Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Jaroslav Lukeš; Ivan Netuka; Jiří Veselý

Choquetova teorie a Dirichletova úloha

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 45 (2000), No. 2, 98--124

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/141027`

Choquetova teorie a Dirichletova úloha

Jaroslav Lukeš, Ivan Netuka a Jiří Veselý, Praha

Pojem konvexní množiny prostupuje značnou část klasické i moderní matematiky a je také důležitý v aplikacích. Naším cílem je ilustrovat užitečnost tohoto pojmu v části matematiky, kde se stýká teorie potenciálu a funkcionální analýza.

Nejprve nabízíme v úvodní části čtenáři několik tvrzení, která na první pohled mají málo společného. Jejich podrobné zvládnutí není pro další čtení nutné. Užitečné je však postřehnout, že jde o projev obecného principu: podobně jako se látky skládají z molekul, molekuly z atomů, atomy z elementárních částic, přirozená čísla z prvočísel, i zde jde o vyjádření složitého pomocí jednoduchého. V pozadí vět, které uvádíme, je pak obecný matematický pohled, který vyložíme v částech 2 a 3. Části 4 a 5 jsou věnovány aplikacím.

1. Několik příkladů

1.1. Elementární geometrie

Připomeňme, že *konvexní kombinací* bodů $x_1, \dots, x_n$ ve vektorovém prostoru rozumíme lineární kombinaci $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$, kde všechny koeficienty λ_j jsou nezáporné a $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$.

Věta. *Nechť P je rovinný uzavřený konvexní mnohoúhelník. Potom je každý bod z P konvexní kombinací vrcholů mnohoúhelníku P.*

1.2. Konvexní funkce reálné proměnné

Borelovskou mírou na metrickém prostoru rozumíme (nezápornou) míru definovanou alespoň na σ-algebře borelovských množin a konečnou na kompaktních podmnožinách.

Prof. RNDr. Jaroslav Lukeš, DrSc. (1940), vedoucí katedry matematické analýzy MFF UK, e-mail: lukes@karlin.mff.cuni.cz; prof. RNDr. Ivan Netuka, DrSc. (1944), děkan MFF UK, e-mail: netuka@karlin.mff.cuni.cz; doc. RNDr. Jiří Veselý, CSc. (1940), zástupce ředitele Matematického ústavu při MFF UK, e-mail: jvesely@karlin.mff.cuni.cz; Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta, Sokolovská 83, 186 75 Praha 8 – Karlín.

Podporováno grantem GAUK 165/99 a výzkumným záměrem MSM 1132 00007.

Věta[1]**.** *Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) *funkce* $f\colon [0,1] \to [0,\infty)$ *je konvexní;*

(ii) *existují borelovské míry* μ *a* ν *na* $[0,1]$ *takové, že*

$$f(x) = \int_0^x (1-y)^{-1}(x-y)\,\mathrm{d}\mu(y) + \int_x^1 (1-x/y)\,\mathrm{d}\nu(y), \quad x \in [0,1].$$

Vidíme, že každá konvexní funkce je „kombinací“ dvou základních typů konvexních funkcí závislých na parametru y. Jsou to funkce

$$\varphi_y(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in [0,y], \\ \dfrac{x-y}{1-y} & \text{pro } x \in (y,1) \end{cases} \quad \text{a} \quad \psi_y(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x}{y} & \text{pro } x \in (0,y], \\ 0 & \text{pro } x \in (y,1]. \end{cases}$$

Funkce φ_y, ψ_y jsou velmi jednoduché konvexní funkce: jejich graf je sjednocením dvou úseček.

1.3. Dvojitě stochastické matice

Čtvercová matice $P = (p_{jk})_{j,k=1}^m$ se nazývá *dvojitě stochastická*, jestliže pro každé $j, k \in \{1, \dots, m\}$ platí

$$p_{jk} \geqq 0, \qquad \sum_{r=1}^m p_{rk} = 1 \qquad \text{a} \qquad \sum_{s=1}^m p_{js} = 1.$$

Označme Π množinu všech permutací množiny $\{1, \dots, m\}$, takže Π má $m!$ prvků. Připomínáme Kroneckerův symbol: δ_k^l je 1 pro $k = l$ a 0 pro $k \neq l$. Pro $\pi \in \Pi$ definujme

$$P_\pi = \left(\delta_k^{\pi(j)}\right)_{j,k=1}^m.$$

Pak má matice P_π v každém řádku a každém sloupci právě jednu jedničku a jinak nuly a vznikne permutací sloupců jednotkové matice. Je to tedy velmi speciální dvojitě stochastická matice.

Věta[2]**.** *Nechť* P *je dvojitě stochastická matice. Potom existují nezáporná čísla* t_π, $\pi \in \Pi$, *taková, že* $\sum_{\pi \in \Pi} t_\pi = 1$ *a*

$$P = \sum_{\pi \in \Pi} t_\pi P_\pi.$$

---

[1]) Důkaz tohoto tvrzení lze nalézt u R. M. Rakestrawa [Ra].

[2]) Odkažme na článek K. Jacobse [Ja].

1.4. Typicky reálné holomorfní funkce

Označme U otevřený jednotkový kruh v komplexní rovině $\mathbb{C}$. Připomeňme, že funkce $f\colon U \to \mathbb{C}$ je *holomorfní* v U, právě když je v U součtem mocninné řady o středu v počátku a poloměru konvergence větším nebo rovném jedné.

Holomorfní funkce $f\colon U \to \mathbb{C}$ se nazývá *typicky reálná*, jestliže $f(z)$ je reálné číslo, právě když $z \in U$ je reálné. Například je snadno vidět, že pro každé $t \in [-1,1]$ je funkce

$$z \longmapsto \frac{z}{1+2tz+z^2}\,, \quad z \in U, \tag{$*$}$$

typicky reálná holomorfní funkce.

Věta[3]**.** *Nechť f je typicky reálná holomorfní funkce v U. Potom existuje reálné číslo α a borelovská míra μ na $[-1,1]$ takové, že*

$$f(z) = \alpha + \int_{[-1,1]} \frac{z}{1+2tz+z^2}\,\mathrm{d}\mu(t), \quad z \in U.$$

V jistém smyslu lze tedy libovolnou typicky reálnou holomorfní funkci vyjádřit jako „kombinaci“ funkcí tvaru $(*)$.

1.5. Úplně monotónní funkce

Funkce $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ se nazývá *úplně monotónní*, jestliže má derivace všech řádů a pro každé $n = 0,1,2,\ldots$ platí $(-1)^n f^{(n)} \geqq 0$; samozřejmě $f^{(0)}$ znamená f. Pro každé $t \geqq 0$ jsou např. funkce $x \mapsto x^{-t}$ a $x \mapsto \mathrm{e}^{-tx}$, $x \in (0,\infty)$, úplně monotónní.

Bernsteinova věta[4]**.** *Nechť $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ je úplně monotónní funkce. Potom existuje právě jedna borelovská míra μ na $[0,\infty]$ taková, že*

$$f(x) = \int_{[0,\infty]} \mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}\mu(t), \quad x \in (0,\infty).$$

1.6. Řešení Helmholtzovy rovnice

Nechť

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_m^2}$$

je *Laplaceův operátor* v $\mathbb{R}^m$ a $\alpha > 0$. Funkci u třídy C^2 na $\mathbb{R}^m$ nazveme *řešením Helmholtzovy rovnice*, jestliže na $\mathbb{R}^m$ platí

$$\Delta u - \alpha^2 u = 0.$$

---

[3]) Viz G. A. Edgar [Ed] a M. S. Robertson [Rob].

[4]) Důkaz této klasické věty pocházející od S. Bernsteina [Be] je možno nalézt u R. R. Phelpse [Ph].

Není těžké uhodnout speciální řešení této rovnice. Označme $S = \{y \in \mathbb{R}^m : |y| = 1\}$ a $\langle x, y\rangle$ skalární součin vektorů $x, y \in \mathbb{R}^m$. Je-li $y \in S$ a $u(x) = \mathrm{e}^{\alpha\langle x,y\rangle}$, $x \in \mathbb{R}^m$, pak u je zřejmě nezáporné řešení Helmholtzovy rovnice.

Věta[5]**.** *Nechť u je nezáporné řešení Helmholtzovy rovnice. Potom existuje borelovská míra μ na S taková, že*

$$u(x) = \int_S \mathrm{e}^{\alpha\langle x,y\rangle}\,\mathrm{d}\mu(y), \quad x \in \mathbb{R}^m.$$

1.7. Fourierova transformace měr

V matematické analýze a teorii pravděpodobnosti se pro konečnou borelovskou míru μ na $\mathbb{R}^m$ definuje

$$\widehat{\mu}(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle x,y\rangle}\,\mathrm{d}\mu(y), \quad x \in \mathbb{R}^m.$$

Funkce $\widehat{\mu}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ je zřejmě spojitá a nazývá se *Fourierův obraz* nebo *charakteristická funkce míry μ*. Přímým výpočtem se snadno ověří, že funkce $f = \widehat{\mu}$ je *pozitivně semidefinitní*, to znamená, že platí

$$\sum_{j,k=1}^{n} \lambda_j \overline{\lambda}_k f(x_j - x_k) \geqq 0,$$

kdykoli $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ jsou komplexní čísla a $x_1, \dots, x_n$ jsou body z $\mathbb{R}^m$.

Bochnerova věta[6]**.** *Nechť $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}$ je spojitá pozitivně semidefinitní funkce. Potom existuje právě jedna konečná borelovská míra μ na $\mathbb{R}^m$ taková, že $f = \widehat{\mu}$.*

1.8. Harmonické funkce na kouli

Nechť $m \geqq 2$, $U = \{x \in \mathbb{R}^m : |x| < 1\}$ a $S = \{z \in \mathbb{R}^m : |z| = 1\}$. Pro každé $z \in S$ je funkce

$$P_z\colon x \longmapsto \frac{1 - |x|^2}{|x - z|^m}, \quad x \in U,$$

(nazývaná *Poissonovo jádro* s pólem v bodě z) harmonická na U, tj. platí $\Delta P_z = 0$. Derivování za integračním znamením ukazuje, že funkce

$$h(x) = \int_S P_z(x)\,\mathrm{d}\mu(z), \quad x \in U, \tag{$*$}$$

je nezáporná harmonická na U, kdykoli μ je borelovská míra na S.

[5]) Různé důkazy lze nalézt např. v [CaLi] či [Ko].

[6]) Důkaz této věty je hezkou aplikací Choquetovy teorie a lze jej nalézt přímo u G. Choqueta [Cho1].

Rieszova-Herglotzova věta[7]**).** *Nechť $h\colon U \to \mathbb{R}$ je nezáporná harmonická funkce. Potom existuje právě jedna borelovská míra μ na S taková, že platí $(*)$.*

Případ $m = 2$ souvisí s holomorfními funkcemi na U. Je-li totiž h harmonická funkce na $U \subset \mathbb{R}^2$, potom existuje harmonická funkce k na U taková, že $f = h + \mathrm{i}k$ je holomorfní funkce na U. Z Cauchyových-Riemannových podmínek vyplývá, že reálná a imaginární část holomorfní funkce na U jsou harmonické funkce na U.

Věta[8]**).** *Nechť $f\colon U \to \mathbb{C}$ je holomorfní funkce a nechť reálná část f je nezáporná funkce na U. Potom existují právě jedna borelovská míra μ na jednotkové kružnici T a právě jedno reálné číslo c takové, že*

$$f(x) = \mathrm{i}c + \int_T \frac{z+w}{z-w}\,\mathrm{d}\mu(z), \qquad w \in U.$$

1.9. Invariantní a ergodické míry

Nechť K je metrizovatelný kompaktní prostor, $\mathcal{B}$ je σ-algebra všech borelovských podmnožin K a $\mathcal{T}$ je neprázdný systém spojitých zobrazení K do K.

Říkáme, že borelovská míra μ na K je *$\mathcal{T}$-invariantní*, jestliže μ je *pravděpodobnostní*, tedy $\mu(K) = 1$, a $\mu(T^{-1}(B)) = \mu(B)$ pro každou množinu $B \in \mathcal{B}$ a každé $T \in \mathcal{T}$.

Nechť ν je borelovská míra na K. Množina $B \in \mathcal{B}$ se nazývá *ν-invariantní* (vzhledem k $\mathcal{T}$), jestliže symetrická diference množin B a $T^{-1}(B)$ je ν-nulová množina pro každé $T \in \mathcal{T}$. Říkáme, že $\mathcal{T}$-invariantní míra μ je *ergodická*, jestliže $\mu(B) = 0$ nebo $\mu(B) = 1$ pro každou μ-invariantní množinu B.

Dá se dokázat, že množina X všech $\mathcal{T}$-invariantních měr na K je uzavřená podmnožina kompaktního prostoru pravděpodobnostních měr na K opatřeného obvyklou topologií (tedy X je kompaktní prostor) a množina E všech ergodických měr je G_δ-podmnožina[9]) (obecně ne uzavřená!) prostoru X. Následující věta ukazuje, že každá $\mathcal{T}$-invariantní míra je v jistém smyslu „vystavěna“ z ergodických měr.

Věta[10]**).** *Nechť X je množina všech $\mathcal{T}$-invariantních měr na metrizovatelném kompaktu K a $E \subset X$ je množina všech ergodických měr. Potom ke každé míře $\mu \in X$ existuje právě jedna pravděpodobnostní borelovská míra m na X taková, že $m(X \setminus E) = 0$ a $\mu = \int_E \nu\,\mathrm{d}m(\nu)$, tj. $\int_K f\,\mathrm{d}\mu = \int_E \big(\int_K f\,\mathrm{d}\nu\big)\,\mathrm{d}m(\nu)$ pro každou spojitou funkci f na K.*

---

[7]) Důkaz je uveden v L. L. Helmsovi [He]; jiný, využívající přímo Choquetovu teorii, je v článku D. A. Armitage [Ar].

[8]) Lze se podívat třeba na články G. A. Edgara [Ed] anebo F. Hollanda [Ho].

[9]) Pro úplnost dodejme, že nějaká množina v metrickém nebo topologickém prostoru je *typu G_δ*, je-li průnikem spočetného systému otevřených množin.

[10]) Opět R. R. Phelps [Ph] může posloužit pro důkaz této věty pomocí Choquetovy teorie.

2. Geometrie konvexních množin

2.1. Krejnova-Milmanova věta

Připomeňme, že *konvexní množiny* v obecném kontextu vektorových prostorů jsou ty, které s každými dvěma body obsahují i úsečku, která je spojuje. *Extremálním bodem* konvexní množiny C je pak takový její prvek, který není středem žádné úsečky s různými krajními body ležícími v C. Množinu všech extremálních bodů množiny C budeme značit $\operatorname{ext} C$.

Zaměřme se nyní na geometrii konvexních množin v eukleidovském m-rozměrném prostoru $\mathbb{R}^m$. V rovině $\mathbb{R}^2$ jsou kupříkladu extremálními body uzavřeného konvexního mnohoúhelníku právě jeho vrcholy. Množina extremálních bodů kompaktní konvexní podmnožiny $\mathbb{R}^2$ je vždy uzavřená[11]). Jednoduchý příklad[12]) v $\mathbb{R}^3$ ukazuje, že v prostorech vyšší dimenze tomu tak nemusí být.

Výsadní postavení množiny extremálních bodů vyjadřuje Minkowského věta[13]): *V prostoru $\mathbb{R}^m$ je každý bod kompaktní konvexní množiny konvexní kombinací extremálních bodů.* Ve skutečnosti vystačíme s nejvýše $m+1$ extremálními body.

S extremálními body různých konvexních množin jsme se již vlastně setkali na začátku článku. Například matice P_π v odst. 1.3 jsou právě všechny extremální body konvexní množiny všech dvojitě stochastických matic[14]). Tuto množinu lze považovat za podmnožinu prostoru $\mathbb{R}^{m\times m}$ a věta o reprezentaci dvojitě stochastických matic z odst. 1.3 je tak důsledkem Minkowského věty. Uvažujeme-li např. konvexní množinu K všech úplně monotónních funkcí f na $(0,\infty)$, pro něž $f(0+) \leqq 1$ (viz odst. 1.5), a definujeme-li pro $t \in [0,\infty]$ funkci f_t: $x \mapsto \mathrm{e}^{-tx}$, $x \in (0,\infty)$, potom $\operatorname{ext} K = \{f_t\colon t \in [0,\infty]\}$.[15]) Jsou také známy extremální body konvexní množiny všech spojitých pozitivně semidefinitních funkcí, jejichž absolutní hodnota je nejvýše rovna jedné. Jsou to právě funkce tvaru $y \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\langle x,y\rangle}$, $x \in \mathbb{R}^m$.[16]) Uveďme ještě jeden příklad: ergodické míry z odst. 1.9 jsou právě všechny extremální body konvexní množiny všech $\mathcal{T}$-invariantních měr.

Nyní již je jasný společný rys výsledků z odst. 1.1–1.9: jsou to věty o integrální reprezentaci pomocí extremálních bodů. Tento typ vět je předmětem dalšího výkladu.

Označme pro libovolnou množinu A symbolem $\operatorname{co} A$ nejmenší konvexní množinu obsahující A; ta vždy existuje a je rovna průniku všech konvexních množin, které

[11]) Toto tvrzení lze nalézt u G. B. Priceho [Pr].

[12]) Příklad je uveden např. v [Cho], 2. díl, s. 106.

[13]) H. Minkowski dokázal větu patrně v období 1901–1903. Výsledek byl poprvé publikován v kapitole o konvexních tělesech zařazené v sebraných spisech vydaných v r. 1911. Důkaz lze nalézt v [Ja].

[14]) Pěkný důkaz, využívající tzv. Heiratssatz, lze nalézt opět v [Ja]. Tamtéž lze nalézt i podrobnější vysvětlení ztotožnění prostoru matic s m^2-rozměrným eukleidovským prostorem.

[15]) Důkaz není úplně snadný, viz [Ph], [Cho].

[16]) Pokud se čtenář zajímá o detaily, lze doporučit druhý díl monografie [Cho], kde se v odst. 33 tyto otázky vyšetřují dokonce v mnohem obecnějším kontextu lokálně kompaktních komutativních grup.

obsahují A. Je-li $C \subset \mathbb{R}^m$ kompaktní konvexní množina, lze Minkowského větu formulovat tak, že $C = \operatorname{co} \operatorname{ext} C$. Otázkou je, zda analogická věta platí i v prostorech nekonečné dimenze. V dalším textu se zaměříme na řešení tohoto problému. Nejdříve si však ujasněme, v jakých prostorech se budeme pohybovat. Pro čtenáře seznámeného s hlubšími partiemi funkcionální analýzy bude dále X znamenat lokálně konvexní prostor (samozřejmě Hausdorffův). Pod X si lze třeba představit libovolný Banachův prostor či třeba Banachův prostor opatřený slabou topologií. Na příkladech lze ukázat, že v těchto prostorech již rovnost $C = \operatorname{co} \operatorname{ext} C$ pro kompaktní konvexní podmnožinu C obecně neplatí. Nicméně označíme-li symbolem $\overline{\operatorname{co}}\, A$ *uzavřený konvexní obal* množiny A, což je nejmenší uzavřená konvexní množina obsahující A, lze vyslovit následující významnou větu.

Krejnova-Milmanova věta[17]**.** *Je-li C kompaktní konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru X, potom $C = \overline{\operatorname{co}} \operatorname{ext} C$.*

Myšlenka důkazu. Především je nutné ukázat, že neprázdná množina C obsahuje alespoň jeden extremální bod. Ten získáme tak, že uvažujeme systém všech extremálních množin v C. Přitom *extremální množinou* v C rozumíme každou její neprázdnou uzavřenou podmnožinu F s následující vlastností: Pokud $x, y \in C$, $\lambda \in (0,1)$ a $\lambda x + (1-\lambda) y \in F$, potom otevřená úsečka s krajními body x, y leží celá v F. Z Zornova lemmatu se poměrně jednoduše ukáže, že v C existuje minimální extremální množina, tj. množina, která již neobsahuje žádnou vlastní extremální podmnožinu. Pomocí Hahnovy-Banachovy věty pak odvodíme, že taková minimální extremální množina musí být jednobodová. A jednobodové extremální množiny jsou právě extremální body.

Máme-li tedy již dokázáno, že $\operatorname{ext} C \neq \emptyset$, lze dále postupovat sporem. Je totiž jasné, že $\overline{\operatorname{co}} \operatorname{ext} C \subset C$, a pokud by zde nenastala rovnost, využili bychom geometrickou verzi Hahnovy-Banachovy věty o oddělování a dostali bychom spor. ■

2.2. Integrální reprezentace

Pokusíme se nyní ukázat, jak z Krejnovy-Milmanovy věty lze odvodit obecnou větu o integrální reprezentaci. Důležitou roli bude hrát prostor $\mathcal{A}(K)$ všech spojitých afinních funkcí na K. Přitom reálná funkce f na konvexní množině K je *afinní*, jestliže $f(\lambda x + (1-\lambda) y) = \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$ pro každou trojici $x, y \in K$ a $\lambda \in [0,1]$. Problém je následující: Je dán bod x v kompaktní konvexní podmnožině K lokálně konvexního prostoru X; snažíme se najít borelovskou míru μ, která by jej reprezentovala ve smyslu, že rovnost $f(x) = \int_K f \, \mathrm{d}\mu$ by měla platit pro každou spojitou afinní funkci na K. Takových měr je obecně více, Diracova míra ε_x soustředěná v bodě x je určitě jednou z nich. Nám půjde o to, aby hledaná míra μ byla soustředěna na co nejmenší části hranice množiny K.

Udělejme zde malou odbočku. Je-li μ borelovská míra na kompaktu K, řekneme, že μ je *soustředěna* na borelovské množině $S \subset K$, jestliže $\mu(K \setminus S) = 0$. Poznamenejme,

[17]) První verzi věty v méně obecném kontextu dokázali M. Krejn a D. Milman v r. 1940.

že míra může být soustředěna na více různých množinách. Připomeňme ještě, že nosič $\operatorname{supt}\mu$ míry μ je definován jako nejmenší uzavřená množina, na které je μ soustředěna.

Vraťme se opět k našemu problému. Hledáme tedy míru μ tak, aby platila výše uvedená reprezentace a přitom μ

(a) měla nosič v uzávěru množiny extremálních bodů $\overline{\operatorname{ext} K}$, či dokonce aby

(b) byla soustředěna na množině extremálních bodů $\operatorname{ext} K$.

Samozřejmě nás také bude zajímat otázka jednoznačnosti reprezentujících měr, která povede k pojmu simplexu.

Dále se omezíme pouze na případ, kdy kompaktní konvexní množina K je metrizovatelná. Prostor všech borelovských pravděpodobnostních měr na K označíme symbolem $\mathcal{M}^1(K)$. Protože kompaktní množina K je metrizovatelná, je prostor $\mathcal{C}(K)$ všech reálných spojitých funkcí na K separabilní. Tudíž $\mathcal{M}^1(K)$ je metrizovatelná množina měr, a to takovou metrikou ϱ, že posloupnost měr μ_n v ní konverguje k míře μ, což symbolicky budeme zapisovat $\mu_n \to \mu$, právě když $\int_K f \,\mathrm{d}\mu_n \to \int_K f \,\mathrm{d}\mu$ pro každou funkci $f \in \mathcal{C}(K)$. Míru $\mu \in \mathcal{M}^1(K)$ nazýváme *diskrétní*, jestliže μ je konvexní kombinací Diracových měr. Je známo[18]), že ke každé míře $\mu \in \mathcal{M}^1(K)$ existuje posloupnost pravděpodobnostních diskrétních měr $\{\mu_n\}$ tak, že $\mu_n \to \mu$.

A nyní zpět k naší úloze. Bod $x \in X$ nazveme *těžištěm* míry $\mu \in \mathcal{M}^1(K)$, jestliže

$$f(x) = \int_K f \,\mathrm{d}\mu, \quad f \in \mathcal{A}(K).$$

Protože v lokálně konvexních prostorech prvky duálu X^* *oddělují body*, tj. ke každé dvojici x, y různých bodů z X lze nalézt $f \in X^*$ tak, že $f(x) \neq f(y)$, a protože restrikce funkcionálů z X^* na množinu K jsou afinní spojité funkce, nemůže mít míra μ dvě různá těžiště. Těžiště míry μ budeme označovat symbolem $r(\mu)$. Je-li $x = r(\mu)$, říkáme též, že *míra μ reprezentuje* bod x, což jinými slovy znamená, že platí věta o integrální reprezentaci. Je jasné, že Diracova míra ε_x vždy reprezentuje bod x. Naskýtají se nám následující otázky:

(a) Má každá míra nějaké těžiště?

(b) Je každý bod z množiny K těžištěm nějaké míry, která má nosič v množině $\overline{\operatorname{ext} X}$?

Na první otázku je odpověď celkem snadná, na druhou již komplikovanější. Začněme s následujícím tvrzením.

Věta. *Nechť $K \neq \emptyset$ je kompaktní konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru X. Potom každá míra z $\mathcal{M}^1(K)$ má právě jedno těžiště $r(\mu)$ ležící v K.*

Důkaz. Otázku jednoznačnosti jsme již vyřešili, jde tedy o existenci těžiště. Je-li míra μ diskrétní, $\mu = \sum_i \lambda_i \varepsilon_{x_i}$, kde $x_i \in K$, $\lambda_i \geqq 0$, $\sum_i \lambda_i = 1$, je zřejmě $r(\mu) = \sum_i \lambda_i x_i \in K$ těžištěm μ. Nechť tedy $\mu \in \mathcal{M}^1(K)$ je obecná pravděpodobnostní míra na K. Jak jsme již zmínili, existuje taková posloupnost diskrétních měr $\mu_n \in \mathcal{M}^1(K)$, že $\mu_n \to \mu$.

[18]) Tvrzení plyne mj. z Krejnovy-Milmanovy věty, neboť $\operatorname{ext} \mathcal{M}^1(K)$ splývá s množinou Diracových měr soustředěných v bodech z K.

Protože však $\{r(\mu_n)\}$ je posloupnost obsažená v kompaktu K, existuje vybraná posloupnost $\{r(\mu_{n_k})\}$, konvergující k nějakému prvku $z \in K$. Je-li nyní $f \in \mathcal{A}(K)$, je

$$f(z) = \lim_{k\to\infty} f(r(\mu_{n_k})) = \lim_{k\to\infty} \int_K f \,\mathrm{d}\mu_{n_k} = \int_K f \,\mathrm{d}\mu,$$

čili z je těžištěm míry μ. ■

Nyní můžeme zformulovat základní větu o integrální reprezentaci.

Věta o integrální reprezentaci. *Buď K kompaktní konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru X a $x \in K$. Potom existuje míra $\mu \in \mathcal{M}^1(K)$ tak, že $r(\mu) = x$ a* $\operatorname{supt}\mu \subset \overline{\operatorname{ext} K}$.

Důkaz. Z Krejnovy-Milmanovy věty plyne následující postřeh: Je-li $f \in \mathcal{A}(K)$ spojitá afinní funkce a $f = 0$ na $\overline{\operatorname{ext} K}$, potom $f = 0$ na K. Označme $\mathcal{B}$ prostor restrikcí funkcí z $\mathcal{A}(K)$ na $\overline{\operatorname{ext} K}$. Potom pro každé $h \in \mathcal{B}$ existuje podle předcházejícího postřehu právě jedna funkce $\widehat{h} \in \mathcal{A}(K)$, která s h splývá na $\overline{\operatorname{ext} K}$. Volme $x \in K$ a položme

$$\varphi\colon h \longmapsto \widehat{h}(x), \quad h \in \mathcal{B}.$$

Zřejmě $\varphi \in \mathcal{B}^*$ a $\|\varphi\|_{\mathcal{B}} = 1$. Funkcionál φ lze rozšířit pomocí Hahnovy-Banachovy věty z $\mathcal{B}$ na funkcionál $\Phi \in (\mathcal{C}(\overline{\operatorname{ext} K}))^*$ se zachováním normy. Protože navíc $\Phi(1) = \varphi(1) = 1$, je Φ nezáporný funkcionál. Je-li totiž $f \in \mathcal{C}(\overline{\operatorname{ext} K})$, $f \geqq 0$, $a = \frac{1}{2}\sup f(\overline{\operatorname{ext} K})$, potom $\|a - f\| \leqq a$, tudíž

$$a - \Phi(f) = \Phi(a) - \Phi(f) = \Phi(a - f) \leqq \|a - f\| \leqq a.$$

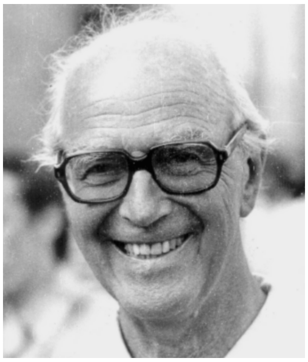
Odtud dostáváme $\Phi(f) \geqq 0$. Podle Rieszovy věty o reprezentaci existuje pravděpodobnostní míra μ na $\overline{\operatorname{ext} K}$ tak, že $\Phi(f) = \int_K f \,\mathrm{d}\mu$ pro každou funkci $f \in \mathcal{C}(\overline{\operatorname{ext} K})$. Míru μ můžeme chápat jako míru na K soustředěnou na množině $\overline{\operatorname{ext} K}$, prostě míra $\mu(B)$ borelovské množiny $B \subset K$ je rovna $\mu(B \cap \overline{\operatorname{ext} K})$. Protože zřejmě platí rovnosti $\int_K h \,\mathrm{d}\mu = \Phi(h) = \varphi(h) = h(x)$ pro každé $h \in \mathcal{A}(K)$, vidíme, že těžištěm míry μ je právě bod x. ■

Poznamenejme ještě, že věta o integrální reprezentaci je pouze přeformulovaná Krejnova-Milmanova věta. Je-li již dokázána věta o integrální reprezentaci, odvodí se z ní snadno Krejnova-Milmanova věta.

Krejnova-Milmanova věta je jednou ze základních vět funkcionální analýzy a má bohaté aplikace. Připomeňme si třeba její použití při de Brangesově důkazu Stoneovy-Weierstrassovy věty, Lindenstraussově důkazu Ljapunovovy věty o oboru hodnot vektorové míry či při důkazu Banachovy-Stoneovy věty o izometricky izomorfních prostorech spojitých funkcí apod.

V konkrétních aplikacích se, pokud jsme úspěšní, podaří charakterizovat množinu $\operatorname{ext} K$, ovšem povaha prvků množiny $\overline{\operatorname{ext} K} \setminus \operatorname{ext} K$ je obecně pramálo průhledná. Informace o nosiči míry z věty o integrální reprezentaci je tudíž problematická, pokud množina $\operatorname{ext} K$ není uzavřená. Je zde pak ještě jiná potíž. Představme si, že množina extremálních bodů nějaké kompaktní konvexní množiny K je v této množině hustá, tedy že $\overline{\operatorname{ext} K} = K$. Potom samozřejmě Krejnova-Milmanova věta nic neříká, a rovněž nic neříkající je věta o integrální reprezentaci. Stačí totiž za míru reprezentující bod x

vzít přímo Diracovu míru ε_x v bodě x. Tato situace může skutečně nastat. Jako příklad nám může posloužit uzavřená jednotková koule B v libovolném nekonečně dimenzionálním Hilbertově prostoru, který ovšem uvažujeme se slabou topologií. Extremální body B pak tvoří jednotková sféra a její (slabý) uzávěr je roven celé kouli B. Jiným netriviálním příkladem je *Poulsenův simplex*[19]) v Hilbertově prostoru l^2. Je však známo mnohem více. Uvažujeme-li totiž na množině $\mathcal{F}$ všech neprázdných kompaktních konvexních podmnožin daného Banachova prostoru X nekonečné dimenze tak zvanou Hausdorffovu metriku, je v ní prostor $\mathcal{F}$ úplný a množina $\{C \in \mathcal{F} : \overline{\operatorname{ext} C} \neq C\}$ je pouze 1. kategorie v $\mathcal{F}$[20]). Pro v jistém smyslu většinu kompaktních konvexních množin tedy platí $\overline{\operatorname{ext} C} = C$.



G. Choquet

Otázka, zda ve větě o integrální reprezentaci lze nalézt míru μ, která je soustředěna pouze na množině extremálních bodů, je tudíž zásadní. Problém byl úspěšně vyřešen G. Choquetem v padesátých letech a tím byl položen základ k jedné z nejhezčích teorií poslední doby, *Choquetově teorii.* Budeme se jí věnovat, a to v obecnějším hávu prostorů funkcí, v následující kapitole. Choquetova teorie poskytla mnoho podnětů pro abstraktní analýzu, nekonečně rozměrnou geometrii, deskriptivní teorii množin, teorii potenciálu a další části matematiky. Je dodnes živá a nachází stále nové aplikace: princip maxima se uplatnil při odvození nových výsledků[21]) o Liouvilleově vlastnosti sférických průměrů v rovině, Choquetovu větu lze využít k jednoduššímu důkazu Jamesovy věty o reflexivitě pro separabilní Banachovy prostory[22]), s Choquetovou teorií se setkáváme v teorii optimalizace, při studiu laminátů či řešení nelineárních parciálních diferenciálních rovnic (Youngovy míry apod.)[23]).

3. Choquetova teorie v prostorech testovacích funkcí

3.1. Choquetova věta

V dalším textu $K \neq \emptyset$ bude značit kompaktní metrický prostor. *Prostorem testovacích funkcí*, krátce *testovacím prostorem*, budeme rozumět vektorový podprostor $\mathcal{H}$

[19]) Konstrukce Poulsenova simplexu je uvedena v [Li] nebo [FoLiPh]. Tam je také objasněna vlastnost jednoznačnosti a vlastnost univerzality Poulsenova simplexu.

[20]) Toto tvrzení lze nalézt u V. Kleeho [Kl]. V prostorech konečné dimenze samozřejmě $\overline{\operatorname{ext} C} \neq C$ pro každou konvexní množinu obsahující více než jeden bod.

[21]) Viz nejnovější Hansenův výsledek [Ha].

[22]) Připomeňme Jamesovu větu, podle které reálný Banachův prostor X je reflexivní, právě když každý funkcionál $f \in X^*$ nabývá na uzavřené jednotkové kouli v X svého maxima. Pro separabilní případ je důkaz obsažen v příspěvku [FoLiPh], připraveném k publikaci.

[23]) Podrobný výklad lze nalézt v [Rou]. Viz též [Kr].

prostoru $\mathcal{C}(K)$ spojitých (reálných) funkcí na K, který obsahuje konstantní funkce a *odděluje body* K, neboli ke každé dvojici $x, y \in K$ existuje funkce $h \in \mathcal{H}$ tak, že $h(x) \neq h(y)$.

Jako příklad testovacího prostoru nám poslouží prostor $\mathcal{A}(K)$ všech spojitých afinních funkcí na (podle naší úmluvy metrizovatelné) kompaktní konvexní podmnožině lokálně konvexního prostoru, který jsme vyšetřovali v předcházející části. Pak mluvíme o *konvexním případě*. Anebo také celý prostor $\mathcal{C}(K)$. Dalšímu důležitému případu se budeme věnovat níže, příkladem bude prostor všech spojitých funkcí na uzávěru omezené otevřené množiny $U \subset \mathbb{R}^m$, které jsou harmonické na U.

Řekneme, že (pravděpodobnostní) míra $\mu \in \mathcal{M}^1(K)$ *reprezentuje bod* $x \in K$, anebo také že x je *těžištěm míry* μ, jestliže

$$h(x) = \int_K h \, \mathrm{d}\mu \quad \text{pro každou testovací funkci} \quad h \in \mathcal{H}.$$

Množinu všech měr reprezentujících bod x označme $\mathcal{M}_x(\mathcal{H})$. Všimněme si hned, že Diracova míra ε_x vždy reprezentuje bod x, tedy že $\varepsilon_x \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$.

Nyní bychom potřebovali zavést analogii pojmu extremálního bodu, přičemž nemáme k dispozici příslušné geometrické pojmy. Přesněji, nevíme, jak v testovacích prostorech definovat úsečku. Naštěstí nám pomůže následující věta dokázaná právě v konvexním případě. Její důkaz vynecháme[24]), i když není příliš obtížný.

Bauerova charakteristika $\operatorname{ext} K$. *Nechť K je kompaktní konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru. Potom x je extremálním bodem množiny K, právě když jedinou $\mathcal{A}(K)$-reprezentující mírou bodu x je Diracova míra ε_x. Tedy*

$$\operatorname{ext} K = \big\{x \in K : \mathcal{M}_x(\mathcal{A}(K)) = \{\varepsilon_x\}\big\}.$$

V souladu s touto charakteristikou extremálních bodů můžeme zavést analogii množiny extremálních bodů v situaci testovacího prostoru na kompaktním prostoru K. Definujme

$$\operatorname{Ch}_{\mathcal{H}} K = \big\{x \in K : \mathcal{M}_x(\mathcal{H}) = \{\varepsilon_x\}\big\}.$$

Množina $\operatorname{Ch}_{\mathcal{H}} K$ se nazývá *Choquetova hranice* testovacího prostoru $\mathcal{H}$. Abychom uměli popsat Choquetovu hranici různých testovacích prostorů, zavedeme nyní další pojmy.

Pro $f \in \mathcal{C}(K)$ označme

$$f^* = \inf\{h \in \mathcal{H} : h \geqq f\}, \quad f_* = \sup\{h \in \mathcal{H} : h \leqq f\}.$$

Pro odvození hlubších vlastností bude výhodné nejdříve dokázat následující tvrzení.

[24]) Čtenáře lze opět odkázat na Phelpsovu knihu [Ph]; využívá se regularita borelovských měr.

Klíčové lemma. *Nechť $x \in K$ a $f \in \mathcal{C}(K)$. Potom*

$$\big[f_*(x), f^*(x)\big] = \bigg\{\int_K f \,\mathrm{d}\mu : \mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})\bigg\}.$$

Důkaz. Volme $x \in K$ a $f \in \mathcal{C}(K)$. Důkaz jedné implikace je snadný. Je-li $\mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$, $g, h \in \mathcal{H}$ a $g \leqq f \leqq h$ na K, je $g(x) = \int_K g \,\mathrm{d}\mu \leqq \int_K f \,\mathrm{d}\mu \leqq \int_K h \,\mathrm{d}\mu = h(x)$. Odtud ihned dostáváme $f_*(x) \leqq \int_K f \,\mathrm{d}\mu \leqq f^*(x)$.

Předpokládejme nyní, že $\alpha \in [f_*(x), f^*(x)]$. Zpočátku si uvědomíme, že zobrazení $p : \varphi \mapsto \varphi^*(x)$, $\varphi \in \mathcal{C}(K)$, je sublineární funkcionál na prostoru $\mathcal{C}(K)$. Lehko totiž zjistíme, že

$$(g + h)^* \leqq g^* + h^* \quad \text{a} \quad (\lambda g)^* = \lambda g^*$$

pro kterékoliv $g, h \in \mathcal{C}(K)$ a $\lambda \geqq 0$. Použijeme nyní algebraickou verzi Hahnovy-Banachovy věty. Podle ní existuje lineární funkcionál F na $\mathcal{C}(K)$ s vlastnostmi $F \leqq p$ na $\mathcal{C}(K)$, $F(f) = \alpha$. Funkcionál F je také nezáporný. Je-li totiž $g \in \mathcal{C}(K)$, $g \leqq 0$ na K, je $F(g) \leqq p(g) = g^*(x) \leqq 0$ (připomeňme, že $0 \in \mathcal{H}$). Podle Rieszovy věty o reprezentaci existuje borelovská míra μ na K tak, že $\int_K g \,\mathrm{d}\mu = F(g)$ pro každou funkci $g \in \mathcal{C}(K)$. Je-li však $h \in \mathcal{H}$, je samozřejmě $h_* = h^* = h$, a tudíž

$$\int_K h \,\mathrm{d}\mu = F(h) \leqq p(h) = h^*(x) = h(x).$$

Protože však zároveň je $-h \in \mathcal{H}$, platí i $-\int_K h \,\mathrm{d}\mu \leqq -h(x)$. Volíme-li speciálně $h = 1$, je $\mu(K) = \int_K h \,\mathrm{d}\mu = h(x) = 1$. A jsme s důkazem hotovi. Našli jsme totiž $\mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$ tak, že $\int_K f \,\mathrm{d}\mu = F(f) = \alpha$. ■

Klíčové lemma nám umožňuje charakterizovat body Choquetovy hranice. Jako jeho bezprostřední důsledek dostáváme následující tvrzení pocházející opět od H. Bauera.

Důsledek. *Bod $x \in K$ leží v Choquetově hranici* $\mathrm{Ch}_{\mathcal{H}}(K)$*, právě když $f_*(x) = f^*(x)$ pro každou funkci $f \in \mathcal{C}(K)$. Tedy*

$$\mathrm{Ch}_{\mathcal{H}} K = \bigcap_{f \in \mathcal{C}(K)} \{x \in K : f_*(x) = f^*(x)\}.$$

Tento důsledek nám umožňuje dokázat, že Choquetova hranice je vždy borelovská množina. Platí dokonce silnější tvrzení.

Tvrzení. *Nechť $\mathcal{H}$ je testovací prostor na kompaktním metrickém prostoru K. Potom Choquetova hranice* $\mathrm{Ch}_{\mathcal{H}} K$ *je množina typu G_δ.*

Důkaz. Především si musíme rozmyslet, že existuje spočetná hustá množina $M \subset \mathcal{C}(K)$, $M = -M$ a že

$$\mathrm{Ch}_{\mathcal{H}} K = \bigcap_{f \in M} \{x \in K : f(x) = f^*(x)\}.$$

To odvodíme z toho, že v případě metrického kompaktu K je Banachův prostor $\mathcal{C}(K)$ separabilní. Označíme-li potom pro $f \in M$

$$G_n = \Big\{x \in K : f^*(x) - f(x) < \frac{1}{n}\Big\},$$

jsou G_n otevřené množiny (funkce f^* je infimem množiny spojitých funkcí) a platí $\operatorname{Ch}_{\mathcal{H}} K = \bigcap\limits_{f \in M} \bigcap\limits_{n} G_n$. ■

Uvedený popis Choquetovy hranice je užitečný, ale v konkrétních případech stěží umožňuje rozhodnout, které body do Choquetovy hranice padnou. K tomu se nám bude hodit následující nový pojem. Bodu $x \in K$ budeme říkat *$\mathcal{H}$-exponovaný*, existuje-li takové $h \in \mathcal{H}$, že $0 = h(x) < h(y)$ pro každé $y \in K \setminus \{x\}$. O funkci h mluvíme jako o *$\mathcal{H}$-exponující* funkci. Postačující podmínka pak vypadá takto:

Tvrzení. *Každý $\mathcal{H}$-exponovaný bod leží v Choquetově hranici $\operatorname{Ch}_{\mathcal{H}} K$.*

Důkaz. Předpokládejme, že $x \in K$ a $\mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$. Nechť $h \in \mathcal{H}$ je taková funkce, že $0 = h(x) < h(y)$ pro každé $y \in K$, $y \neq x$. Potom ovšem $0 = h(x) = \int_K h \,\mathrm{d}\mu$ a vidíme, že nosič míry μ musí být obsažen v jednobodové množině $\{x\}$. A protože $\mu(K) = 1$, musí být $\mu = \varepsilon_x$. ■

Než přejdeme k důkazu hlavní Choquetovy věty, zavedeme další pojmy. Symbolem $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ označíme množinu všech (spojitých) *$\mathcal{H}$-konvexních funkcí* na K, tedy

$$\mathcal{K}(\mathcal{H}) = \Big\{f \in \mathcal{C}(K) : f(x) \leqq \int_K f \,\mathrm{d}\mu \text{ pro všechna } x \in K \text{ a } \mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})\Big\}.$$

O funkci $h \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ řekneme, že je *striktně $\mathcal{H}$-konvexní*, jestliže

$$h(x) < \int_K h \,\mathrm{d}\mu, \quad x \in K, \quad \mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H}) \quad \text{a} \quad \mu \neq \varepsilon_x.$$

Následující tvrzení bude základem pro slibovanou větu.

Tvrzení. *Na K existuje striktně $\mathcal{H}$-konvexní funkce.*

Náznak důkazu. Protože je prostor $\mathcal{C}(K)$ separabilní, můžeme najít spočetnou hustou podmnožinu $\{h_n : n \in \mathbb{N}\}$ množiny $\{h \in \mathcal{H} : 0 \leqq h \leqq 1\}$. V prvním kroku ukážeme, že každá z funkcí h_n^2 je $\mathcal{H}$-konvexní. To není obtížné. Volíme-li $x \in K$ a $\mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$, dostaneme použitím Hölderovy nerovnosti

$$h_n^2(x) = \left(\int_K h_n \,\mathrm{d}\mu\right)^2 \leqq \int_K 1 \,\mathrm{d}\mu \int_K h_n^2 \,\mathrm{d}\mu = \int_K h_n^2 \,\mathrm{d}\mu.$$

Je-li navíc $\mu \neq \varepsilon_x$, existuje takové n, že $h_n^2(x) < \int_K h_n^2 \,\mathrm{d}\mu$. Kdyby totiž takové n neexistovalo, platila by pro každé n v uvedené Hölderově nerovnosti rovnost. Odtud bychom dostali, že $h_n = h_n(x)$ μ-skoro všude na K. Protože μ není Diracova míra, rozmysleli bychom si, že musí existovat bod $y \in K$, $y \neq x$ tak, že $h_n(x) = h_n(y)$ pro každé n. A to by bylo ve sporu s tím, že $\mathcal{H}$ odděluje body K. Položíme-li pak $h = \sum_n 2^{-n} h_n$, je h hledaná striktně $\mathcal{H}$-konvexní funkce. ■

Nyní již máme připravenou cestu k důkazu mimořádně významné Choquetovy věty.

Choquetova věta. *Nechť $\mathcal{H}$ je testovací prostor na metrizovatelném kompaktu K a $x \in K$. Potom existuje borelovská míra μ soustředěná na Choquetově hranici $\mathrm{Ch}_{\mathcal{H}} K$ taková, že $h(x) = \int_K h \, \mathrm{d}\mu$ pro každou funkci $h \in \mathcal{H}$.*

Důkaz. Nechť $x \in K$ a nechť h_0 je striktně $\mathcal{H}$-konvexní funkce na K. Podle klíčového lemmatu existuje $\mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$ tak, že $\int_K h_0 \, \mathrm{d}\mu = h_0^*(x)$. Pokud $h \in \mathcal{H}$, $h \geqq h_0$, je

$$h_0^*(x) = \int_K h_0 \, \mathrm{d}\mu \leqq \int_K h_0^* \, \mathrm{d}\mu \leqq \int_K h \, \mathrm{d}\mu = h(x).$$

Přechodem k infimu dostaneme rovnost $\int_K h_0 \, \mathrm{d}\mu = \int_K h_0^* \, \mathrm{d}\mu$. A protože $h_0 \leqq h_0^*$, je

$$\mu\big(\{t \in K : h_0^*(t) > h_0(t)\}\big) = 0.$$

K dokončení důkazu si stačí uvědomit, že

$$K \setminus \mathrm{Ch}_{\mathcal{H}} K \subset \{t \in K : h_0^*(t) > h_0(t)\}.$$

Pokud by totiž $h_0(t) = h_0^*(t)$ a současně $t \notin \mathrm{Ch}_{\mathcal{H}} K$, existovala by reprezentující míra $\mu \in \mathcal{M}_t(\mathcal{H})$, $\mu \neq \varepsilon_t$. Z definice striktní konvexity bychom pak pomocí klíčového lemmatu dostali

$$h_0^*(t) = h_0(t) < \int_K h_0 \, \mathrm{d}\mu \leqq h_0^*(t),$$

což je samozřejmě spor. Choquetova hranice je borelovská množina a můžeme tedy uzavřít, že $\mu(K \setminus \mathrm{Ch}_{\mathcal{H}} K) = 0$. A to jsme chtěli ukázat. ■

3.2. Principy maxima

Choquetova hranice hraje také význačnou roli v následujícím abstraktním *principu maxima.*

Princip maxima. *Nechť $\mathcal{H}$ je testovací prostor na $K \neq \emptyset$ a f je (spojitá) $\mathcal{H}$-konvexní funkce na K. Potom f nabývá svého maxima na K v nějakém bodě Choquetovy hranice.*

Důkaz. Jakožto spojitá funkce na kompaktní množině nabývá f svého maxima v nějakém bodě $z \in K$. Podle Choquetovy věty nalezněme takovou reprezentující míru $\mu \in \mathcal{M}_z(\mathcal{H})$, aby $\mu(K \setminus \mathrm{Ch}_{\mathcal{H}} K) = 0$. Potom

$$f(z) \leqq \int_K f \, \mathrm{d}\mu = \int_{\mathrm{Ch}_{\mathcal{H}} K} f \, \mathrm{d}\mu.$$

Vidíme, že $\int_{\mathrm{Ch}_{\mathcal{H}} K} (f - f(z)) \, \mathrm{d}\mu \geqq 0$. Protože však $f - f(z) \leqq 0$ na K a $\mu(\mathrm{Ch}_{\mathcal{H}} K) = 1$, musí existovat $x_0 \in \mathrm{Ch}_{\mathcal{H}} K$ tak, že $f(x_0) = f(z)$ $(= \max\{f(t) : t \in K\})$. ■

Důsledek. *Jestliže f je $\mathcal{H}$-konvexní funkce na K a $f \leqq 0$ na $\mathrm{Ch}_{\mathcal{H}} K$, potom $f \leqq 0$ na K.*

Vrátíme-li se ke konvexnímu případu a využijeme-li předchozí abstraktní princip maxima, dostaneme tvrzení, které se dnes všeobecně označuje jako Bauerův princip maxima.

Bauerův princip maxima. *Nechť K je neprázdná kompaktní konvexní podmnožina lokálně konvexního prostoru X a f spojitá konvexní funkce na K. Potom f nabývá svého maxima v nějakém extremálním bodě K, tj. existuje $x \in \operatorname{ext} K$ tak, že*

$$f(x) = \max\{f(t) : t \in K\}.$$

Podotkněme ještě, že z Bauerova principu maxima lze získat vcelku snadnou úvahou využívající Hahnovu-Banachovu větu důkaz Krejnovy-Milmanovy věty[25]).

H. Bauer

3.3. Simpliciální prostory

Dále potřebujeme zavést pro obecný případ testovacích prostorů pojem analogický pojmu afinní funkce z konvexního případu. To nás vede k následující definici. Funkcím, které jsou současně $\mathcal{H}$-konvexní i $\mathcal{H}$-konkávní ve zřejmém smyslu, říkejme *$\mathcal{H}$-afinní.* Označíme-li $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ množinu všech $\mathcal{H}$-afinních funkcí na K, je tedy

$$\mathcal{A}(\mathcal{H}) = \left\{ f \in \mathcal{C}(K) : f(x) = \int_K f \,\mathrm{d}\mu \text{ pro každé } x \in K \text{ a } \mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H}) \right\}.$$

Dále označme

$$\widehat{\mathcal{H}} = \{ f \in \mathcal{C}(K) : f_* = f^* \}.$$

Vztah těchto dvou systémů funkcí a jejich vlastnosti shrnuje následující věta.

Věta. *Prostor $\mathcal{H}$-afinních funkcí $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ je uzavřený podprostor $\mathcal{C}(K)$ obsahující $\mathcal{H}$. Přitom $\mathcal{A}(\mathcal{H}) = \widehat{\mathcal{H}}$.*

Důkaz. Evidentně $\mathcal{H} \subset \mathcal{A}(\mathcal{H})$ a $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ tvoří vektorový prostor. Lebesgueova věta o limitním přechodu za integračním znamením ihned dá uzavřenost $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ v $\mathcal{C}(K)$. Další tvrzení o rovnosti $\mathcal{A}(\mathcal{H}) = \widehat{\mathcal{H}}$ vyplývá bezprostředně z klíčového lemmatu. ∎

[25]) Tak postupuje například G. Choquet v [Cho], 2. díl, s. 102–106.

Prostor $\mathcal{H}$-afinních funkcí má také důležitou úlohu ve větách Korovkinova typu[26]).

Testovací prostor $\mathcal{H}$ na metrizovatelném kompaktu K se nazývá *simpliciální*, jestliže ke každému $x \in K$ existuje právě jedna $\mathcal{H}$-reprezentující míra z $\mathcal{M}_x(\mathcal{H})$ soustředěná na Choquetově hranici $\mathrm{Ch}_{\mathcal{H}} K$. Simpliciální prostory se dají charakterizovat mnoha způsoby. Uvedeme pouze jeden z nich, který naznačuje souvislost s řešením Dirichletovy úlohy diskutovaným v odst. 4.2–4.6. Důkaz následujícího tvrzení je poměrně obtížný, proto jej vynecháme[27]).

Charakteristika simpliciálních prostorů. *Nechť $\mathcal{H}$ je testovací prostor na metrizovatelném kompaktu K. Potom $\mathcal{H}$ je simpliciální, právě když je splněna následující podmínka: Kdykoliv F je uzavřená podmnožina Choquetovy hranice $\mathrm{Ch}_{\mathcal{H}} K$ a f spojitá funkce na F, existuje $h \in \mathcal{A}(\mathcal{H})$ tak, že $h = f$ na F, $\max\{h(x) : x \in K\} = \max\{f(x) : x \in F\}$ a $\min\{h(x) : x \in K\} = \min\{f(x) : x \in F\}$.*

Uvedená podmínka říká, že ke každé spojité funkci f (*okrajové podmínce*) definované na uzavřené podmnožině Choquetovy hranice existuje její spojité rozšíření na funkci ze systému $\mathcal{A}(\mathcal{H})$. Tedy vlastně řešení *Dirichletovy úlohy.* Takové rozšíření však zdaleka není jednoznačné (za F můžeme brát i jednobodové množiny!). Často se mluví proto o *zeslabené Dirichletově úloze.*

V tvrzení z odst. 3.1 jsme ukázali, že $\mathcal{H}$-exponované body leží v Choquetově hranici. U simpliciálních prostorů většinou tyto dvě množiny splývají. Platí totiž následující tvrzení.

Věta. *Je-li $\mathcal{H}$ simpliciální testovací prostor na K, potom každý bod z Choquetovy hranice je $\mathcal{A}(H)$-exponovaný.*

Důkaz. Poznamenejme, že Choquetova hranice nemůže být v případě kompaktu K (obsahujícího alespoň dva body) jednobodová. To plyne třeba z principu maxima a z toho, že funkce ze systému $\mathcal{H}$ oddělují body. Volme nyní $x \in \mathrm{Ch}_{\mathcal{H}} K$. Je-li $y \in \mathrm{Ch}_{\mathcal{H}} K \setminus \{x\}$, získáme řešením zeslabené Dirichletovy úlohy pro dvoubodovou množinu $F = \{x, y\}$ funkci $h_y \in \mathcal{A}(\mathcal{H})$ s vlastnostmi

$$h_y(x) = 0, \quad h_y(y) = 1, \quad 0 \leqq h_y \leqq 1 \quad \text{na } K.$$

Potom

$$\mathrm{Ch}_{\mathcal{H}} K \setminus \{x\} \subset \bigcup_{y \in \mathrm{Ch}_{\mathcal{H}} K \setminus \{x\}} \{t \in K : h_y(t) > 0\}.$$

---

[26]) Byla by škoda na tomto místě se nezmínit ještě o další zajímavé vlastnosti prostoru $\mathcal{A}(\mathcal{H})$. Před několika lety vyšel v Pokrocích článek H. Bauera o Korovkinových větách. Čtenáře odkážeme na [Ba1] a pouze připomeneme některé definice. Uvažujme posloupnost $\{L_n\}$ lineárních nezáporných operátorů $L_n\colon \mathcal{C}(K) \to \mathcal{C}(K)$ na metrickém kompaktu K. Tuto posloupnost nazveme *$\mathcal{H}$-přípustnou*, jestliže $L_n h \to h$ stejnoměrně na K pro každou funkci $h \in \mathcal{H}$. Dále označme symbolem $\mathrm{Kor}(\mathcal{H})$ množinu všech funkcí $f \in \mathcal{C}(K)$, pro kterou $L_n f \to f$ stejnoměrně na K, kdykoliv $\{L_n\}$ je $\mathcal{H}$-přípustná posloupnost operátorů, a nazvěme tuto množinu *Korovkinovým uzávěrem* testovacího prostoru $\mathcal{H}$. Vztah Korovkinova uzávěru a prostoru afinních funkcí vyjadřuje následující věta: *Platí rovnost* $\mathrm{Kor}(\mathcal{H}) = \mathcal{A}(\mathcal{H}) = \widehat{\mathcal{H}}$.

[27]) Tuto charakteristiku lze odvodit z věty 28.6 uvedené v druhém dílu Choquetovy monografie [Cho].

Využitím separability $\mathcal{H}$ dostaneme body $y_n \in \operatorname{Ch}_{\mathcal{H}} K \setminus \{x\}$ tak, že

$$\operatorname{Ch}_{\mathcal{H}} K \setminus \{x\} \subset \bigcup_n \{t \in K : h_{y_n}(t) > 0\}.$$

Položíme-li $h = \sum_n 2^{-n} h_{y_n}$, je $h \in \mathcal{A}(\mathcal{H})$, $h \geqq 0$ na K, $h > 0$ na $\operatorname{Ch}_{\mathcal{H}}(K) \setminus \{x\}$ a $h(x) = 0$. Zbývá ukázat, že $h(z) > 0$ pro každé $z \in K$, $z \neq x$. Nechť tedy $h(z) = 0$ pro jisté $z \in K$. Pomocí Choquetovy věty najdeme $\mu \in \mathcal{M}_z(\mathcal{H})$ tak, aby $\mu(K \setminus \operatorname{Ch}_{\mathcal{H}} K) = 0$. Využijeme-li toho, že $h \in \mathcal{A}(\mathcal{H})$ je $\mathcal{H}$-afinní funkce, dostaneme

$$0 = h(z) = \int_K h \,\mathrm{d}\mu = \int_{\operatorname{Ch}_{\mathcal{H}} K} h \,\mathrm{d}\mu.$$

Odtud vyplývá, že $\operatorname{supt} \mu \subset \{x\}$, a protože μ je pravděpodobnostní míra, je nutně $\mu = \varepsilon_x$. Tudíž pro každou funkci $\varphi \in \mathcal{H}$ dostáváme rovnost

$$\varphi(x) = \int_K \varphi \,\mathrm{d}\varepsilon_x = \int_K \varphi \,\mathrm{d}\mu = \varphi(z).$$

Funkce z testovacího prostoru $\mathcal{H}$ však oddělují body K, musí tedy být $z = x$. A to jsme vlastně chtěli ukázat. ■

V předešlé větě se nám pro simpliciální prostory podařilo sestrojit v každém bodě Choquetovy hranice $\mathcal{A}(\mathcal{H})$-exponující funkci. Rovněž tak v případě zeslabené Dirichletovy úlohy lze nalézt pouze řešení z prostoru $\mathcal{A}(\mathcal{H})$. Nás by samozřejmě více uspokojilo, kdyby se nám podařilo nalézt dokonce funkce z původního testovacího prostoru $\mathcal{H}$. To však není vždy možné. Nicméně další tvrzení nám alespoň napoví, kdy množina $\mathcal{H}$-afinních funkcí splývá s funkcemi z $\mathcal{H}$.

Bauerovo tvrzení[28]**.** *Nechť $\mathcal{H}$ je testovací prostor na K. Potom $\mathcal{A}(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$, právě když existuje uzavřená množina $\mathcal{W} \subset \mathcal{C}(K)$ stabilní na tvoření konečných minim taková, že $\mathcal{H} = \mathcal{W} \cap (-\mathcal{W})$.*

3.4. Konkrétní příklady

Vraťme se nyní k triviálnímu příkladu testovacího prostoru. Uvažujme tedy kompaktní metrický prostor K a na něm testovací prostor $\mathcal{H} = \mathcal{C}(K)$. V tomto případě je zajisté každý bod K jeho $\mathcal{C}(K)$-exponovaným bodem. Tudíž Choquetova hranice $\operatorname{Ch}_{\mathcal{C}(K)} K = K$. Protože $\mathcal{M}_x(\mathcal{C}(K)) = \{\varepsilon_x\}$ v každém bodě $x \in K$, je prostor $\mathcal{C}(K)$ simpliciální. Co nám vlastně říká charakteristika simpliciálních prostorů v termínech zeslabené Dirichletovy úlohy o tomto speciálním případě? Podmínka v něm uvedená není zde vlastně nic jiného než Tietzeho věta o rozšíření spojité funkce z uzavřené podmnožiny na spojitou funkci na celém prostoru.

[28]) Věta náleží H. Bauerovi a její důkaz lze nalézt v Bauerově článku [Ba2], kde je vyjasněna souvislost simpliciálních prostorů a simplexů ve smyslu geometrické Choquetovy teorie.

V klasickém případě, kdy K je konvexní kompaktní metrizovatelná podmnožina lokálně konvexního prostoru X a $\mathcal{H}$ je množina $\mathcal{A}(K)$ všech spojitých afinních funkcí na K, splývá, jak jsme již poznamenali, Choquetova hranice $\mathrm{Ch}_{\mathcal{H}} K$ s množinou $\operatorname{ext} K$ všech extremálních bodů. Pokud je prostor $\mathcal{A}(K)$ simpliciální, nazýváme K krátce *Choquetovým simplexem*. Pokud ještě více specifikujeme a za K vezmeme kompaktní konvexní množinu s neprázdným vnitřkem v $\mathbb{R}^m$, je K Choquetův simplex, právě když K je konvexní obal $m+1$ lineárně nezávislých bodů[29]). Tedy Choquetovy simplexy v rovině jsou právě uzavřené trojúhelníky či v prostoru uzavřené čtyřstěny.

Dalším důležitým příkladům vycházejícím z teorie potenciálu jsou věnovány následující části.

4. Dirichletova úloha v teorii potenciálu

4.1. Harmonické a hyperharmonické funkce

Pro úplnost uveďme, že funkce h definovaná na otevřené množině $U \subset \mathbb{R}^m$ se nazývá *harmonická*, jestliže má spojité parciální derivace 2. řádu na U a splňuje na U *Laplaceovu rovnici* $\Delta h = 0$. Množinu všech harmonických funkcí na U budeme značit $\mathcal{H}(U)$. Zřejmě je $\mathcal{H}(U)$ vektorový prostor.

Harmonické funkce lze charakterizovat pomocí *vlastnosti průměru.* Pro $x \in \mathbb{R}^m$ a $r > 0$ označíme $B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^m : |y - x| < r\}$ a dále symbolem $\lambda_{x,r}$ normalizovanou Lebesgueovu míru na $B(x,r)$. Tedy $\lambda_{x,r}$ je restrikce Lebesgueovy míry na $B(x,r)$ násobená převrácenou hodnotou objemu koule $B(x,r)$. Platí následující tvrzení:

Věta[30]**).** *Nechť $f\colon U \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Potom $f \in \mathcal{H}(U)$, právě když platí rovnost*

$$f(x) = \int_{B(x,r)} f \,\mathrm{d}\lambda_{x,r},$$

kdykoli uzávěr koule $B(x,r)$ je obsažen v U.

Připomeňme ještě pojem hyperharmonických funkcí, které v určitém smyslu plní pro teorii potenciálu úlohu konkávních funkcí. Funkce $u\colon U \to (-\infty, \infty]$ se nazývá *hyperharmonická*, jestliže u je zdola polospojitá[31]) a platí $\int_{B(x,r)} u \,\mathrm{d}\lambda_{x,r} \leqq u(x)$, kdykoli uzávěr $B(x,r)$ je obsažen v U. Systém všech hyperharmonických funkcí na U označíme $\mathcal{H}^*(U)$.

V případě $m = 1$ je $h \in \mathcal{H}(U)$, právě když je h lineární na každém intervalu obsaženém v U. Podobně $u \in \mathcal{H}^*(U)$, právě když je u konkávní na každém intervalu obsaženém v U.

---

[29]) Pěkný výklad o simplexech lze nalézt v Choquetově knize [Cho], 2. díl, s. 156–161.

[30]) Důkaz věty lze nalézt v [He] či [KNV]. Problematice vět o průměru je věnován článek [NeVe2].

[31]) Říci, že u je *zdola polospojitá*, je zde ekvivalentní podmínce: u je limitou neklesající posloupnosti spojitých funkcí.

Dále se omezíme na zajímavější případ a budeme předpokládat, že pro dimenzi prostoru $\mathbb{R}^m$ platí $m \geqq 2$.

4.2. Klasická Dirichletova úloha

Nechť $U \subset \mathbb{R}^m$ je neprázdná omezená otevřená množina a ∂U je její hranice. Funkce $g \in \mathcal{H}(U)$ se nazývá *řešení klasické Dirichletovy úlohy* pro funkci $f \in \mathcal{C}(\partial U)$, tzv. *okrajovou podmínku*, jestliže pro každý bod $z \in \partial U$ platí

$$\lim_{x \to z} g(x) = f(z). \tag{$*$}$$

Klasická Dirichletova úloha tedy bezprostředně souvisí s testovacím prostorem

$$H(U) = \{h \in \mathcal{C}(\overline{U}) : h|_U \in \mathcal{H}(U)\}.$$

Funkce z prostoru $H(\partial U) = H(U)|_{\partial U}$ jsou totiž právě ty spojité funkce na ∂U, pro něž existuje řešení klasické Dirichletovy úlohy. Pro každé $x \in U$ a každé $r > 0$ takové, že uzávěr koule $B(x,r)$ leží v U, je $\lambda_{x,r}$ reprezentující míra (vzhledem k $H(U)$) pro bod x. Zřejmě $\lambda_{x,r} \neq \varepsilon_x$ a z principu maxima (viz odst. 3.2) dostáváme: *Pro každou funkci $h \in H(U)$ existuje $z \in \partial U$ takové, že $h(z) = \max h(\overline{U})$. Jsou-li tedy $h_1, h_2 \in H(U)$ a $h_1 \leqq h_2$ na ∂U, potom $h_1 \leqq h_2$, a tak pro každou funkci $f \in C(\partial U)$ existuje nejvýše jedno řešení klasické Dirichletovy úlohy.*

Množina U se nazývá *regulární*, jestliže pro každou okrajovou podmínku $f \in C(\partial U)$ existuje řešení klasické Dirichletovy úlohy. Z teorie potenciálu je známo, že každá omezená otevřená množina s hladkou (či obecněji lipschitzovskou) hranicí je regulární[32]).

Existují množiny, které nejsou regulární. Je-li $U = B(0,1) \setminus \{0\}$ a $f = 0$ na $\partial B(0,1)$ a $f(0) = 1$, pak neexistuje $h \in H(U)$ taková, že $h|_{\partial U} = f$. Pro každou takovou funkci h by (podle věty o odstranitelné singularitě) platilo $h \in H(B(0,1))$, a tudíž $1 = h(0) \leqq \max h(\partial B(0,1)) = 0$. Složitější je ukázat, že např. pro tzv. *Lebesgueův hrot*

$$L = \{0\} \cup \left\{ x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 > 0, \ \sqrt{x_2^2 + x_3^2} \leqq \mathrm{e}^{-1/x_1} \right\}$$

není množina $B(0,1) \setminus L$ regulární podmnožinou $\mathbb{R}^3$.

V těchto případech $H(\partial U) \neq C(\partial U)$, a tudíž $H(\partial U)$ jako uzavřený podprostor je pak řídký, je to tedy „topologicky malá“ podmnožina v $C(\partial U)$.

4.3. Zobecněná Dirichletova úloha

Existence neregulárních množin vede k přirozené otázce: bylo by možné každé okrajové podmínce $f \in C(\partial U)$ přiřadit „rozumným způsobem“ funkci $g \in \mathcal{H}(U)$ tak, aby rovnost $(*)$ z odst. 4.2 platila alespoň ve „většině“ hraničních bodů? S ohledem

[32]) Geometrická kritéria regularity lze nalézt u L. L. Helmse v [He] a v [KNV].

na linearitu Laplaceova operátoru a na platnost uvedeného důsledku principu maxima je vcelku přirozené za zobecnění klasické Dirichletovy úlohy považovat úlohu nalézt zobrazení A: $C(\partial U) \to \mathcal{H}(U)$ s těmito vlastnostmi:

(a) A je lineární;

(b) A je nezáporné, tj. $Af \geqq 0$ pro $f \geqq 0$;

(c) pokud pro f existuje řešení g klasické Dirichletovy úlohy, platí $Af = g$; jinak řečeno, $A(h|_{\partial U}) = h|_U$, kdykoli $h \in H(U)$.

Zobrazení s uvedenými vlastnostmi se nazývá *Keldyšův operátor* (na U). Vzniká samozřejmě otázka: existuje pro každou omezenou otevřenou množinu $U \subset \mathbb{R}^m$ Keldyšův operátor na U? Odpověď nalezneme v odst. 4.4 a 4.6.

4.4. Perronovo řešení

Pro funkci f: $\partial U \to \mathbb{R}$ označme

$$\mathcal{U}(f) = \{u \in \mathcal{H}^*(U) : \liminf_{x\to z} u(x) \geqq f(z),\ z \in \partial U\}.$$

Dále pro $x \in U$ definujeme

$$\overline{H}f(x) = \inf\{u(x) : u \in \mathcal{U}(f)\}, \quad \underline{H}f(x) = -\overline{H}(-f)(x).$$

Potom platí (z principu minima pro hyperharmonické funkce) $\underline{H}f \leqq \overline{H}f$. Funkce f se nazývá *resolutivní*, když $\underline{H}f = \overline{H}f$ a tato společná hodnota, kterou značíme Hf, je konečná funkce. Potom již $Hf \in \mathcal{H}(U)$ a je to tzv. *Perronovo řešení* zobecněné Dirichletovy úlohy. Uveďme tento důležitý výsledek: *každá spojitá funkce na ∂U je resolutivní*[33]) *a zobrazení A: $f \mapsto Hf$, $f \in C(\partial U)$, je Keldyšův operátor.*

Pro $x \in U$ je tudíž zobrazení $f \mapsto Hf(x)$, $f \in C(\partial U)$, nezáporný lineární funkcionál, a tedy podle Rieszovy věty o reprezentaci existuje borelovská míra μ_x na ∂U taková, že

$$Hf(x) = \int_{\partial U} f \,\mathrm{d}\mu_x, \quad f \in C(\partial U).$$

Míra μ_x se nazývá *harmonická míra* příslušná bodu x.

Poznamenejme, že *funkce f: $\partial U \to \mathbb{R}$ je resolutivní, právě když je integrovatelná vzhledem ke každé míře μ_x, $x \in U$*[34]).

Říkáme, že bod $z \in \partial U$ je *regulární*, jestliže $Hf(x) \to f(z)$ pro $x \to z$, $x \in U$, kdykoli $f \in C(\partial U)$. Jinak řečeno: právě když $\mu_x \to \varepsilon_z$ pro $x \to z$, $x \in U$. Množinu všech regulárních bodů označíme $\partial_{\mathrm{reg}}U$. Tato množina je vždy typu G_δ, obecně není uzavřená. Doplněk množiny $\partial_{\mathrm{reg}}U$ je zanedbatelný v tomto smyslu: $\mu_x(\partial U \setminus \partial_{\mathrm{reg}}U) = 0$

---

[33]) To dokázal N. Wiener v r. 1924 pro jinak konstruované řešení, které však splývá s Perronovým; viz také [He].

[34]) Toto tvrzení dokázal v r. 1939 M. Brelot. Proto se často užívá označení *PWB-řešení Dirichletovy úlohy* k připomenutí jmen Perron, Wiener a Brelot.

pro každé $x \in U$, tedy míra μ_x je nesena množinou regulárních bodů. Odtud se dá dokázat tento výsledek o jednoznačnosti: *jsou-li* $h_1, h_2 \in \mathcal{H}(U)$ *omezené a*

$$\lim_{x \to z} h_1(x) = \lim_{x \to z} h_2(x), \quad z \in \partial_{\mathrm{reg}} U,$$

potom $h_1 = h_2$.

Definice regulárního bodu neposkytuje žádnou informaci geometrického charakteru. Uveďme proto, že například bod $z \in \partial U$ je regulární, pokud je možno se ho dotknout z doplňku množiny U kuželem[35]).

4.5. Prostor $H(U)$ a Choquetova teorie

Nyní se podíváme na prostor $H(U)$ z pohledu Choquetovy teorie. Už víme (úvaha o reprezentující míře $\lambda_{x,r}$ z odst. 4.2), že $\mathrm{Ch}_{H(U)} \overline{U} \subset \partial U$. Protože $h(x) = \int h \, \mathrm{d}\mu_x$ pro každou funkci $h \in H(U)$ a každé $x \in U$, je $\mu_x \in \mathcal{M}_x(H(U))$. Nechť $z \in \mathrm{Ch}_{H(U)} \overline{U}$, $\nu \in \mathcal{M}^1(\partial U)$ a nechť $x_n \in U$ jsou takové body, že $x_n \to z$ a $\mu_{x_n} \to \nu$ pro $n \to \infty$. Pro každou funkci $h \in H(U)$ potom platí

$$h(x_n) = \int_{\partial U} h \, \mathrm{d}\mu_{x_n}, \quad h(x_n) \to h(z) \quad \text{a} \quad \int_{\partial U} h \, \mathrm{d}\mu_{x_n} \to \int_{\partial U} h \, \mathrm{d}\nu.$$

Dostáváme $h(z) = \int h \, \mathrm{d}\nu$, $h \in H(U)$, a protože $z \in \mathrm{Ch}_{H(U)} \overline{U}$, je $\nu = \varepsilon_z$. Odtud se odvodí, že $\mu_x \to \varepsilon_z$ pro $x \to z$, $x \in U$, takže $z \in \partial_{\mathrm{reg}} U$. Dokázali jsme, že $\mathrm{Ch}_{H(U)} \overline{U} \subset \partial_{\mathrm{reg}} U$. Tuto informaci podstatně doplňuje následující tvrzení.

Věta[36]**).** *Platí* $\mathrm{Ch}_{H(U)} \overline{U} = \partial_{\mathrm{reg}} U$ *a prostor* $H(U)$ *je simpliciální.*

Speciálně pro každé $x \in U$ je harmonická míra μ_x jediná $H(U)$-reprezentující míra nesená $\mathrm{Ch}_{H(U)} \overline{U}$. Podle definice Choquetovy hranice je zřejmě ε_z jediná reprezentující míra pro $z \in \partial_{\mathrm{reg}} U$ a je užitečné poznamenat, že jediná reprezentující míra nesená Choquetovou hranicí se pro $z \in \partial U \setminus \partial_{\mathrm{reg}} U$ získá speciální konstrukcí, nesmírně důležitou v teorii potenciálu: vymetením (*balayage*) míry ε_z na $\mathbb{R}^m \setminus U$.

Přehledný je zejména případ, kdy $\partial_{\mathrm{reg}} U$ je uzavřená množina. Podle tvrzení o zeslabené Dirichletově úloze z odst. 3.3 existuje pro každou funkci $f \in C(\partial_{\mathrm{reg}} U)$ funkce $h \in H(U)$ taková, že $f = h|_{\partial_{\mathrm{reg}} U}$. Tato funkce je podle principu maxima (viz odst. 3.2) právě jedna. Máme tak prosté nezáporné lineární zobrazení prostoru $C(\partial_{\mathrm{reg}} U)$ na $H(U)$. Odtud plyne, že $H(U)$ je *svaz*[37]), je-li na $H(U)$ definováno uspořádání $\prec$ takto: pro $h_1, h_2 \in H(U)$ je $h_1 \prec h_2$, pokud je $h_1 \leqq h_2$ na $\partial_{\mathrm{reg}} U$. Při této definici uspořádání označíme pro prvky $h_1, h_2 \in H(U)$ jejich infimum symbolem $h_1 \curlywedge h_2$.

Naprosto jiná situace nastává, pokud množina $\partial_{\mathrm{reg}} U$ není uzavřená.

---

[35]) Další geometrická kritéria jsou uvedena v [KNV], kde je také dokázána nutná a postačující podmínka pro regularitu bodu (Wienerovo kritérium).

[36]) Více informací může získat čtenář v článku [Ne]; podstatně obecnější výsledek v rámci teorie harmonických prostorů byl získán J. Bliedtnerem a W. Hansenem v [BlHa1] a [BlHa2].

[37]) Tedy $H(U)$ je uzavřený vzhledem k tvoření infim a suprem konečných množin.

Věta[38]**.** *Nechť U je oblast a množina $\partial_{\mathrm{reg}} U$ není uzavřená. Potom je $H(U)$ antisvaz v tomto smyslu: je-li $h_1, h_2 \in H(U)$ a $h_1 \curlywedge h_2 \in H(U)$, potom buďto $h_1 \leqq h_2$ nebo $h_1 \geqq h_2$.*

4.6. Keldyšova věta

Keldyšův operátor A: $f \mapsto Hf$, $f \in C(\partial U)$, byl výsledkem *speciální konstrukce.* Není zřejmé, zda existují jiné Keldyšovy operátory na U, které by dávaly příznivější řešení zobecněné Dirichletovy úlohy. Např. v tom smyslu, že by příslušná množina „regulárních bodů" byla eventuálně větší než $\partial_{\mathrm{reg}} U$.

Choquetova teorie poskytuje snadný přístup k důkazu této pozoruhodné věty.

Věta[39]**.** *Na U existuje právě jeden Keldyšův operátor.*

Důkaz. Nechť A je Keldyšův operátor na U. Chceme dokázat, že $Af = Hf$ pro každou funkci $f \in C(\partial U)$. K tomu stačí dokázat, že omezené harmonické funkce Af a Hf mají stejné hraniční hodnoty v každém bodě z $\partial_{\mathrm{reg}} U$. Zvolme tedy $f \in C(\partial U)$ a $z \in \partial_{\mathrm{reg}} U$. Protože prostor $H(U)$ je simpliciální, $z \in \mathrm{Ch}_{H(U)} \overline{U}$ a pro min-stabilní uzavřený kužel $S(U) = \{s \in \mathcal{C}(\overline{U}) : s|_U \in \mathcal{H}^*(U)\}$ platí $H(U) = S(U) \cap (-S(U))$, bod z je $H(U)$-exponovaný podle věty z odst. 3.3. Tudíž existuje funkce $h \in H(U)$ taková, že $h(z) = 0$ a $h > 0$ na $\overline{U} \setminus \{z\}$. Zvolme $\varepsilon > 0$ a okolí V bodu z takové, že $f \leqq \varepsilon + f(z)$ na $\partial U \cap V$. Dále zvolme $a > 0$ takové, že $f \leqq ah$ na $\partial U \setminus V$ a položme $k = \varepsilon + f(z) + ah$. Potom $f \leqq k|_{\partial U}$ a $A(k|_{\partial U}) = \varepsilon + f(z) + ah|_U$. Operátor A je lineární a nezáporný, tudíž neklesající, proto platí

$$Af \leqq A(k|_{\partial U}) = \varepsilon + f(z) + ah|_U.$$

Dostáváme

$$\limsup_{x \to z} Af(x) \leqq \varepsilon + f(z) + a \lim_{x \to z} (h|_U)(x) = \varepsilon.$$

Odtud snadno (přechodem k funkci $-f$) vyplývá, že

$$\lim_{x \to z} Af(x) = f(z) = \lim_{x \to z} Hf(x).$$

Tím je dokázáno, že $Af = Hf$ pro každou funkci $f \in C(\partial U)$. ∎

5. Integrální reprezentace harmonických funkcí

V odst. 1.8 byla popsána reprezentace nezáporných harmonických funkcí v $\mathbb{R}^m$, $m \geqq 2$, pomocí Poissonova integrálu. Jak tato reprezentace souvisí s Choquetovou teorií?

---

[38]) Věta je poprvé dokázána v článku E. G. Effrose a J. L. Kazdana [EfKa].

[39]) Větu dokázal M. V. Keldyš v [Ke2]. Důkaz je založen na existenci $H(U)$-exponující funkce, jejíž velmi složitou konstrukci využitím Wienerova kritéria podal Keldyš v [Ke1]. V důkazu věty se linearita operátoru A nevyužívá, věta tudíž platí pro nerostoucí operátory splňující podmínku (c) z odst. 4.3. Čtenáře odkazujeme na články [Ne], [NeVe1].

Rozdíly nezáporných harmonických funkcí na omezené oblasti U tvoří lineární podprostor E prostoru $\mathcal{C}(U)$. Uvažujeme-li na tomto prostoru E topologii lokálně stejnoměrné konvergence na U, je tato topologie metrizovatelná. Zvolme pevně $x_0 \in U$ a uvažujme konvexní množinu

$$X = \{h \in \mathcal{H}(U) :\ h \geqq 0,\ h(x_0) = 1\}.$$

Kompaktnost množiny X je důsledkem tzv. Harnackovy konvergenční věty pro harmonické funkce. Dá se dokázat, že X je (metrizovatelný) Choquetův simplex. Proto ke každé funkci $h \in X$ existuje právě jedna pravděpodobnostní míra ν nesená množinou $\operatorname{ext} X$ taková, že pro každý spojitý lineární funkcionál f na E platí rovnost

$$f(h) = \int_{\operatorname{ext} X} f(g)\,\mathrm{d}\nu(g).$$

Zvolíme-li $x \in U$ a uvažujeme-li funkcionál $u \mapsto u(x)$, $u \in E$, dostaneme speciálně

$$h(x) = \int_{\operatorname{ext} X} g(x)\,\mathrm{d}\nu(g).$$

Dá se dokázat, že $g \in \operatorname{ext} X$, právě když pro každou harmonickou funkci k vyhovující nerovnosti $0 \leqq k \leqq g$ platí $k = \alpha g$ pro vhodné $\alpha \in [0, 1]$. Prvky $\operatorname{ext} X$ se proto nazývají *minimální harmonické funkce* (normalizované rovností $g(x_0) = 1$).

V případě, že U je jednotková koule o středu $x_0 = 0$, platí $\operatorname{ext} X = \{P_z : z \in \partial U\}$, kde Poissonovo jádro P_z bylo zavedeno v odst. 1.8. Protože je v tomto případě zobrazení $z \mapsto P_z$, $z \in \partial U$, homeomorfní zobrazení hranice ∂U na $\operatorname{ext} X$, lze míru ν přenést přirozeným způsobem na míru μ na ∂U a platí

$$h(x) = \int_{\partial U} P_z(x)\,\mathrm{d}\mu(z)$$

pro každou funkci $h \in X$ a každé $x \in U$, a to odpovídá Rieszově-Herglotzově větě z odst. 1.8.

V popsaném případě reprezentace nezáporných harmonických funkcí na kouli U byla výsledkem velmi jednoduché situace: množiny $\operatorname{ext} X$ a ∂U jsou homeomorfní. V případě otevřeného jednotkového kruhu $U \subset \mathbb{R}^2$ lze (při ztotožnění $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{C}$) podle Riemannovy věty zobrazit U konformně na $V = U \setminus \{z \in \mathbb{C} :\ 0 \leqq \operatorname{Re} z < 1,\ \operatorname{Im} z = 0\}$. Pokud zvolíme $x_0 \in V$ a zopakujeme předchozí úvahy pro nezáporné funkce z $\mathcal{H}(V)$ a X definujeme obdobně, nelze již $\operatorname{ext} X$ homeomorfně zobrazit na ∂V. Protože U a V jsou konformně ekvivalentní a konformní zobrazení zachovává harmonicitu, každému bodu množiny $\{z \in \mathbb{C} :\ 0 < \operatorname{Re} z < 1,\ \operatorname{Im} z = 0\}$ odpovídají dvě normalizované minimální funkce, a tedy i dva prvky v množině $\operatorname{ext} X$. Názorně řečeno, z pohledu harmonických funkcí není již eukleidovská hranice přirozená, body odstraněného poloměru je třeba „zdvojit“.

R. S. Martin ve čtyřicátých letech ukázal[40]), že pro omezenou otevřenou množinu $U \subset \mathbb{R}^m$ se zvoleným referenčním bodem $x_0 \in U$ má důležitou úlohu jádro

$$K\colon (x, y) \mapsto G(x, y)/G(x, x_0), \quad (x, y) \in U \times U,$$

[40]) Viz [Ma]. Význam průkopnické práce [Ma] byl rozpoznán až po r. 1950, zejména díky M. Brelotovi a J. L. Doobovi.

vytvořené jako podíl Greenových funkcí pro U. Dá se dokázat, že U lze vnořit do kompaktního prostoru U^* (v zásadě jednoznačně určeného, je to tzv. *Martinova kompaktifikace* U) a pro každý bod množiny $z \in U^* \setminus U$ (to je tzv. *Martinova hranice*) a pro každé $x \in U$ existuje $\lim_{y\to z} K(x,y)$. Tuto limitu označíme $K_z(x)$; pro případ koule je U^* homeomorfní s $\overline{U}$ a $K_z = P_z$, $z \in \partial U$.

Obecně však není pravda, že funkce K_z je minimální pro každé z. Body $z \in U^*$, pro které to platí, se nazývají *minimální body* Martinovy hranice. Označíme-li $\partial_1 U^*$ množinu všech takových bodů, poskytuje nám Choquetova teorie tuto větu:

Věta[41]**.** *Pro každou nezápornou funkci $h \in \mathcal{H}(U)$ existuje právě jedna míra μ na $\partial_1 U^*$ taková, že*

$$h(x) = \int_{\partial_1 U^*} K_z(x)\,\mathrm{d}\mu(z), \quad x \in U.$$

Podíl Greenových funkcí zde může působit poněkud mysticky a je užitečné poskytnout intuitivní vysvětlení. Jestliže je eukleidovská hranice oblasti dostatečně hladká a h je hladká funkce na uzávěru $\overline{U}$ a harmonická na U, pak se na základě Gaussovy-Greenovy formule dokáže vzorec

$$h(x) = \frac{1}{c_m}\int_{\partial U} \frac{\partial G(x,z)}{\partial n(z)} h(z)\,\mathrm{d}\sigma(z), \quad x \in U,$$

kde c_m je konstanta související s normováním singularity Greenovy funkce, σ povrchová míra na ∂U a $n(z)$ je vnitřní normála v bodě $z \in \partial U$. Pro jednotkovou kouli U je tedy $(1/c_m)\partial G(x,z)/\partial n(z)$ (normálová derivace Greenovy funkce) hodnota Poissonova jádra P_z v bodě x.

Zvolme nyní $z \in \partial U$, $x \in U$ a pro $y \in U$ označme $d(y)$ vzdálenost bodu y od ∂U. Potom se, zhruba řečeno, normálová derivace $\partial G(x,z)/\partial n(z)$ dostane jako $\lim_{y\to z} G(x,y)/d(y)$. Je známo, že pro množiny s hladkou hranicí je $G(x_0,y)$ pro body blízko hranice přibližně rovno $d(y)$, tedy

$$\lim_{y\to z} \frac{G(x,y)}{G(x_0,y)}$$

je přirozenou analogií normálové derivace. Důležité je, že podíl Greenových funkcí má smysl pro zcela obecné otevřené množiny U, zatímco pojem normálové derivace klade nároky na hladkost hranice množiny U.

V $\mathbb{R}^2$ existuje úzká spojitost s konformním zobrazením a Carathéodoryho teorií prvokonců. V prostorech $\mathbb{R}^m$ pro $m \geqq 3$ postrádáme analogii Riemannovy věty, ale jak jsme viděli, Choquetova teorie dává i v tomto případě integrální reprezentaci nezáporných funkcí z $\mathcal{H}(U)$. Je přirozené ptát se po případech, kdy $\partial_1 U^*$ má přirozený vztah k eukleidovské hranici ∂U, podobně jako tomu je u koule. Jinak řečeno, jde o vztah eukleidovské a Martinovy hranice množiny U. Je např. známo[42]), že pokud U má

[41]) Důkaz lze nalézt v [He] nebo [KNV]. Souvislost s Choquetovou teorií je naznačena v [Cho], 3. díl, s. 69–79.

[42]) Důkaz tvrzení pochází od R. R. Hunta a R. L. Wheedena [HuWh].

lipschitzovskou hranici, jsou obě — eukleidovská i Martinova — hranice homeomorfní a každému $z \in \partial U$ odpovídá právě jedna minimální funkce K_z.

Popsaná reprezentace není samoúčelná, může být klíčem k velmi hlubokým výsledkům. Její použití k problematice tzv. „jednoprůměrových vět“ sahá do sedmdesátých let. Tyto věty si na příkladu zhruba přiblížíme.

Z věty z odst. 4.1 víme, že harmonické funkce lze charakterizovat pomocí objemového průměru. Podobně je-li $f\colon U \to \mathbb{R}$ spojitá funkce, je $f \in \mathcal{H}(U)$, právě když platí rovnost $f(x) = \int_{\partial B(x,r)} f \,\mathrm{d}\sigma_{x,r}$, kdykoli uzávěr koule $B(x,r)$ je obsažen v U. Zde $\sigma_{x,r}$ je normalizovaná povrchová míra na $\partial B(x,r)$.

Dlouho neřešený problém spočíval v tom, za jakých podmínek stačí vlastnost průměru ověřit v každém bodě $x \in U$ pro *jedinou* kouli či sféru o poloměru $r(x)$. Částečné řešení bylo nalezeno pravděpodobnostními metodami, analytické řešení využívá Choquetovu teorii, totiž srovnání extremálních bodů normalizovaných systémů funkcí, jednak harmonických, jednak spojitých s „jednoprůměrovou“ vlastností. Lze tak dokázat následující tvrzení[43]).

Věta. *Nechť $h \in \mathcal{H}(U)$, f je měřitelná, $0 \leqq f \leqq h$, nechť f má v každém bodě $x \in U$ vlastnost objemového průměru pro kouli s poloměrem $r(x)$ a nechť pro každou kompaktní množinu $K \subset U$ existuje $m_K > 0$ tak, že $r(x) \geqq m_K$ pro každé $x \in K$. Potom $f \in \mathcal{H}(U)$.*

Pokud se navíc předpokládá, že f je zdola polospojitá na U, platí tvrzení věty bez dalších omezení na $r(x)$. Bylo též dokázáno, že podmínka majorizace harmonickou funkcí h je podstatná a že bez ní věta neplatí.[44])

Obdobný problém pro sférické průměry (a spojité omezené funkce) na jednotkovém kruhu v $\mathbb{R}^2$ odolával řadu let. Výsledek, že sférická jednoprůměrová vlastnost v tomto případě necharakterizuje harmonické funkce, představuje řešení mimořádně obtížného problému[45]).

L i t e r a t u r a

Omezení na rozsah článku neumožňuje zařadit obsáhlý seznam literatury a podrobnější popis cest, které vedly k prezentovaným výsledkům. V uváděných odkazech se však najdou další bibliografické údaje. Následující prameny obsahují podrobnější výklad odpovídajících partií z funkcionální analýzy, míry a integrálu a teorie potenciálu: [Al], [Cho], [Ph], [LM], [KNV] a [LMZ].

[43]) Věta pochází od W. Hansena a N. Nadirashviliho [HaNa2].

[44]) Příbuzný výsledek prezentoval jako domněnku W. Veech; viz [Ve]. Ve formě zdánlivě jednoduchého problému pro spojité omezené funkce na jednotkovém kruhu (v $\mathbb{R}^2$) a objemové a sférické průměry formuloval analogický problém Littlewood v r. 1968. Negativní řešení pro sférický průměr bylo sice očekáváno, ale ukázalo se, že jde o velice obtížný problém. Viz [HaNa1], [HaNa2], resp. další články stejných autorů.

[45]) Viz [HaNa1]. O krocích, které předcházely řešení tohoto problému, a o problematice související s vlastností průměru se lze dočíst v [NeVe2].

[Al] Alfsen, E. M.: *Compact convex sets and boundary integrals.* Springer-Verlag, Berlin 1971 (**MR** 56 #3615).

[Ar] Armitage, D. A.: *The Riesz-Herglotz representation for positive harmonic functions via Choquet's theorem.* In: Potential Theory — ICPT 94, de Gruyter, Berlin 1996, 229–232 (**MR** 97f:31006).

[Ba1] Bauer, H.: *Aproximace a abstraktní hranice.* Pokroky mat. fyz. astronom. *26* (1981), 305–326 (**MR** 83d:41028).

[Ba2] Bauer, H.: *Simplicial function spaces and simplexes.* Expo. Math. *3* (1985), 165–168 (**MR** 87c:46009).

[Be] Bernstein, S.: *Sur les fonctions absolument monotones.* Acta Math. *51* (1928), 1–66.

[BlHa1] Bliedtner, J., Hansen, W.: *Simplicial cones in potential theory.* Inventiones Math. *29* (1975), 83–110 (**MR** 52 #8470).

[BlHa2] Bliedtner, J., Hansen, W.: *The weak Dirichlet problem.* J. Reine Angew. Math. *348* (1984), 34–39 (**MR** 85h:31012).

[BlHa3] Bliedtner, J., Hansen, W.: *Potential theory — An analytic and probabilistic approach to balayage.* Springer-Verlag, Berlin 1986 (**MR** 88b:31002).

[Bo] Bochner, S.: *Harmonic analysis and the theory of probability.* University of California Press, Berkeley and Los Angeles 1955 (**MR** 17 #273d).

[CaLi] Caffarelli, L. A., Littman, W.: *Representation formulas for solutions to $\Delta u - u = 0$ in $\mathbb{R}^n$.* In: Studies in partial differential equations. MAA Stud. Math. 23, Math. Assoc. America, Washington, D. C. 1982, 249–263 (**MR** 84k:35045).

[Ed] Edgar, G. A.: *Two integral representations.* In: Measure theory and its applications (Sherbrooke, Que., 1982). Lecture Notes in Math. 1033, Springer-Verlag 1983, 193–198 (**MR** 85g:30034).

[EfKa] Effros, E. G., Kazdan, J. L.: *Applications of Choquet simplexes to elliptic and parabolic boundary value problems.* J. Diff. Eq. *8* (1970), 95–134 (**MR** 41 #4215).

[FoLiPh] Fonf, V. P., Lindenstrauss, J., Phelps, R. R.: *Infinite dimensional convexity.* Preprint (1999).

[Ha] Hansen, W.: *A Liouville property for spherical averages in the plane.* Preprint (1999).

[HaNa1] Hansen, W., Nadirashvili, N.: *Littlewood's one circle problem.* J. London Math. Soc. (2) *50* (1994), 349–360 (**MR** 95j:31002).

[HaNa2] Hansen, W., Nadirashvili, N.: *On Veech's conjecture for harmonic functions.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl.-Sci. (4), *22* (1995), 137–153 (**MR** 96c:31004).

[He] Helms, L. L.: *Introduction to potential theory.* Pure and Applied Mathematics, Vol. XXII, Wiley-Interscience, New York – London – Sydney 1969 (**MR** 41 #5638).

[Ho] Holland, F.: *The extreme points of a class of functions with positive real part.* Math. Ann. *202* (1973), 85–87 (**MR** 49 #562).

[HuWh] Hunt, R. R., Wheeden, R. L.: *Positive harmonic functions on Lipschitz domains.* Trans. Amer. Math. Soc. *147* (1970), 505–527 (**MR** 43 #547).

[Cho] Choquet, G.: *Lectures on analysis I–III.* W. A. Benjamin, Inc., New York– –Amsterdam 1969 (**MR** 40 #3254).

[Cho1] Choquet, G.: *Deux exemples classiques de représentation intégrale.* Enseignement Math.(2) *15* (1969), 63–75 (**MR** 40 #6224).

[Ja] Jacobs, K.: *Extremalpunkte konvexer Mengen.* In: Selecta Mathematica, III. Selecta Math., Heidelberger Taschenbücher *86* (1971), 90–118 (**MR** 58 #30754).

[Ke1] Keldyš, M. V.: *On the solubility and stability of the Dirichlet problem* (rusky). Uspechi Mat. Nauk. *8* (1941), 171–292 (**MR** 3 #123f).

[Ke2] Keldyš, M. V.: *On the Dirichlet problem* (rusky). Dokl. Akad. Nauk SSSR *32* (1941), 308–309 (**MR** 6 #64a).

[Kl] KLEE, V.: *Some new results on smoothness and rotundity in normed linear spaces.* Math. Ann. *139* (1959), 51–63 (**MR** 22 #5879).

[Ko] KORÁNYI, A.: *A survey of harmonic functions on symmetric spaces.* In: Harmonic analysis in Euclidean spaces (Proc. Sympos. Pure Math., Williams Coll., Williamstown, Mass., 1978), Part 1. Amer. Math. Soc., Providence, R. I. 1979, 323–344 (**MR** 80k:43012).

[KNV] KRÁL, J., NETUKA, I., VESELÝ, J.: *Teorie potenciálu IV.* SPN, Praha 1977.

[Kr] KRUŽÍK, M.: *Bauer's maximum principle and hulls of sets.* Preprint (2000).

[Li] LINDENSTRAUSS, J.: *Some useful facts about Banach spaces.* In: Geometric aspects of functional analysis, Lecture Notes in Math. 1317, Springer-Verlag, Berlin 1988, 185–200 (**MR** 89g:46015).

[LM] LUKEŠ, J., MALÝ, J.: *Measure and integral.* Matfyzpress, Praha 1995.

[LMZ] LUKEŠ, J., MALÝ, J., ZAJÍČEK, L.: *Fine topology methods in real analysis and potential theory.* Lecture Notes in Math. 1189, Springer-Verlag, Berlin – New York 1986 (**MR** 89b:31001).

[Ma] MARTIN, R. S..: *Minimal positive harmonic functions.* Trans. Amer. Math. Soc. *49* (1941), 137–172 (**MR** 2 #292h).

[Ne] NETUKA, I.: *The Dirichlet problem for harmonic functions.* Amer. Math. Monthly *87* (1980), 621–628 (**MR** 82c:31005).

[NeVe1] NETUKA, I., VESELÝ, J.: *Dirichletova úloha a Keldyšova věta.* Pokroky mat. fyz. astronom. *24* (1979), 77–88 (**MR** 82f:01126).

[NeVe2] NETUKA, I., VESELÝ, J.: *Mean value property and harmonic functions.* In: Classical and modern potential theory and applications (Chateau de Bonas, 1993). Kluwer Acad. Publ., Dordrecht 1994, 359–398 (**MR** 96c:31001).

[Ph] PHELPS, R. R.: *Lectures on Choquet's theorem.* D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N. J. – Toronto, Ont. – London 1966 (**MR** 33 #1690).

[Pr] PRICE, G. B.: *On the extreme points of convex sets.* Duke Math. J. *3* (1937), 56–67.

[Ra] RAKESTRAW, R. M.: *A representation theorem for real convex functions.* Pac. J. Math. *60* (1975), 165–168 (**MR** 52 #14193).

[Rob] ROBERTSON, M. S.: *On the coefficients of a typically-real functionas.* Bul. Amer. Math. Soc. *41* (1935), 565–572.

[Rou] ROUBÍČEK, T.: *Relaxation in optimization theory and variational calculus.* de Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications 4, de Gruyter, Berlin – New York 1997 (**MR** 98e:49002).

[Ve] VEECH, W. A.: *A converse to the mean value theorem for harmonic functions.* Amer. J. Math. *97* (1975), 1007–1027 (**MR** 52 #14330).