Petr Mandl; Lucie Mazurová

Matematické teorie pojišťování

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 45 (2000), No. 2, 148--160

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/141030`

[FS'85] FUCHS, L., SALCE, L.: *Modules over Valuation Domains.* M. Dekker, New York 1985.

[GS'00] GÖBEL, R., SHELAH, S.: *Cotorsion theories and splitters.* Preprint, Trans. Amer Math. Soc. (2000).

[HR'82] HAPPEL, D., RINGEL, C. M.: *Tilted algebras.* Trans. Amer. Math. Soc. *274* (1982), 399–443.

[P'00] PETERFALVI, T.: *Character Theory for the Odd Order Theorem.* London Math. Soc. Lecture Notes Vol. 272. Cambridge Univ. Press, Cambridge 2000.

[S'79] SALCE, L.: *Cotorsion theories for abelian groups.* Symposia Math. *XXIII* (1979), 11–32.

[T'96] TRLIFAJ, J.: *Whitehead test modules.* Trans. Amer. Math. Soc. *348* (1996), 1521–1554.

[W'31] VAN DER WAERDEN, B. L.: *Moderne Algebra.* Unter Benutzung von Vorlesungen von E. Artin und E. Noether. Springer, Berlin 1931.

[Wa'69] WARFIELD, R.: *Purity and algebraic compactness for modules.* Pacific J. Math. *28* (1969), 699–719.

[We'94] WEIBEL, C.: *An Introduction to Homological Algebra.* Cambridge Univ. Press, Cambridge 1994.

[X'95] XU, J.: *The existence of flat covers over noetherian rings of finite Krull dimension.* Proc. Amer. Math. Soc. *123* (1995), 27–32.

[X'96] XU, J.: *Flat Covers of Modules.* Lecture Notes in Mathematics No. 1634. Springer, New York 1996.

Matematické teorie pojišťování

Petr Mandl a Lucie Mazurová, Praha

V příspěvku je pojednáno o matematickém modelu neživotního pojišťování, který rozvíjíme na Matematicko-fyzikální fakultě UK ([1]–[4]). Na této činnosti se podílejí doktorandi a diplomanti ([5], [6]). Model je součástí výuky předmětů Věcné pojištění a Účetnictví II ([7], [8]) a je zahrnut do výzkumného záměru MSM 113200008. Byl použit ministerstvem financí při kontrole obchodních plánů pojišťoven žádajících o licenci na pojištění odpovědnosti z provozu motorových vozidel. Zavedení poměru kapitálové přiměřenosti je zde publikováno poprvé.

V odstavcích 1, 2 i dále poskytujeme ve zkratce čtenáři širší pohled na teorie pojišťování. Zásady, které uvádíme pro neživotní pojištění, lze uplatnit též na rizikovou složku pojištění životního.

Prof. RNDr. PETR MANDL, DrSc. (1933), a RNDr. LUCIE MAZUROVÁ, Ph. D. (1970), oddělení finanční a pojistné matematiky, katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky MFF UK, Praha.

1. Teorie přenesení rizika

Pojišťovny přejímají za úplatu krytí náhodného rizika, které je vymezeno pojistnou smlouvou. Z pohledu matematika je *pojistné riziko* náhodnou veličinou X, představující výši pojistného plnění. Úhradou za převzetí rizika je obvykle pevná částka P, *jistotný ekvivalent rizika.* Jelikož prozatím neuvažujeme další náklady, můžeme P nazývat pojistným.

K posouzení, jak vysoké má pojistné být, si představme osobu A postupující riziko X osobě B, za což B obdrží od A částku P. Kdybychom přenos rizika chápali jako spravedlivou hru, bylo by

$$P = \mathrm{E}X.$$

Takto zvolené P představuje *ryzí pojistné.* Jednou ze zásad racionálního chování je averze k riziku. Zde slovo riziko má obecný význam nejistoty výsledku. B bude proto k $\mathrm{E}X$ požadovat rizikovou přirážku, v nejjednodušším tvaru

$$P = (1 + \vartheta)\,\mathrm{E}X. \tag{1}$$

Odchylka od střední hodnoty je nejčastěji vyjadřována rozptylem nebo směrodatnou odchylkou

$$\operatorname{Var} X = \mathrm{E}(X - \mathrm{E}\,X)^2, \quad \sqrt{\operatorname{Var} X}.$$

Proto může být též

$$P = \mathrm{E}X + \beta\sqrt{\operatorname{Var} X} \tag{2}$$

nebo

$$P = \mathrm{E}X + \beta \operatorname{Var} X. \tag{3}$$

Elementární teorie výměny rizika nazývá (1) *principem střední hodnoty*, (2) principem *směrodatné odchylky* a (3) principem *rozptylu* pro stanovení pojistného.

Dalším krokem je zavedení do úvah *očekávaného užitku.* Tento postup navrhl již Daniel Bernoulli (1738) pro vysvětlení známého Petrohradského paradoxu, kdy $\mathrm{E}X = \infty$. Předpokládejme, že osoba B hodnotí svou finanční situaci funkcí $w(x)$, slovy vyjádřeno kapitál x má pro ni užitek $w(x)$. Její kapitál před převzetím rizika budiž u. Pokud očekávaný užitek B ze smlouvy s osobou A splňuje

$$\mathrm{E}\,w(u + P - X) \geqq w(u),$$

není smlouva pro B nevýhodná. Dospívá se tak k *principu nulového užitku* pro stanovení P, neboli k rovnici

$$\mathrm{E}\,w(u + P - X) = w(u). \tag{4}$$

Pro

$$w(x) = 1 - \exp(-bx), \quad b > 0, \tag{5}$$

vychází

$$P = \frac{1}{b} \ln \mathrm{E} \exp(bX). \tag{6}$$

(6) bývá někdy nazýváno *Esscherovým principem* stanovení pojistného.

Povšimněme si, že funkce (5) je konkávní. Tato vlastnost vyjadřuje *averzi k riziku.* Podle Jensenovy nerovnosti totiž pro konkávní $w(x)$ a náhodnou veličinu η platí

$$w(\mathrm{E}\,\eta) \geqq \mathrm{E}\,w(\eta).$$

Mírou averze k riziku osoby B, má-li kapitál x, je podíl $-w''(x)/w'(x)$, což je konstanta b v případě (5).

Pojišťovny postupují riziko nebo jeho část zajišťovnám, které si dále rizika vyměňují. Širší formulace *přenosu rizik* pochází od K. Borcha (1919–1986).

Mějme n osob (pojistníci, pojišťovny, zajišťovny)

$$C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n, \tag{7}$$

které si vyměňují rizika

$$X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n. \tag{8}$$

Buďtež

$$w_1(x),\ \ldots,\ w_n(x); \quad u_1,\ \ldots,\ u_n$$

jejich užitkové funkce a počáteční kapitály.

Osoby (7) uzavřou s cílem zvýšit očekávaný užitek smlouvu o záměně rizik. Smlouva spočívá v definici transformace

$$\big[y_1(x_1,\ldots,x_n),\ \ldots,\ y_n(x_1,\ldots,x_n)\big], \tag{9}$$

kde $y_j(x_1,\ldots,x_n)$ jsou škodní náklady osoby C_j při

$$X_1 = x_1, \quad \ldots, \quad X_n = x_n, \tag{10}$$

jinak řečeno, je to platba C_j do pojistného poolu. Musí platit

$$y_1(x_1,\ldots,x_n) + \cdots + y_n(x_1,\ldots,x_n) = x_1 + \cdots + x_n.$$

Očekávaný užitek C_j je

$$\mathrm{E}\,w_j\big(u_j - y_j(X_1,\ldots,X_n)\big).$$

Smlouva se považuje za *optimální v Paretově smyslu*, když žádné osobě nelze očekávaný užitek zvýšit bez snížení očekávaného užitku osoby jiné. Takové smlouvy charakterizuje následující tvrzení.

Borchova věta. *Smlouva* (9) *je Pareto optimální, právě když existují nezáporné konstanty* $k_1,\ldots,k_n$ *tak, že pro skoro všechny realizace* (10) *platí*

$$k_j w_j'\big(u_j - y_j(x_1,\ldots,x_n)\big) = k_1 w_1'\big(u_1 - y_1(x_1,\ldots,x_n)\big), \quad j = 1,\ldots,n.$$

Pro ilustraci uveďme tento důsledek Borchovy věty. Mají-li osoby (7) užitkové funkce tvaru (5), potom Pareto optimální záměny rizik mají vyjádření

$$y_j(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + \dots + x_n)q_j + y_j(0),$$

kde *kvóty* q_j jsou nepřímo úměrné parametrům rizikové averze účastníků poolu, zatímco platby $y_j(0)$ jsou předmětem vyjednávání.

V Borchově modelu se činí předpoklady, že všechny osoby používají stejné rozložení pravděpodobností rizik (8) a poctivě hlásí své užitkové funkce ([9]).

2. Teorie ruinování

Model, ve kterém se uvažuje posloupnost škod vznikajících v celém kolektivu rizik bez ohledu na individuální pojistné smlouvy, je znám pod názvem *kolektivní model teorie rizika.*

Již dlouhou dobu je ústřední tematikou teorií pojišťování přidělení prostředků pojistným odvětvím. Koncem minulého století vznikla *teorie stability* zaměřená na případ, kdy X je součtem kolektivu rizik. Pojistné se předpokládá stanovené podle principu (1). Stabilita je vyjádřena podílem

$$(u + \vartheta \, \mathrm{E}X)/\sqrt{\mathrm{Var}\, X}. \tag{11}$$

Z Čebyševovy nerovnosti nebo užitím aproximace normálním rozložením vyplývá, jak lze pomocí (11) omezit pravděpodobnost nedostatku prostředků na krytí škod

$$P(u + P - X < 0). \tag{12}$$

Základy *teorie ruinování* jsou spojeny se jmény F. Lundberga (1909) a H. Craméra (1930).

Ústřední charakteristikou, užívanou k posouzení rizikovosti uvažovaného pojistného odvětví, je *pravděpodobnost ruinování.* Je obdobou pravděpodobnosti (12), uvažujeme-li činnost pojišťovny v delším časovém horizontu. Pojem ruinování označuje situaci, kdy je pro pokrytí škod v daném odvětví třeba dodatečných kapitálových prostředků.

Jedna ze základních formulací modelu teorie ruinování vychází z představy, že pojišťování bude probíhat za stejných podmínek po nekonečně dlouhou dobu a že sledujeme výši prostředků pojišťovny vždy v diskrétních časových okamžicích (například na konci každého roku). Tuto výši na konci roku t, $t = 1, 2, \dots$, můžeme vyjádřit vztahem

$$U_t = u + Pt - (X_1 + \dots + X_t), \tag{13}$$

kde u je počáteční výše prostředků přidělených uvažovanému odvětví, P je pojistné za jeden rok, X_i představuje celkovou výši škodních nákladů v roce i.

Předpoklad neměnnosti podmínek pojišťování se odráží ve skutečnosti, že pojistné P se v čase nemění, a je vyjádřen rovněž předpokladem, že náhodné veličiny $X_1, X_2, \dots$

mají stejné rozložení. Dále předpokládáme, že škodní úhrny v jednotlivých letech jsou vzájemně nezávislé.

Při studiu pravděpodobnosti ruinování se obvykle vyznačuje její závislost na počátečním kapitálu u,

$$\psi(u) = P\bigl(U_t < 0 \text{ pro nějaké } t \in \{1, 2, \ldots\}\bigr). \tag{14}$$

Teorie ruinování se zabývá odvozením asymptotických vztahů a odhadů pravděpodobnosti ruinování v modelu (13) i v dalších modelech, například při sledování výše prostředků U_t ve spojitém čase či v omezení na konečný časový horizont. Jeden ze základních výsledků je vyjádřen *Lundbergovou nerovností*

$$\psi(u) < \mathrm{e}^{-Ru}, \tag{15}$$

kde R je kladné číslo, nazývané *adjustační koeficient.* Hodnota R se získá jako kladné řešení rovnice

$$\mathrm{e}^{-Pr} M_X(r) = 1, \tag{16}$$

kde

$$M_X(r) = \mathrm{E}\,\mathrm{e}^{rX}$$

je momentová vytvořující funkce rozložení náhodných veličin $X_1, X_2, \ldots$

Použití (15) je tedy možné pro takové rozložení škodních úhrnů, pro něž má (16) kladné řešení, a adjustační koeficient závisí na parametrech tohoto rozložení i na velikosti rizikové přirážky obsažené v pojistném. Z (15) vyplývá, že adjustační koeficient je mírou rizika, jeho název souvisí s použitím této hodnoty k posouzení správnosti a k úpravě (adjustaci) rizikové přirážky, případně k posouzení parametrů rozložení škodních úhrnů v závislosti na zvoleném typu a míře zajištění.

Kolektivní model rizika vychází z představy, že výše jednotlivých škod vznikajících v rizikově homogenním pojistném kmeni určitého pojistného odvětví lze považovat za vzájemně nezávislé a stejně rozložené náhodné veličiny. Proto se používá v rozborech podnikání v neživotním pojištění, kde jsou obvykle výše škod hrazených pojišťovnou náhodné.

Pro roční úhrn škod kolektivní model teorie rizika často používá předpokladu *složeného Poissonova rozložení*,

$$X = \sum_{j=1}^{N} \xi_j,$$

kde roční počet škod N má Poissonovo rozložení a výše jednotlivých škod $\xi_1, \xi_2, \ldots$ se považují za vzájemně nezávislé a stejně rozložené náhodné veličiny nezávislé na N. Uveďme řešení (16) v případě, kdy škody $\xi_1, \xi_2, \ldots$ mají exponenciální rozložení o hustotě $\alpha \mathrm{e}^{-\alpha x}$, $x \geqq 0$, $\alpha > 0$, a pojistné P je stanoveno podle (1):

$$R = \frac{\vartheta\alpha}{1 + \vartheta}\,.$$

V modelu s jiným než exponenciálním rozložením výší škod se obvykle používá přibližných vyjádření adjustačního koeficientu. Například užitím Taylorova rozvoje momentové vytvořující funkce $M_X(r)$ v okolí nuly se dostane

$$R \doteq \frac{2\vartheta \,\mathrm{E} X}{\operatorname{Var} X} .$$

Přiblížíme-li pravděpodobnost ruinování její horní mezí z (15), pak při požadované výši $\psi(u) = \varepsilon$ dostáváme

$$\frac{u}{\mathrm{E} X} \doteq \log\Bigl(\frac{1}{\varepsilon}\Bigr) \frac{1}{2\vartheta} \frac{\operatorname{Var} X}{(\mathrm{E} X)^2} . \tag{17}$$

(17) vyjadřuje potřebnou počáteční výši prostředků v násobcích ročního ryzího pojistného, poslední zlomek na pravé straně je druhou mocninou variačního koeficientu rozložení škodních úhrnů.

3. Modelování solventnosti

Klasická teorie ruinování, popsaná v předchozím odstavci, se omezuje na studium jednoho aspektu pojišťovací činnosti, kterým je pojistně technické riziko vyplývající z náhodného charakteru škod hrazených z pojištění. Pojišťovna je ve svém podnikání ovlivněna řadou dalších faktorů, které uvedený matematický model zanedbává. Mezi nejvýznamnější z nich patří výnosy dosahované investováním aktiv. Vedle nákladů na škody má pojišťovna správní náklady spojené se svým provozem, platí daně a dividendy akcionářům.

Významným prvkem v hospodaření pojišťovny je tvorba a použití *technických rezerv*, předepsaných zákonem. V řadě odvětví neživotního pojištění je obvyklé i víceleté zpoždění v hlášení a úhradě vzniklých škod. Pojišťovna je nucena vytvářet rezervu odpovídající odhadu plnění, která ještě budou vyplacena za škody vzniklé v minulých obdobích, kdy za jejich krytí obdržela pojistné. Tento typ technické rezervy budeme v dalším textu nazývat *škodní rezervou*. *Rezerva nezaslouženého pojistného* je na konci účetního období rovna části pojistného ze smluv uzavřených v minulosti, která má sloužit ke krytí rizika v budoucích účetních obdobích. Například roční pojistné zaplacené v polovině roku odpovídá krytí rizika i v roce následujícím.

Solventností pojišťovny se rozumí její schopnost dostát závazkům vyplývajícím z pojistných smluv. K pokrytí nákladů na škody (zahrnujících i tvorbu technických rezerv) a dalších nákladů má pojišťovna k dispozici vedle pojistného volné prostředky, které v této souvislosti nazýváme *rizikovou rezervou*. Jsou to prostředky, které nejsou vázány žádnými známými závazky, zejména mezi ně nepatří prostředky technických rezerv. Výše volných prostředků je pravidelně sledována státním dozorem nad pojišťovnami a její dostatečnost je posuzována podle metodiky zohledňující rizikovost a objem obchodu v jednotlivých pojistných odvětvích.

Důležitým směrem v oblasti modelování činnosti pojišťovny, umožněným rozvojem výpočetní techniky, jsou simulační modely. Významnější modely byly vytvořeny v 80. letech finskou skupinou expertů vedenou T. Pentikäinenem a britskou skupinou vedenou C. D. Daykinem. Simulační modely obsahují řadu předpokladů týkajících se zmíněných aspektů pojišťovací činnosti, z nichž některé mají povahu deterministických scénářů, jiné jsou stochastickými modely pro simulaci náhodných veličin, představujících výše škodních nákladů či výnosy z investic v simulovaných obdobích. Z provedené řady simulací se usuzuje na pravděpodobnost výskytu záporné hodnoty rizikové rezervy ve vytčeném časovém horizontu.

Nevýhodou simulačních modelů může být jejich nepřehlednost, způsobená velkým množstvím volených parametrů. Závislost na jednotlivých parametrech nemusí být z výsledku zřejmá. V dalším výkladu stručně popíšeme matematický model, v němž se snažíme těmto nedostatkům vyhnout. Modelujeme vývoj rizikové rezervy určitého odvětví neživotního pojištění.

Označme U_t výši rizikové rezervy na konci roku t a $U_0 = u$ její počáteční výši. Chceme stanovit nejmenší hodnotu u, pro niž bude riziková rezerva nezáporná v horizontu n let s dostatečně vysokou pravděpodobností.

Předpokládejme konstantní míru výnosu z investic i. Volba různě vysoké výnosové míry v různých letech není významnou komplikací, znamená pouze složitější zápis příslušných formulí. Model, který pracuje s mírou výnosu jako s náhodnou veličinou, bude pro jednoletý horizont vyložen v odstavci 4. Dále předpokládáme, že míra výnosu i je již očištěná od daní a dividend akcionářů. Lze psát

$$\begin{aligned} U_t = (1+i)U_{t-1} - (1+i)^{1-\gamma}X_t + (1+i)^{1-\beta}B_t - \\ - \big[T_t - (1+i)T_{t-1}\big] - \big[S_t - (1+i)S_{t-1}\big], \end{aligned} \tag{18}$$

kde X_t značí celkovou výši pojistných plnění vyplacených v roce t, B_t pojistné po odečtení nákladové složky (část pojistného předepsaného v roce t určená ke krytí škod), T_t a S_t výši škodní rezervy a rezervy nezaslouženého pojistného na konci roku t. Uvažujeme pouze tyto dvě nejvýznamnější technické rezervy v neživotním pojištění. V (18) předpokládáme, že správní náklady jsou pokryty plně nákladovou složkou pojistného. Dále užíváme parametr γ jako průměrný okamžik v roce, k němuž vztahujeme výplatu pojistných plnění, a β jako průměrný okamžik platby pojistného. Při rovnoměrném rozložení všech plateb během roku je $\gamma = \beta = \frac{1}{2}$.

Pro určení vstupních parametrů modelu (18) je třeba specifikovat další předpoklady týkající se pojistného a plateb za škody. V některých odvětvích je například reálný předpoklad, že pojistné je placeno na období nejvýše roční, nezasloužená část pojistného je tedy zcela spotřebována v následujícím účetním roce. Označíme část pojistného zaslouženou krytím rizika v roce t symbolem B_t^0 , nezaslouženou část B_t^1. Pak je

$$S_t = B_t^1. \tag{19}$$

Pro popis vývoje škod v čase budeme předpokládat, že maximální možné zpoždění ve výplatě škod je r let. Označme $Y_{t,j}$ platby v roce $t+j$ za škody z roku t (platby ve vývojovém roce j) a speciálně

$$Y_t = Y_{t,0}.$$

Při výpočtu výše škodních rezerv se často užívá předpokladu, že výplaty škod z jednotlivých let se dělí do vývojových roků v konstantních proporcích. Zahrneme-li do modelu náhodné odchylky od tohoto očekávaného vývoje, můžeme tuto představu vyjádřit vztahem

$$Y_{t,j} = d_j(Y_t + e_{t,j}) \quad j = 1, \ldots, r, \tag{20}$$

kde $d_1, \ldots, d_r$ jsou parametry škodního vývoje stanovené na základě zkušenosti s daným odvětvím. O náhodných veličinách $\{e_{t,j}\}$ předpokládáme, že jsou nezávislé navzájem a na všech $\{Y_t\}$.

Za uvedených předpokladů lze vyjádřit úhrn pojistných plnění vyplacených v roce t ve vztahu (18) součtem

$$X_t = Y_t + d_1\, Y_{t-1} + \cdots + d_r Y_{t-r} + Z_t, \tag{21}$$

kde

$$Z_t = d_1 e_{t-1,1} + \cdots + d_r e_{t-r,r}.$$

Škodní rezerva na konci roku t je rovna očekávané hodnotě budoucích plateb za škody vzniklé do konce roku t při známé výši plateb v minulosti. Vzhledem k (20) je

$$T_t = Y_t D_1 + Y_{t-1} D_2 + \cdots + Y_{t-r+1} D_r, \tag{22}$$

kde

$$D_k = d_k + \cdots + d_r, \quad k = 1, \ldots, r.$$

Dosazením (19), (21) a (22) do vztahu (18) dostáváme rekurentní vyjádření rizikové rezervy ve tvaru

$$U_t = (1+i)U_{t-1} + a_0 Y_t + a_1 Y_{t-1} + \cdots + a_r Y_{t-r} + b_t - (1+i)^{1-\gamma} Z_t, \tag{23}$$

kde koeficienty

$$a_0 = -\big((1+i)^{1-\gamma} + D_1\big), \quad a_k = iD_k - d_k\big((1+i)^{1-\gamma} - 1\big), \quad k = 1, \ldots, r,$$

jsou definovány na základě předpokládané výnosové míry, předpokládaného škodního vývoje a průměrného okamžiku plateb za škody a posloupnost

$$b_t = B_t(1+i)^{1-\beta} + \big[B^1_{t-1}(1+i) - B^1_t\big]$$

závisí vedle výnosové míry a průměrného okamžiku plateb pojistného na posloupnostech $\{B_t\}$, $\{B^0_t\}$ a $\{B^1_t\}$, které považujeme za deterministické scénáře. Modelování podle (23) začíná rokem 1, proto považujeme hodnoty Y_0, Y_{-1}, …, Y_{-r+1} za známé konstanty.

Model popsaný vztahem (23) můžeme použít k řešení úlohy nalezení minimální počáteční výše $U_0 = u$ splňující

$$P(U_t \geqq 0) \geqq 1 - \varepsilon, \quad t = 1, \ldots, n, \tag{24}$$

kde ε je zvolené dostatečně malé číslo. Při platnosti (24) je

$$P(U_t \geqq u_t) = 1 - \varepsilon, \quad t = 1, \dots, n, \tag{25}$$

kde $u_t \geqq 0$, $t = 1, \dots, n$.

K nalezení u_t splňujících (25) lze použít některého přiblížení rozložení náhodných veličin U_t, založeného na znalosti jejich momentů. Pro aproximaci rozložení s nezanedbatelnou šikmostí se často užívá *NP2-aproximace*, z níž plyne

$$u_t \simeq \mathrm{E}U_t - \left[z_{1-\varepsilon} - \gamma_t(z_{1-\varepsilon}^2 - 1)/6\right]\sqrt{\mathrm{Var}\, U_t}, \tag{26}$$

kde

$$\Phi(z_{1-\varepsilon}) = 1 - \varepsilon, \tag{27}$$

Φ je distribuční funkce rozložení $\mathrm{N}(0,1)$. γ_t značí koeficient šikmosti

$$\gamma_t = \mathrm{E}(U_t - \mathrm{E}U_t)^3/(\mathrm{Var}\, U_t)^{3/2}.$$

Z rekurentního vztahu (23) lze odvodit vyjádření

$$\begin{aligned} U_t = (1+i)^t U_0 + \sum_{k=0}^{t-1} (1+i)^k A_k Y_{t-k} + \sum_{j=0}^{r-1} (1+i)^{t+j} (A_{t+j} - A_j) Y_{-j} - \\ - (1+i)^{1-\gamma} \sum_{k=0}^{t-1} (1+i)^k Z_{t-k} + \sum_{k=0}^{t-1} (1+i)^k b_{t-k}, \end{aligned} \tag{28}$$

kde

$$A_k = a_0 + (1+i)^{-1} a_1 + \ldots + (1+i)^{-k} a_k, \quad a_{r+1} = \cdots = 0.$$

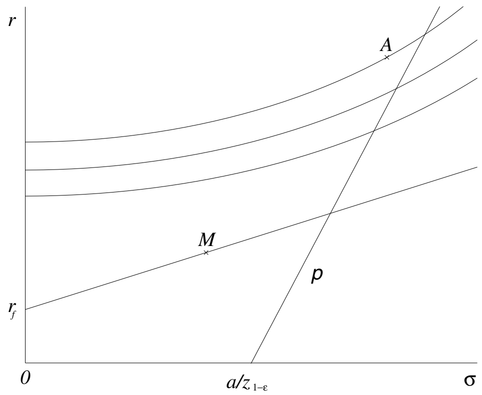
Pouze druhý a čtvrtý člen na pravé straně (28) jsou náhodné. Za předpokladu, že náhodné veličiny $\{Y_t\}$ jsou vzájemně nezávislé, lze z (28) snadno vyjádřit rozptyl $\mathrm{Var}\, U_t$ a třetí centrální moment $\mathrm{E}(U_t - \mathrm{E}U_t)^3$ s využitím aditivity těchto charakteristik pro nezávislé náhodné veličiny. K výpočtu momentů U_t je třeba specifikovat, pomocí parametrů odhadnutých z dat o škodách v minulosti, první tři momenty veličin $\{Y_t\}$ a $\{Z_t\}$. Z (28) je rovněž zřejmé, že hodnoty u_t získané z (26) závisí na počáteční výši rizikové rezervy pouze prostřednictvím $\mathrm{E}U_t$ a tato závislost je lineární s koeficientem $(1+i)^t$. Pro nalezení minimální počáteční výše rizikové rezervy potřebné k zajištění splnitelnosti závazků vyjádřené podmínkou (24) zřejmě stačí vypočítat podle (26) hodnoty $\bar{u}_t$ odpovídající libovolně zvolené počáteční výši rizikové rezervy $\bar{u}$. Hledanou minimální počáteční rizikovou rezervou je

$$u = \bar{u} - \min_t (1+i)^{-t} \bar{u}_t.$$

4. Teorie alokace kapitálu

Hodnocení investic bývá, zejména pod vlivem prací H. Markowitze (1959), redukováno na analýzu směrodatné odchylky a očekávané hodnoty kapitálového výnosu.

Podle Markowitzovy teorie parametry (σ, r) efektivní investice leží na *přímce kapitálového trhu*, vycházející z bodu $(0, r_f)$ příslušejícího bezrizikovým aktivům (například státní pokladniční poukázky) a procházející bodem M o souřadnicích (σ_m, r_m), který charakterizuje trh cenných papírů. K tomu viz obrázek 1. Parametry nad přímkou kapitálového trhu již nelze realizovat pouze finančními investicemi. Předpokládá se, že kladná i záporná množství bezrizikového aktiva lze bez omezení koupit.



Obr. 1.

Z tohoto hlediska se budeme zabývat rozhodováním, zda vlastník pojišťovny má užít volné prostředky jako rizikovou rezervu nového odvětví pojištění, nebo je investovat na kapitálovém trhu.

Pojišťovna posuzuje situaci, kdy kmen nového pojištění má již velikost odpovídající cílovým představám. Označme u přidělené volné prostředky, ΔU docílený výnos. Obdobně jako v předchozích odstavcích je požadavek splnitelnosti závazků definován nerovností

$$P(\Delta U \leqq -au) \leqq \varepsilon, \tag{29}$$

kde $a > 0$. Jsou-li splněny podmínky pro přiblížení normálním rozložením, můžeme psát

$$P(\Delta U \leqq -au) = P\big((\Delta U - \mathrm{E}\,\Delta U)/\sqrt{\mathrm{Var}\,\Delta U} \leqq -(au + \mathrm{E}\,\Delta U)/\sqrt{\mathrm{Var}\,\Delta U}\big) \simeq \\ \simeq 1 - \Phi\big((au + \mathrm{E}\,\Delta U)/\sqrt{\mathrm{Var}\,\Delta U}\big).$$

Aby platilo (29), musí výraz v poslední závorce být větší než $z_{1-\varepsilon}$ splňující (27), neboli

$$\frac{\mathrm{E}\,\Delta U}{u} \geqq z_{1-\varepsilon}\frac{\sqrt{\mathrm{Var}\,\Delta U}}{u} - a.$$

Klademe-li

$$\sigma = \frac{\sqrt{\mathrm{Var}\,\Delta U}}{u}, \quad r = \frac{\mathrm{E}\,\Delta U}{u}\,, \tag{30}$$

vidíme, že bod A o souřadnicích (30) nesmí ležet pod polopřímkou p, kterou jsme rovněž znázornili na obrázku 1. Lze ji nazývat *přímkou kapitálové přiměřenosti.* Pokud A je rovněž nad přímkou kapitálového trhu, jsou důvody o zavedení nového pojištění uvažovat.

Východiskem k rozlišení různých variant projektu může být užitková funkce, definující soustavu křivek indiference. Užitek z výnosu nechť je měřen kvadratickou funkcí

$$V(\Delta U/u) = b + c\Delta U/u - d(\Delta U/u)^2.$$

Očekávaný užitek je

$$\mathrm{E}V(\Delta U/u) = b + cr - d(r^2 + \sigma^2).$$

Křivky indiference

$$\mathrm{E}V(\Delta U/u) = \mathrm{const.}$$

jsou znázorněny na obrázku 1.

Ponechali jsme stranou otázku daní. Nerovnost $\Delta U \leqq -au$ v (29) znamená, že výsledkem je ztráta a není daňová povinnost. Předpokládáme-li konstantní daňovou sazbu, můžeme proto porovnávat výnosy před zdaněním.

Analýza parametrů (30) předpokládá zavedení investičního rizika do matematických modelů. V tomto směru doplníme model vyložený v odstavci 3. Způsob, jakým postupujeme, byl ovlivněn zejména pracemi R. Schniepera ([10], [11]).

Model oceňování kapitálových aktiv vyjadřuje výnosy z aktiv lineární regresí na výnosu z bezrizikového aktiva a tržního portfolia. Očekávaný výnos z cenného papíru je dán vztahem

$$r_i = r_f + \beta_i(r_m - r_f). \tag{31}$$

Regresní koeficient β_i je důležitou charakteristikou vazby aktiva na trh cenných papírů.

Současná metodika finanční kontroly jednotlivých společností v rámci pojišťovacího holdingu spočívá ve stanovení kapitálu potřebného na krytí rizik převzatých společností. Cena kapitálu se stanovuje podle složení investičního portfolia společnosti na základě formulí (31) jednotných pro určitý region. Výnos po zdanění překračující cenu kapitálu představuje *přidanou ekonomickou hodnotu*, podle které je výkonnost společnosti posuzována.

Poradenské firmy, z nichž nejznámější je Standard and Poor's ([12]), nabízejí software na určení potřebného kapitálu podle složení aktiv a podle pojišťovacích aktivit společnosti. Podstatu úlohy je však nutno ozřejmit na modelu, který ukazuje zásady alokace kapitálu.

Navážeme na výklad v odstavci 3. Budeme modelovat výnos dosažený za jedno období pojišťovnou provozující, pro jednoduchost výkladu, jeden druh pojištění, například živelní pojištění budov. Učiníme předpoklad, že výnos z investic je náhodná veličina I, a použijeme jednoduché úročení. Máme proto

$$a_0 = -\bigl(1 + D_1 + (1-\gamma)\,I\bigr), \quad a_k = ID_k - (1-\gamma)Id_k, \quad k = 1, \dots, r,$$
$$b_1 = B_0^1 + B_1^0 + I\bigl(B_0^1 + (1-\beta)B_1\bigr).$$

Volné prostředky sektoru buďtež U_0 a nechť jsou známy hodnoty

$$Y_0 = y_0, \quad \dots, \quad Y_{-r+1} = y_{-r+1}.$$

Z (23) pak po úpravách plynou vztahy

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\Delta U &= \mathrm{E}I(U_0 + A) + B_0^1 + B_1^0 - \mathrm{E}Y(1 + D_1) - \mathrm{E}Z, \qquad (32)\\ \Delta U &= \mathrm{E}\Delta U + [I - \mathrm{E}I](U_0 + A) - \\ &\quad - [Y - \mathrm{E}Y]\big(1 + D_1 + (1-\gamma)\,\mathrm{E}I\big) - (1-\gamma)[Y - \mathrm{E}Y][I - \mathrm{E}I] - \\ &\quad - [Z - \mathrm{E}Z]\big(1 + (1-\gamma)\,\mathrm{E}I\big) - (1-\gamma)[Z - \mathrm{E}Z][I - \mathrm{E}I], \qquad (33) \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} A = B_0^1 + (1-\beta)B_1 + y_0 D_1 + \dots + y_{1-r} D_r - \\ - (1-\gamma)(y_0 d_1 + \dots + y_{1-r} d_r + \mathrm{E}Y + \mathrm{E}Z). \end{aligned}$$

Při správném odhadu škodních rezerv je $\mathrm{E}Z = 0$. Můžeme pak podle (32) psát

$$\mathrm{E}\Delta U = E_1 + E_2,$$

kde E_1 je očekávaný výnos z investic a E_2 očekávaný technický výsledek. Náhodné veličiny I, Y, Z předpokládejme vzájemně nezávislé. Potom jsou členy pravé strany (33) nekorelované. Rozptyly částí napsaných na jednotlivých řádcích představují rozklad rizika

$$\operatorname{Var}\Delta U = R_1 + R_2 + R_3$$

na složky vyjadřující investiční riziko, technické riziko a riziko vývoje škodních rezerv.

Řekneme, že pojišťovna má kapitálovou přiměřenost 100 %, leží-li

$$\frac{\sqrt{\operatorname{Var}\Delta U}}{U_0}, \quad \frac{\mathrm{E}\Delta U}{U_0}$$

na výše definované přímce kapitálové přiměřenosti, neboli platí

$$\begin{aligned} U_0 &= (z_{1-\varepsilon}\sqrt{\operatorname{Var}\Delta U} - \mathrm{E}\Delta U)/a = \\ &= \sum_{i=1}^{3} (z_{1-\varepsilon} R_i / \sqrt{\operatorname{Var}\Delta U} - E_i)/a = C1 + C3 + C4. \end{aligned}$$

Zde jsme sčítance označili symboly užívanými pro příslušná rizika. Neuvažujeme úvěrové riziko $C2$ a rovněž ostatní obchodní rizika.

Poměr kapitálové přiměřenosti pojišťovny je definován vztahem

$$(U_0 - C1)/(C3 + C4). \qquad (34)$$

Při stanovení cílové hodnoty poměru (34) a volbě dvojice (a, ε) by se mělo vycházet z použití metodiky na dobré pojišťovny.

L i t e r a t u r a

[1] Mandl, P.: *Sledování solventnosti pojišťoven a matematické modelování.* Pojistné rozpravy *X* (1995), 52–67.

[2] Mandl, P., Šroller, V., Všetulová, E.: *K problematice přechodu od zákonného pojištění odpovědnosti za škodu způsobenou provozem motorového vozidla k pojištění povinně smluvnímu.* Pojistné rozpravy *XII* (1996), 19–27.

[3] Mandl, P.: *Classical risk theory methods in dynamic solvency testing.* Trans. 26th International Congress of Actuaries, Birmingham 1998, Vol. 4, 233–244.

[4] Mazurová, L.: *Risk reserve modelling with correlated aggregate claim amounts.* Trans. 26th International Congress of Actuaries, Birmingham 1998, Vol. 4, 245–254.

[5] Všetulová, E.: *Matematické modelování neživotních pojišťoven — aplikace na pojištění odpovědnosti provozovatelů motorových vozidel.* Disertační práce. MFF UK, Praha 1998.

[6] Šťástková, M.: *Zisk a riziko v neživotním pojištění.* Diplomová práce. MFF UK, Praha 2000.

[7] Mandl, P., Mazurová, L.: *Matematické základy neživotního pojištění.* Matfyzpress, Praha 1999.

[8] Mandl, P.: *Pojistně technická finanční analýza.* Matfyzpress, Praha 1999.

[9] Lemaire, J.: *Borch's theorem: A historical survey of applications.* Risk, Information and Insurance (Loubergé, H. ed.), 15–40. Kluwer, Dordrecht 1991.

[10] Schnieper, R.: *Capital allocation and solvency testing.* SCOR Notes, January 1997, 49–104.

[11] Schnieper, R.: *Solvency testing.* Mitteilungen Schweiz. Aktuarvereinigung 1999, 11–45.

[12] Balling, J., Levin, A. M.: *Standards & Poor's property/casualty capital adequacy model.* `www.insure.com` 1997.

Místa astronomické vzdělanosti 1918–1945

Hvězdárna v Brandýse nad Labem

Štěpán Ivan Kovář, Praha

Nad poklidnou řekou Labem, nedaleko od náměstí v Brandýse nad Labem, se nachází 350 let stará hospodářská usedlost rodiny Bečvářů. Na zahradě nevelkého hospodářství postavil v roce 1927 Antonín Bečvář malou observatoř, spojenou s meteorologickou stanicí, která díky jeho neteři paní Lídě Dvořákové ještě dodnes pracuje.

Štěpán Ivan Kovář (1976) je studentem Stavební fakulty ČVUT v Praze.