineární v každém argumentu. Spinorovým tenzorem typu $(k, l, \dot{k}, \dot{l})$ budeme rozumět multilineární zobrazení

$$T\colon \underbrace{W^* \times \cdots \times W^*}_{k} \times \underbrace{W \times \cdots \times W}_{l} \times \underbrace{\overline{W}^* \times \cdots \times \overline{W}^*}_{\dot{k}} \times \underbrace{\overline{W} \times \cdots \times \overline{W}}_{\dot{l}} \to \mathbb{C}.$$

Spinorové tenzory typu $(k, l, \dot{k}, \dot{l})$ tvoří vektorový prostor, který budeme značit $W(k, l, \dot{k}, \dot{l})$.

Pomocí tzv. zvyšování (resp. snižování) indexů, kdy je ke každému spinoru $\xi_A \in W^*$ přiřazen spinor $\xi^A \in W$, lze zavést jednoznačnou korespondenci mezi prvky z W a W^* (a též mezi $\overline{W}$ a $\overline{W}^*$). Zvyšování a snižování indexů lze realizovat prostřednictvím matice ε^{AB}

$$\varepsilon_{AB} = \varepsilon^{AB} = \varepsilon_{\dot{A}\dot{B}} = \varepsilon^{\dot{A}\dot{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

která splňuje vztah[2])

$$\varepsilon^{AC}\varepsilon_{BC} = \delta^A_B,$$

kde δ^A_B je Kroneckerovo delta (tj. $\delta^0_0 = \delta^1_1 = 1$, $\delta^0_1 = \delta^1_0 = 0$). Podle konvence indexy zvyšujeme sčítáním přes druhý index v ε^{AB} a snižujeme sčítáním přes první index:

$$\Psi^{\mathcal{C}A} = \varepsilon^{AB}\Psi^{\mathcal{C}}{}_B, \qquad \Psi^{\mathcal{C}}{}_B = \varepsilon_{AB}\Psi^{\mathcal{C}A}, \tag{2}$$

kde $\mathcal{C}$ je multiindex (tj. zkrácené označení určité skupiny horních a dolních indexů). Obdobné vztahy platí i pro tečkované indexy.

Ze vztahů (2) plyne pro libovolný spinor ξ^A jednoduchý, ale důležitý vztah

$$\xi_A\xi^A = \varepsilon_{BA}\xi^B\xi^A = \varepsilon_{AB}\xi^A\xi^B = -\varepsilon_{BA}\xi^A\xi^B = -\xi_A\xi^A = 0, \tag{3}$$

kde jsme v první rovnosti použili vztah (2), ve druhé prohodili sčítací indexy A a B a ve třetí využili antisymetrie ε^{AB}.

Pomocí tzv. σ-matic splňujících vztahy

$$\sigma^{B\dot{X}}_\mu \sigma^\mu_{C\dot{Y}} = \delta^B_C \delta^{\dot{X}}_{\dot{Y}}, \qquad \sigma^\mu_{C\dot{Y}}\sigma^{C\dot{Y}}_\nu = \delta^\mu_\nu \tag{4}$$

lze každému tenzoru přiřadit spinor vztahem

$$T^{A\dot{W}B\dot{X}\ldots}_{C\dot{Y}\ldots} = \sigma^{A\dot{W}}_\mu \sigma^{B\dot{X}}_\nu \ldots \sigma^\kappa_{C\dot{Y}} \ldots T^{\mu\nu\ldots}_{\kappa\ldots}. \tag{5}$$

Tenzor lze přiřadit pouze spinorům se stejným počtem tečkovaných a netečkovaných indexů. Z (4) a (5) máme

$$T^{\mu\nu\ldots}_{\kappa\ldots} = \sigma^\mu_{A\dot{W}} \sigma^\nu_{B\dot{X}} \ldots \sigma^{C\dot{Y}}_\kappa \ldots T^{A\dot{W}B\dot{X}\ldots}_{C\dot{Y}\ldots}. \tag{6}$$

Místo vztahů (5) a (6) budeme zkráceně značit

$$T^{\mu\nu\ldots}_{\kappa\ldots} \longleftrightarrow T^{A\dot{W}B\dot{X}\ldots}_{C\dot{Y}\ldots}.$$

Obvyklá volba matic $\sigma^{A\dot{W}}_\mu$ odpovídá Pauliho maticím: $\sigma^{A\dot{W}}_\mu = (1/\sqrt{2})\sigma_\mu$, kde

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

[2]) Ve spinorovém počtu též používáme Einsteinovu sumační konvenci; na rozdíl od tenzorového počtu (viz vztah (1)), kde sčítáme přes čtyři hodnoty každého řeckého indexu, který se ve vzorci vyskytne dvakrát, zde sčítáme pouze přes dvě hodnoty indexu latinského.

Čtyřvektoru $\boldsymbol{v}$ potom odpovídá spinorový tenzor $V^{A\dot{W}}$

$$V^{A\dot{W}} = \sigma_{\mu}^{A\dot{W}} v^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v^0 + v^3, & v^1 - \mathrm{i}v^2 \\ v^1 + \mathrm{i}v^2, & v^0 - v^3 \end{pmatrix}.$$

Ve dvojrozměrném komplexním vektorovém prostoru W lze zvolit dva spinory o^A a ι^A jako prvky báze. Spinor ι^A obvykle volíme tak, aby byla splněna podmínka

$$o_A \iota^A = 1. \tag{7}$$

Spinor ι^A není rovnicí (7) určen jednoznačně, protože spinor

$$\iota'^A = \iota^A + z o^A, \tag{8}$$

kde z je libovolné komplexní číslo, také splňuje podmínku (7).

Libovolný spinor $\xi^A \in W$ můžeme vyjádřit jako lineární kombinaci spinorů báze

$$\xi^A = \lambda o^A + \mu \iota^A, \tag{9}$$

kde λ a μ jsou komponenty spinoru ξ^A v bázi o^A, ι^A. Vynásobíme-li obě strany poslední rovnice spinorem o_A, resp. ι_A, dostaneme s využitím (3) a (7) vztahy

$$\mu = \xi^A o_A, \qquad \lambda = -\xi^A \iota_A.$$

Vztah (9) nyní můžeme zapsat jako

$$\xi^A = \varepsilon^{AB} \xi_B = (o^A \iota^B - \iota^A o^B) \xi_B,$$

odkud vidíme, že bázové spinory splňují vztah

$$o^A \iota^B - \iota^A o^B = \varepsilon^{AB}. \tag{10}$$

3. Geometrická interpretace spinorů

Nyní si ukážeme, jakou mají spinory geometrickou interpretaci. Každému spinoru ξ^A lze na základě (6) přiřadit čtyřvektor $\boldsymbol{k}$ vztahem

$$k^{\alpha} = \sigma^{\alpha}_{A\dot{W}} \xi^A \bar{\xi}^{\dot{W}}, \qquad k_{\alpha} = \sigma_{\alpha}^{B\dot{Y}} \xi_B \bar{\xi}_{\dot{Y}}, \qquad k^{\alpha} \longleftrightarrow \xi^A \bar{\xi}^{\dot{A}}.$$

Jde o čtyřvektor nulového charakteru, protože

$$\begin{aligned} \eta_{\alpha\beta} k^{\alpha} k^{\beta} = k^{\alpha} k_{\alpha} &= \sigma^{\alpha}_{A\dot{W}} \sigma_{\alpha}^{B\dot{X}} \xi^A \bar{\xi}^{\dot{W}} \xi_B \bar{\xi}_{\dot{X}} = \\ &= \delta_A^B \delta_{\dot{W}}^{\dot{X}} \xi^A \bar{\xi}^{\dot{W}} \xi_B \bar{\xi}_{\dot{X}} = \xi^A \bar{\xi}^{\dot{W}} \xi_A \bar{\xi}_{\dot{W}} = 0. \end{aligned}$$

Každému spinoru ξ^A tedy odpovídá jednoznačně určený čtyřvektor $\boldsymbol{k}$ nulového charakteru. Tentýž čtyřvektor ale odpovídá i spinoru

$$\xi'^A = \exp(\mathrm{i}\varphi) \xi^A \tag{11}$$

(kde φ je reálné číslo) a spinor ξ^A tedy není možno pomocí $\boldsymbol{k}$ určit jednoznačně. Ve spinoru ξ^A je tedy oproti vektoru $\boldsymbol{k}$ obsažena dodatečná informace, kterou se dále pokusíme získat.

Ze spinoru ξ^A vytvoříme reálný spinorový tenzor se stejným množstvím tečkovaných a netečkovaných indexů

$$X^{AB\dot{W}\dot{X}} = \xi^A \xi^B \varepsilon^{\dot{W}\dot{X}} + \varepsilon^{AB} \bar{\xi}^{\dot{W}} \bar{\xi}^{\dot{X}}.$$

Dosadíme-li za ε^{AB} — pro bázi ξ^A, η^A — ze vztahu (10), dostaneme

$$X^{AB\dot{W}\dot{X}} = \xi^A \bar{\xi}^{\dot{W}} L^{B\dot{X}} - L^{A\dot{W}} \xi^B \bar{\xi}^{\dot{X}},$$

kde

$$L^{A\dot{W}} = \xi^A \bar{\eta}^{\dot{W}} + \eta^A \bar{\xi}^{\dot{W}}.$$

Spinoru $L^{A\dot{W}}$ lze standardním způsobem přiřadit čtyřvektor $\boldsymbol{l}$

$$\begin{aligned} l^\alpha \longleftrightarrow L^{A\dot{W}}, \quad \eta_{\alpha\beta} l^\alpha l^\beta &= l^\alpha l_\alpha = L^{A\dot{W}} L_{A\dot{W}} = -2, \\ \eta_{\alpha\beta} k^\alpha l^\beta &= k_\alpha l^\alpha = \xi_A \bar{\xi}_{\dot{W}} L^{A\dot{W}} = 0, \end{aligned}$$

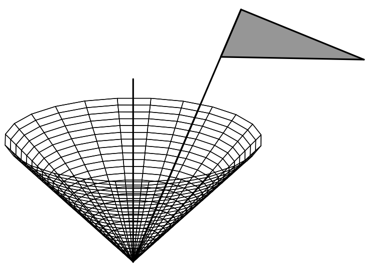
který má prostorupodobný charakter a je kolmý na $\boldsymbol{k}$.

Protože spinor η^A, který tvoří spolu s ξ^A bázi, není určen jednoznačně (viz (8)), neurčuje ani $X^{AB\dot{W}\dot{X}}$ jednoznačně tvar $L^{A\dot{W}}$, a tudíž ani čtyřvektor $\boldsymbol{l}$. Ve skutečnosti můžeme v závislosti na volbě η^A dostat libovolný vektor ve tvaru

$$\boldsymbol{l}' = \boldsymbol{l} + a\boldsymbol{k}, \tag{12}$$

kde a je libovolné reálné číslo.

Ukázali jsme, že spinor ξ^A určuje nulový vektor $\boldsymbol{k}$ a třídu prostorupodobných vektorů $\boldsymbol{l}'$ (12) kolmých na $\boldsymbol{k}$. Tento výsledek je obyčejně geometricky znázorňován pomocí praporku: žerď má směr nulového vektoru $\boldsymbol{k}$ a vlajka leží v rovině tvořené vektory $\boldsymbol{l}'$ (viz obr. 2).



Obr. 2. Geometrická interpretace spinoru: nulový vektor $\boldsymbol{k}$ tvoří žerď praporu, vektory $\boldsymbol{l}'$ tvoří rovinu, ve které leží vlajka.

Lze ukázat [9], že transformace (11) odpovídá otočení praporku o úhel 2φ (žerď zůstává pevná a rovina vlajky se stáčí o úhel 2φ). Při otočení praporku o úhel 2π se spinor otočí o úhel π a stejný praporek tedy odpovídá spinorům ξ^A i $-\xi^A$. Bázi ξ^A a η^A lze asociovat s určitou bází ve V. Při rotaci této báze ve V kolem pevné osy o úhel 2π přechází libovolný spinor λ^A na $-\lambda^A$. Složky spinoru nemůžeme tedy v dané prostoročasové bázi přímo měřit, protože mohou mít dvě různé hodnoty. Můžeme však měřit veličiny jako $\xi^A\bar{\xi}^{\dot{A}}$, podobně jako v kvantové mechanice nelze měřit fázi vlnové funkce ψ, ale můžeme měřit $\psi\bar{\psi}$.

4. Symetrické spinory

Nyní se budeme zabývat vlastnostmi úplně symetrických spinorů a jejich aplikacemi ve fyzice. Operaci symetrizace budeme stejně jako v klasickém tenzorovém počtu značit tím, že odpovídající indexy uzavřeme do kulatých závorek. Platí tedy např.

$$P^{(ABC)} = \frac{1}{3!}\left(P^{ABC} + P^{ACB} + P^{BAC} + P^{BCA} + P^{CAB} + P^{CBA}\right).$$

Pro úplně symetrické spinory platí užitečné tvrzení:

Ke každému úplně symetrickému spinoru $\Phi_{AB\ldots L} = \Phi_{(AB\ldots L)} \neq 0$ existují spinory α_A, β_B, …, λ_L (určené jednoznačně až na násobení konstantou) tak, že

$$\Phi_{AB\ldots L} = \alpha_{(A}\beta_B \ldots \lambda_{L)}. \tag{13}$$

Zápis spinoru $\Phi_{AB\ldots L}$ ve tvaru úplně symetrizovaného součinu spinorů α_A, β_B, …, λ_L se nazývá jeho *kanonickým rozkladem.* Spinory α_A, β_B, …, λ_L se nazývají *vlastní spinory* $\Phi_{AB\ldots L}$, odpovídající vektory nazýváme *vlastními vektory* a směry určené vlastními vektory nazýváme *vlastními směry.* Říkáme, že vlastní spinor má násobnost k, vyskytuje-li se k-krát v kanonickém rozkladu (13).

Ze vztahu (13) je patrné, že symetrický spinor s n indexy má $n+1$ stupňů volnosti. To souvisí s tím, že každý spinor v kanonickém rozkladu můžeme charakterizovat jedním komplexním číslem (např. ξ^0/ξ^1) s tím, že před celý kanonický rozklad vytkneme jednu konstantu.

Pro každý reálný antisymetrický tenzor $F_{\mu\nu}$ (a tedy i pro tenzor elektromagnetického pole) platí:

$$F_{\mu\nu} \longleftrightarrow \varepsilon_{\dot{W}\dot{X}}\,\Phi_{AB} + \varepsilon_{AB}\,\bar{\Phi}_{\dot{W}\dot{X}}, \qquad \text{kde} \qquad \Phi_{AB} = \Phi_{BA}.$$

Šest algebraicky nezávislých reálných složek $F_{\mu\nu}$ tedy odpovídá třem nezávislým komplexním složkám Φ_{AB} (Φ_{00}, $\Phi_{01} = \Phi_{10}$, Φ_{11}). Komponenty spinoru elektromagnetického pole Φ_{AB} lze pomocí vektorů $\vec{E}$ a $\vec{B}$ vyjádřit jako

$$\begin{aligned}\Phi_{00} &= \tfrac{1}{2}\,(C_1 - \mathrm{i}C_2),\\ \Phi_{01} &= -\tfrac{1}{2}\,C_3,\\ \Phi_{11} &= -\tfrac{1}{2}\,(C_1 + \mathrm{i}C_2),\end{aligned}$$

kde $\vec{C} = \vec{E} - \mathrm{i}\vec{B}$.

Užitím kanonického rozkladu (13) dostaneme

$$\Phi_{AB} = \alpha_{(A}\beta_{B)}.$$

Nyní nastávají dvě možnosti:

- α_A a β_A jsou úměrné — říkáme, že Φ_{AB} je *algebraicky speciální* nebo *typu N*;
- α_A a β_A nejsou úměrné — říkáme, že spinor Φ_{AB} je *algebraicky obecný* nebo *typu I.*

Užitím (3) lze dokázat následující tvrzení:

$$\text{Elektromagnetické pole je typu } N \iff \Phi_{AB}\Phi^{AB} = 0.$$

Tuto podmínku lze pomocí vektorového a tenzorového počtu zapsat jako

$$\tfrac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = |\vec{B}|^2 - |\vec{E}|^2 = 0, \qquad \tfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{*\mu\nu} = -\vec{E}\cdot\vec{B} = 0. \tag{14}$$

Tuto vlastnost splňuje např. pole rovinné elektromagnetické vlny. Obecně odpovídají elektromagnetická pole typu N polím zářivým. Nulový vektor jednoznačně určený dvojnásobným vlastním spinorem α_A je až na násobení konstantou roven vlnovému čtyřvektoru $\boldsymbol{k} = (\omega, \vec{k})$, kde $\vec{k}$ je směr šíření elektromagnetických vln a ω jejich frekvence.

Elektromagnetické pole obvykle bývá typu *I.* To je i případ elektricky nabitého tělesa. Začne-li toto těleso oscilovat, stane se zdrojem elektromagnetického záření, avšak jeho celkové elektromagnetické pole bude stále typu *I.* V dostatečné vzdálenosti od tělesa však převládá zářivá část elektromagnetického pole, která je typu *N.*

Podobným způsobem jako pole elektromagnetické lze algebraicky klasifikovat i pole gravitační (bez použití spinorového počtu je vytvoření této klasifikace značně zdlouhavé). V oblasti, kde nejsou přítomny zdroje gravitačního pole (tj. např. hmota ani elektromagnetické pole), je Riemannův tenzor popisující gravitační pole roven jednoduššímu Weylovu tenzoru $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$, kterému odpovídá úplně symetrický Weylův spinor Ψ_{ABCD}

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta} \longleftrightarrow \Psi_{ABCD}\,\varepsilon_{\dot{W}\dot{X}}\varepsilon_{\dot{Y}\dot{Z}} + \bar{\Psi}_{\dot{W}\dot{X}\dot{Y}\dot{Z}}\,\varepsilon_{AB}\varepsilon_{CD}.$$

Spinor Ψ_{ABCD} má pět nezávislých komplexních složek. Weylův tenzor má díky svým symetriím jen deset nezávislých reálných složek a lze jej tedy plně popsat spinorem Ψ_{ABCD}.

Podle (13) můžeme psát

$$\Psi_{ABCD} = \alpha_{(A}\beta_B\gamma_C\delta_{D)}$$

a gravitační pole se tedy dělí na 6 různých typů:

- *Typ I* nebo $\{1,1,1,1\}$: žádné dva vlastní směry se neshodují — toto je *algebraicky obecný* případ.
- *Typ II* nebo $\{2,1,1\}$: dva vlastní směry se shodují — tento a všechny následující případy nazýváme *algebraicky speciální.*
- *Typ D* nebo $\{2,2\}$: jsou zde dvě (různé) dvojice vlastních směrů.

- *Typ III* nebo $\{3,1\}$: shodují se tři vlastní směry.
- *Typ N* nebo $\{4\}$: všechny čtyři vlastní směry jsou shodné.
- *Typ O* nebo $\{0\}$: $\Psi_{ABCD} = 0$ — odpovídá plochému prostoru.

Toto rozdělení se nazývá *Petrovova klasifikace* a vhodně jej vystihuje *Penroseův diagram*:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{I} \arrow[d] \arrow[dr] & & \\
\mathrm{II} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & \mathrm{D} \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\mathrm{III} \arrow[r] & \mathrm{N} \arrow[r] & \mathrm{O}
\end{tikzcd}$$

Postupujeme-li na diagramu ve směru šipky, docházíme k algebraicky stále speciálnějším případům.

Gravitační pole typu N je stejně jako v elektromagnetickém případě zářivé, Riemannův tenzor splňuje podobné vztahy jako $F_{\mu\nu}$ v (14) a čtyřnásobný vlastní vektor Weylova spinoru, který popisuje směr šíření gravitačních vln, je také nulového charakteru.

Přestože jsou nelineární Einsteinovy rovnice popisující gravitační pole nepoměrně složitější než rovnice Maxwellovy, lze i pro gravitační pole dokázat, že v dostatečné vzdálenosti od zdrojů dominuje zářivé pole typu *N*, zatímco ostatní složky (typ *I*, *II*, *D* a *III*) klesají se vzdáleností od zdrojů mnohem rychleji.

Závěrem bych rád poděkoval A. Pravdové, M. Křížkovi, Š. Zajacovi a J. Chlebounovi, kteří svými cennými připomínkami přispěli ke zlepšení textu.

L i t e r a t u r a

[1] Carmeli, M., Malin, S.: *The theory of spinors.* World Scientific, Singapore 2000.
[2] Cartan, E.: *Les groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane.* Bull. Soc. Math. France *41* (1913), 53–96.
[3] Hladik, J.: *Spinors in Physics.* Springer-Verlag, New York 1999.
[4] Hurley, D. J., Vandyck, M. A.: *Geometry, Spinors & Applications.* Springer-Verlag, New York 2000.
[5] Infeld, L., van der Waerden, B. L.: *Die Wellengleichung des Elektrons in der allgemeinen Relativitätstheorie.* Sitz. Ber. Preuss. Akad. Wiss. Physik.-Math. Kl. *9* (1933), 380–401.
[6] Kowalski, O.: *Úvod do Riemannovy geometrie.* Univerzita Karlova, Praha 1995.
[7] Misner, C. W., Thorne, K. S., Wheeler, J. A.: *Gravitation.* V. H. Freeman Comp., San Francisco 1973.
[8] Penrose, R.: *A Spinor Approach to General Relativity.* Ann. Phys. (USA) *10* (1960), 171.
[9] Penrose, R., Rindler, W.: *Spinors and space-time 1: Two spinor calculus and relativistic fields, 2: Spinor & Twistor methods in space-time geometry.* Cambridge University Press, Cambridge 1984, 1986.

[10] Schutz, B. F.: *Geometrical methods of mathematical physics.* Cambridge University Press, Cambridge 1980.
[11] Stewart, J.: *Advanced General Relativity.* Cambridge University Press, Cambridge 1990.
[12] Votruba, V.: *Základy speciální teorie relativity.* Academia, Praha 1977.
[13] Wald, R. M.: *General Relativity.* The University of Chicago Press, Chicago 1984.
[14] Motl, L., Zahradník, M.: *Pěstujeme lineární algebru.* Univerzita Karlova, Praha 1995.

Korespondenční semináře

Petr Šimeček, Praha

Tento text by vám rád představil svět středoškolských korespondenčních seminářů z pohledu člověka, který je po mnoho let řešil a v současné době se podílí na organizaci jednoho z nich.

Pokusím se o co nejobecnější pohled, ač konkrétní příklady budu uvádět z Pražského korespondenčního semináře z matematiky (známého spíše pod zkratkou MKS nebo též PRASE).

1. Trocha historie

Kořeny českých korespondenčních seminářů musíme hledat u našich sousedů na Slovensku, kde byl v roce 1979 založen Bratislavský korespondenčný seminár z matematiky (BKMS). Sedm let poté vzniká Fyzikálny korespondenčný seminár (FKS) a o další dva roky později Korespondenčný seminár z programovania (KSP). Jejich české protějšky se objevují na Univerzitě Karlově v letech 1981–1987. Dodnes má Slovensko, co se počtu seminářů týče, nad Českou republikou jednoznačnou převahu.

2. Jak funguje seminář

Řešitelé dostávají zadání i opravené úlohy poštou. Příklady jsou voleny tak, aby si všichni přišli na své. Lze tedy narazit jak na příklady velice jednoduché, tak i na problémy, které se nikomu ze soutěžících nepodaří rozlousknout. K řešení úloh je dostatek času (obvykle několik týdnů), lze použít odbornou literaturu, vyhledávat obdobné úlohy a teorii, která s nimi souvisí. V korespondenčním semináři mohou tedy

Petr Šimeček (1979) je studentem 3. ročníku MFF UK v Praze, obor matematika (teorie pravděpodobnosti a náhodné procesy).