Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Pavel Trojovský; Jiří Veselý

Vytvořující funkce

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 45 (2000), No. 1, 7--35

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/141017`

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2000

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://project.dml.cz`

Vytvořující funkce

Pavel Trojovský a Jiří Veselý

1. Trocha historie

Loni uplynulo právě 200 let od zveřejnění prvního Gaussova důkazu tzv. *základní věty algebry.* Ten výrazně přispěl k posílení do té doby diskutované pozice komplexních čísel v matematice. Carl Friedrich Gauss (1777–1855) pak publikoval ještě několik dalších důkazů tohoto důležitého tvrzení, avšak ještě v „předgaussovském“ období došlo k závažným objevům některých metod teorie funkcí komplexní proměnné, které se v ní i mimo ni efektivně užívají dodnes. V tomto textu chceme na příkladu *metody vytvořujících funkcí* a věcí s ní souvisejících ukázat zajímavé aspekty tohoto historického vývoje, který s trochou nadsázky ukazuje cestu od bernoulliovských a eulerovských „her s mocninnými řadami“ k hlubokým výsledkům sahajícím daleko za rámec disciplíny původního vzniku.

Patrně první známou ukázkou použití metody vytvořujících funkcí je způsob, kterým Abraham De Moivre (1667–1754) v r. 1718 odvodil vzorec pro n-tý člen Fibonacciovy posloupnosti; viz [11]. Ten je dnes připisován Jacquesovi Philippu Maria Binetovi (1786–1856), který ho znovu objevil v 19. století. Úvahu provedeme na ukázku podrobněji.

Připomeňme, že Fibonacciova posloupnost $\{F_n\}_{n=0}^{\infty} = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, \ldots\}$ souvisí s růstem králičí populace. R. 1202 totiž Fibonacci, známý též jako Leonardo z Pisy (1180–1240), vydal knihu *Liber Abaci*, ve které řešil následující problém: *Jestliže k 1. 1. kalendářního roku máme párek králíků, kolik párů budeme mít po 12 měsících, jestliže každý pár dává po měsíci nový pár králíků, žádní neumírají a čerstvě zrozený pár dává první párek po dvou měsících.* Při řešení užíváme zmíněnou posloupnost, která je rekurentně popsána vztahem

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \tag{1}$$

platným pro všechna $n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$, a podmínkou $F_0 = 0$, $F_1 = 1$; členy této posloupnosti jsou obvykle nazývány *Fibonacciova čísla.* Snadno zjistíme, že po 12 měsících máme kromě původního páru ještě dalších 376 párů králíků.

PaedDr. Pavel Trojovský (1966), katedra matematiky PdF, VŠP Hradec Králové, Víta Nejedlého 573, 500 03 Hradec Králové 3, e-mail: `pavel.trojovsky@vsp.cz`

Doc. RNDr. Jiří Veselý, CSc. (1940), Matematický ústav UK, MFF UK, Sokolovská 83, 186 75 Praha 8, e-mail: `jvesely@karlin.mff.cuni.cz`

Tento článek vznikl za podpory Grantové agentury UK (GAUK 165/1999) a Interního grantového systému PdF VŠP v Hradci Králové (IG 99/6).

Číslo $\alpha = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ se v umění a architektuře užívá pro označení poměru stran „nejestetičtějšího“ obdélníku a bývá nazýváno *konstanta zlatého řezu*; srv. [42]. Položíme-li $\beta = 1 - \alpha = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$, snadno ověříme, že platí vztahy

$$\alpha - \beta = \sqrt{5}, \quad \alpha + \beta = 1, \quad \alpha\beta = -1, \quad |\beta/\alpha| < 1. \tag{2}$$

Vytvořující funkcí pro posloupnost $\{F_n\}$ je funkce

$$\mathcal{F}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n.$$

Jak se dále ukáže, řada vpravo konverguje pro všechna $z \in \mathbb{C}$, pro která platí $|z| < 1/\alpha$. Jednoduchými úpravami lze snadno obdržet vztah:

$$\mathcal{F}(z) - z\mathcal{F}(z) - z^2\mathcal{F}(z) = F_0 + (F_1 - F_0)z + \sum_{n=0}^{\infty}(F_{n+2} - F_{n+1} - F_n)z^{n+2}.$$

Z něj dostáváme $\mathcal{F}(z)(1 - z - z^2) = z$, protože koeficienty u z^{n+2} jsou podle (1) pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ rovny nule. Platí tedy pro $|z| < 1/\alpha$

$$\mathcal{F}(z) = \frac{z}{1 - z - z^2} = \frac{A}{1 - \alpha z} + \frac{B}{1 - \beta z}, \tag{3}$$

kde s ohledem na (2) je

$$A = \frac{1}{\alpha - \beta} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \qquad B = \frac{-1}{\alpha - \beta} = \frac{-1}{\sqrt{5}}.$$

Odtud dostaneme

$$\mathcal{F}(z) = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1}{1 - \alpha z} - \frac{1}{1 - \beta z}\Big),$$

což užitím vzorce pro součet geometrické řady upravíme na tvar

$$\mathcal{F}(z) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n z^n - \sum_{n=0}^{\infty}\beta^n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}\Big) z^n.$$

Ze základních znalostí o geometrické řadě vyplývá, že rovnost platí právě pro všechna $z \in \mathbb{C}$, pro něž $|z| < 1/\alpha$, protože $1/\alpha < 1/\beta$. Z jednoznačnosti rozvoje v mocninnou řadu dostaneme Binetův vzorec

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Popsaný výsledek nebyl jediným příspěvkem de Moivreovým k vývoji teorie pravděpodobnosti, v níž hlavní objekt našeho zájmu — vytvořující funkce — hrají prominentní roli; srv. [27]. Poznamenejme ještě, že např. v [8] je řešena úloha, *kolika způsoby $p(n)$ lze vyjít schodiště o n schodech, vynecháváme-li při každém kroku nejvýše jeden schod.*

Ukáže se, že platí $p(n) = F_n$. Fibonacciho posloupnost se vyskytuje v mnoha dalších úlohách.

2. Základní typy vytvořujících funkcí

Vytvořující funkce. Je-li $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ posloupnost reálných nebo komplexních čísel, nazývá se funkce

$$\mathcal{A}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{4}$$

její *vytvořující funkcí.* Někdy se nám hodí ještě širší chápání definovaného pojmu: vytvořující funkci posloupnosti $\{a_n\}$ chápeme jako mocninnou řadu na pravé straně rovnosti (4).

Standardní operace s mocninnými řadami dávají základní arzenál pro manipulace s vytvořujícími funkcemi; patří k nim např. „posun indexu“ násobením funkce vhodnou mocninou z^m, derivování a integrace člen po členu apod. Všimněme si blíže operace násobení vytvořujících funkcí, která úzce souvisí se součinem řad. Jsou-li $\mathcal{F}(z)$ a $\mathcal{G}(z)$ vytvořující funkce posloupností $\{f_n\}$ a $\{g_n\}$, pak $\mathcal{F}(z)\mathcal{G}(z) = \mathcal{H}(z)$ je vytvořující funkce posloupnosti $\{h_n\}$, která se nazývá *konvoluce* posloupností $\{f_n\}$ a $\{g_n\}$:

$$\mathcal{H}(z) = \mathcal{F}(z)\mathcal{G}(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} f_k g_{n-k}\right) z^n.$$

Platí tedy vzorec

$$h_n = \sum_{k=0}^{n} f_k g_{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Pro číselné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} g_n$ zavedl Louis Augustin Cauchy (1789–1857) jejich (nyní tzv. Cauchyho) součin, což je právě řada $\sum\limits_{n=0}^{\infty} h_n$. Pomocí elementárních operací s mocninnými řadami není obtížné např. spočítat, že pro členy konvoluce Fibonacciovy posloupnosti $\{F_n\}$ s $\{F_n\}$ platí vzorec

$$\sum_{k=0}^{n} F_k F_{n-k} = \tfrac{1}{5}\big((n+1)L_n - 2F_{n+1}\big),$$

kde L_n jsou tzv. *Lucasova čísla.* Ta splňují stejnou základní rekurenci (1) jako čísla Fibonacciova, avšak $L_0 = 2$ a $L_1 = 1$. Zavedl je François Edouard Anatole Lucas (1842–1891) a pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ platí $L_n = \alpha^n + \beta^n$.

Vytvořující funkce mohou být užitečné také k hledání kombinatorických identit. Odvodíme tzv. *Vandermondovu konvoluci*, pojmenovanou po Alexandru Théophilu Vandermondovi (1735–1796). Ten o ní v r. 1771 publikoval článek [41], byla však známa již Chu Shih-Chiehovi před rokem 1303. Uvažujme pro $r, s \in \mathbb{R}$ konvoluci posloupnosti $\{\binom{r}{i}\}_{i=0}^{\infty}$ s $\{\binom{s}{j}\}_{j=0}^{\infty}$. Vytvořující funkce těchto posloupností jsou funkce $(1+z)^r$ a $(1+z)^s$, neboť jde o binomické řady

$$(1+z)^r = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{r}{i} z^i, \qquad (1+z)^s = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{s}{j} z^j.$$

Pak vzhledem k rovnosti $(1+z)^r(1+z)^s = (1+z)^{r+s}$ s využitím vztahu pro konvoluci dostaneme porovnáním koeficientů u z^n

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k} \binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}.$$

Další příklady různorodého využití vytvořujících funkcí v kombinatorice nalezne čtenář např. v [8], kap. 6, v [22], kap. 2, a v [24], kap. 5.

Jak jsme naznačili v historickém úvodu, jsou vytvořující funkce také užitečné pro odvozování vzorců pro n-tý člen posloupností reálných nebo komplexních čísel, které jsou určeny rekurentně. Popišme obecnější případ: Nechť n je přirozené číslo a posloupnost $\{a_k\}$ je popsána rekurencí

$$a_k = c_1 a_{k-1} + \cdots + c_n a_{k-n}, \quad k \geqq n, \tag{5}$$

kde $c_1, \ldots, c_n$ je n daných čísel. Předepíšeme-li ještě hodnoty prvních n členů posloupnosti $a_0, \ldots, a_{n-1}$, je jimi a rekurencí (5) posloupnost $\{a_k\}$ jednoznačně určena. Budeme-li členy a_k hledat ve tvaru z^k, $k = 0, 1, \ldots$, pak budou členy posloupnosti $\{a_k\}$ splňovat rekurenci (5), právě když bude platit

$$z^k = c_1 z^{k-1} + \cdots + c_n z^{k-n}$$

pro všechna $k \geqq n$, tedy bude-li z vyhovovat algebraické rovnici

$$z^n - c_1 z^{n-1} - \cdots - c_{n-1} z - c_n = 0. \tag{6}$$

Na levé straně (6) je tzv. *charakteristický polynom.* Je-li λ kořenem tohoto polynomu, pak $\{a_k\} = \{\lambda^k\}$ je posloupnost vyhovující rekurenci (5). Má-li charakteristický polynom n různých kořenů $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, lze dokonce snadno popsat *každou* posloupnost $\{a_k\}$ vyhovující rekurenci (5), a tedy i tu, která je (jednoznačně) určena předepsáním počátečních hodnot $a_0, \ldots, a_{n-1}$.

Není bez zajímavosti, že pro práci s vytvořujícími funkcemi je (absolutní) konvergence řady v (4) nepodstatná. Pěknou ukázku užití takové vytvořující funkce lze nalézt např. v [17], str. 346–348. Tento fakt, kromě jiného, vedl i k „zformalizovanému algebraickému“ pohledu na mocninnou řadu objevující se ve vztahu (4). Vznikla tak teorie tzv. *formálních mocninných řad.* Úvod do této problematiky je podrobně zpracován v [29]; viz též [35]. V některých případech je výhodné pracovat s vytvořujícími funkcemi jiného typu. Uvedeme několik příkladů.

Exponenciální vytvořující funkce. Někdy má posloupnost $\{a_n\}$ komplikovanou vytvořující funkci, zatímco vytvořující funkce posloupnosti $\{a_n/n!\}$ je podstatně jednodušší. Pak je výhodné užít posloupnost $\{a_n/n!\}$ a teprve na závěr vynásobit její n-tý člen činitelem $n!$. Tento trik se často užívá, proto se zavádí speciální typ vytvořující funkce

$$^{E}\mathcal{A}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n!}\,;$$

nazýváme ji *exponenciální vytvořující funkce* posloupnosti $\{a_n\}$. Zajímavou operací je opět součin dvou exponenciálních vytvořujících funkcí. Jsou-li $^{E}\mathcal{F}(z)$ a $^{E}\mathcal{G}(z)$ exponenciální vytvořující funkce posloupností $\{f_n\}$ a $\{g_n\}$, pak funkce $^{E}\mathcal{H}(z) = {}^{E}\mathcal{F}(z){}^{E}\mathcal{G}(z)$ je exponenciální vytvořující funkce posloupnosti $\{h_n\}$, která se nazývá *binomická konvoluce* posloupností $\{f_n\}$ a $\{g_n\}$:

$$h_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f_k g_{n-k},$$

neboť pro konvoluci posloupností $\{f_n/n!\}$ a $\{g_n/n!\}$ platí

$$\frac{h_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f_k}{k!} \frac{g_{n-k}}{(n-k)!}\,.$$

Ukažme si další použití vytvořujících funkcí na problému, kterým se zabýval již Jacob Bernoulli (1654–1705). Patřil k prvním budovatelům teorie pravděpodobnosti. V práci [5], kterou vydal po jeho smrti r. 1713 jeho synovec Mikuláš I. Bernoulli (1687–1759), se též zabýval problémem, jak určit součet

$$S_m(n) = 0^m + 1^m + 2^m + \cdots + (n-1)^m = \sum_{k=0}^{n-1} k^m.$$

Hledal přitom polynomy $b_m(x)$, pro které platí

$$1^m + 2^m + 3^m + \cdots + (n-1)^m = \int_0^n b_m(x)\,\mathrm{d}x.$$

Každý takový polynom musí vyhovovat rovnici

$$\int_n^{n+1} b_m(x)\,\mathrm{d}x = n^m. \tag{7}$$

Ukazuje se, že pro každé $m \in \mathbb{N}$ existuje právě jeden normalizovaný polynom b_m stupně m, tj. s koeficientem u x^m rovným 1, pro který platí (7) pro každé $n \in \mathbb{R}$, tedy nejen pro $n \in \mathbb{N}$. Označíme-li, jak je zvykem, $b_m(0) = B_m$, $m \in \mathbb{N}$, pak dostaneme tzv. *Bernoulliova čísla* B_m. Hodnoty několika prvních Bernoulliových čísel jsou uvedeny v tabulce 1.

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$
B_m	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{32}$	0	$-\frac{1}{30}$	$\cdots$

TAB. 1. Bernoulliova čísla pro $m = 0, \ldots, 8$.

Snadno nahlédneme, že platí $b_1(x) = x - \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}(x^2 - x)\right)'$; obecně derivováním (7) dostaneme

$$b_m(n+1) - b_m(n) = mn^{m-1}.$$

Odtud vyplývá

$$\begin{aligned} &m\left(0^{m-1} + 1^{m-1} + \cdots + (n-1)^{m-1}\right) = \\ &\quad = \left(b_m(1) - b_m(0)\right) + \cdots + \left(b_m(n) - b_m(n-1)\right) = b_m(n) - b_m(0) = b_m(n) - B_m, \end{aligned}$$

a tedy

$$\frac{b_m(n) - B_m}{m} = 1^{m-1} + 2^{m-1} + \cdots + (n-1)^{m-1} = \int_0^n b_{m-1}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Tak dospíváme k rekurentní formuli

$$b_m(x) = m \int_0^x b_{m-1}(t)\,\mathrm{d}t + B_m. \tag{8}$$

Vidíme, že problém určení Bernoulliových polynomů se redukuje na problém určení Bernoulliových čísel. Z (8) lze odvodit

$$b_m(x) = x^m + mB_1x^{m-1} + \cdots + mB_{m-1}x + B_m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} B_k x^{m-k}.$$

Bernoulliova čísla lze definovat pomocí rekurence

$$B_0 = 1, \quad \sum_{j=0}^{m} \binom{m+1}{j} B_j = 0, \quad m \geqq 1,$$

kterou lze přepsat takto

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} B_k = B_m, \quad m \geqq 2.$$

Pro exponenciální konvoluci posloupnosti $\{B_m\}$ s posloupností $\{1\}$ „samých jedniček“ platí

$$\begin{aligned} {}^E\mathcal{B}(z) \cdot \mathrm{e}^z &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} B_k \right) \frac{z^m}{m!} = \\ &= 0 + \left(\binom{1}{0} B_0 + \binom{1}{1} B_1 \right) z + \sum_{m=2}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} B_k \right) \frac{z^m}{m!} = \\ &= \frac{1}{2}\, z + \sum_{m=2}^{\infty} B_m \frac{z^m}{m!} = z + \sum_{m=0}^{\infty} B_m \frac{z^m}{m!} = z + {}^E\mathcal{B}(z). \end{aligned}$$

Odtud tedy dostaneme

$$^{E}\mathcal{B}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} B_m \frac{z^m}{m!} = \frac{z}{\mathrm{e}^z - 1}\,.$$

Velmi často se Bernoulliova čísla pomocí poslední rovnosti *definují.* Získanou $^{E}\mathcal{B}(z)$ nyní užijeme k vyjádření vztahu pro $S_m(n)$. Uvažujme exponenciální vytvořující funkci posloupnosti $\{S_m(n)\}_{m=0}^{\infty}$:

$$\begin{aligned}^{E}\mathcal{S}(z,n) &= \sum_{m=0}^{\infty} S_m(n)\frac{z^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1} k^m\right)\frac{z^m}{m!} = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(kz)^m}{m!} = \sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{kz} = \frac{\mathrm{e}^{nz}-1}{\mathrm{e}^z-1}.\end{aligned}$$

Lze ji tedy psát ve tvaru

$$^{E}\mathcal{S}(z,n) = \frac{z}{\mathrm{e}^z-1}\frac{\mathrm{e}^{nz}-1}{z} = {}^{E}\mathcal{B}(z)\frac{\mathrm{e}^{nz}-1}{z}\,,$$

kde $(\mathrm{e}^{nz}-1)/z$ je exponenciální vytvořující funkce posloupnosti $\{n^m/(m+1)\}_{m=0}^{\infty}$. Označme tuto funkci $^{E}\mathcal{M}(z,n)$. Platí tedy

$$^{E}\mathcal{S}(z,n) = {}^{E}\mathcal{B}(z)\,{}^{E}\mathcal{M}(z,n),$$

a proto posloupnost $\{S_m(n)\}$ vzniká exponenciální konvolucí posloupnosti $\{B_m\}_{m=0}^{\infty}$ s posloupností $\{n^m/(m+1)\}_{m=0}^{\infty}$. Platí

$$S_m(n) = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}B_k\frac{n^{m+1-k}}{m+1-k} = \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k}B_k n^{m+1-k}.$$

Bernoulliova čísla se vyskytují např. v Taylorově rozvoji funkcí tg a cotg o středu 0 a také v tzv. Eulerově-MacLaurinově formuli.

Dirichletova vytvořující funkce. Ukázali jsme si cestu, která prostřednictvím vytvořujících funkcí vede k určení Bernoulliových čísel a následně i součtů m-tých mocnin prvních n přirozených čísel. Neméně zajímavý starý problém spočívá v určení (nekonečných) součtů jejich převrácených hodnot, tj. řad tvaru $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n^m$. Budeme postupovat trochu obecněji.

Dirichletovou vytvořující funkcí posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ rozumíme funkci

$$^{D}\mathcal{A}(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^z}\,.$$

Z integrálního kritéria vyplývá, že např. pro každou omezenou posloupnost $\{a_n\}$ reálných či komplexních čísel řada vpravo konverguje pro všechna $z > 1$, resp. pro

$\operatorname{Re} z > 1$. Tyto vytvořující funkce jsou již složitější, avšak jsou opět velmi užitečné. Zavedl je a používal JOHANN PETER GUSTAV LEJEUNE DIRICHLET (1805–1859). Je zřejmé, že Dirichletovou vytvořující funkcí konstantní posloupnosti $\{1\}$ je tzv. *Riemannova zeta funkce*

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}, \tag{9}$$

která je takto nazývána na počest GEORGA FRIEDRICHA BERNHARDA RIEMANNA (1826–1866). S problémem, jak určit hodnotu $\zeta(2)$, se seznámil GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646–1716) při svém pobytu v Londýně r. 1673. Nedokázal ho vyřešit a stejně tak na něj nestačili ani JOHANN BERNOULLI (1667–1748) a jeho bratr Jacob. Teprve r. 1734 Johannův žák LEONHARD EULER (1707–1783) nalezl $\zeta(2)$ pomocí vyjádření funkce sinus nekonečným součinem[1]) a určil i hodnoty $\zeta(2m)$ pro $m \in \mathbb{N}$. Explicitně uvedl vzorce

$$\zeta(2) = \frac{2^0}{3!}\,\frac{1}{1}\,\pi^2, \quad \zeta(4) = \frac{2^2}{5!}\,\frac{1}{3}\,\pi^4, \quad \ldots, \quad \zeta(26) = \frac{2^{24}}{27!}\,\frac{76977927}{1}\,\pi^{26}.$$

Posléze pak v r. 1740 dokázal v [14], že pro každé $m \in \mathbb{N}$ platí

$$\zeta(2m) = (-1)^{m-1}\frac{(2\pi)^{2m}}{2\,(2m)!}\,B_{2m}. \tag{10}$$

Poznamenejme při této příležitosti, že výsledek je úzce svázán s funkcí $\pi \operatorname{cotg}(\pi z)$, kterou se Euler zabýval v [13]. Ta se nezřídka objevuje v různých aplikacích pod označením $\varepsilon(z)$ nebo $\varepsilon_1(z)$; viz např. [35]. Intenzivně ji později studoval též FERDINAND GOTTHOLD MAX EISENSTEIN (1823–1852); viz [12]. Platí následující rovnost

$$\varepsilon_1(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z+m} = z^{-1} - \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1}\frac{2^{2m}}{(2m)!} B_{2m}\pi^{2m} z^{2m-1},$$

takže koeficient v řadě u z^{2m-1} je roven $-2\zeta(2m)$. Odtud lze dostat vzorec (10).

Je vhodné si opět povšimnout součinu dvou Dirichletových vytvořujících funkcí ${}^D\mathcal{F}(z)$ a ${}^D\mathcal{G}(z)$ posloupností $\{f_n\}$ a $\{g_n\}$. Ten vede k *Dirichletově konvoluci* posloupností $\{f_n\}$ a $\{g_n\}$. Pokud ${}^D\mathcal{H}(z) = {}^D\mathcal{F}(z)\,{}^D\mathcal{G}(z)$ je Dirichletova vytvořující funkce posloupnosti $\{h_n\}$, pak platí

$${}^D\mathcal{F}(z)\,{}^D\mathcal{G}(z) = \sum_{l=1}^{\infty}\frac{f_l}{l^z}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{g_m}{m^z} = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{f_l g_m}{(l\,m)^z} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}\Bigg(\sum_{d|n} f_d g_{n/d}\Bigg),$$

kde symbol v závorce označuje součet přes všechna taková $d \in \mathbb{N}$, pro něž je rovněž $n/d \in \mathbb{N}$. Je tedy

$$h_n = \sum_{d|n} f_d g_{n/d}.$$

[1]) Výsledek sdělil dopisem ze 12. srpna 1736 DANIELU BERNOULLIMU (1700–1782), problematikou se však dále zabýval v několika pracích. Poznamenejme, že dříve určil $\zeta(2)$ s přesností na 6 desetinných míst (1731), pak na 20 (1733) a teprve r. 1734 přesně. Viz [13] a poznámky, kterými je opatřeno ruské vydání [13] z r. 1961.

K ilustraci použijeme posloupnost $\{\mu(n)\}_{n=1}^{\infty}$, která je pojmenována po AUGUSTU FERDINANDU MÖBIOVI (1790–1868). Je definována následovně: $\mu(1) = 1$ a pro $n > 1$ klademe $\mu(n) = 0$, je-li n dělitelné druhou mocninou nějakého prvočísla, a $\mu(n) = (-1)^l$, je-li n součinem l různých prvočísel $p_1, p_2, \ldots, p_l$. Snadno nahlédneme, že pak pro všechna $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ platí $\sum_{d|n} \mu(d) = 0$; stačí si uvědomit, že v pozadí je binomická věta pro $(1-1)^l$. Dirichletova vytvořující funkce Möbiovy posloupnosti má tak překvapivě jednoduchý vztah k ζ-funkci. Platí

$$ {}^{D}\mathcal{M}(z) = \frac{1}{\zeta(z)}\,, $$

protože pomocí Dirichletovy konvoluce $\{\mu(n)\}$ s konstantní posloupností $\{1\}$ dostaneme

$$ {}^{D}\mathcal{M}(z)\,\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} \Big(\sum_{d|n} \mu(d) \cdot 1 \Big) = \frac{1}{1^z} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^z} \Big(\sum_{d|n} \mu(d) \Big) = 1. $$

Výhodnost Dirichletovy vytvořující funkce se projeví v případě, že posloupnost $\{a_n\}$ je *multiplikativní funkcí*, tedy když $a_1 = 1$ a pro každá dvě nesoudělná přirozená čísla m, n platí $a_{n \cdot m} = a_n \cdot a_m$. Pak lze a_n pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ vyjádřit pomocí členů a_{p^k}, kde p jsou prvočísla a $k \in \mathbb{N}$; Dirichletovu vytvořující funkci pro takovou posloupnost $\{a_n\}$ lze proto zapsat ve tvaru

$$ {}^{D}\mathcal{A}(z) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \Big(1 + \frac{a_p}{p^z} + \frac{a_{p^2}}{p^{2z}} + \frac{a_{p^3}}{p^{3z}} + \cdots \Big) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{p^k}}{p^{kz}} \Big), $$

kde $\mathbb{P}$ značí množinu všech prvočísel. Speciálně pro konstantní posloupnost $\{1\}$ dostaneme

$$ {}^{D}\mathcal{J}(z) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \Big(1 + \frac{1}{p^z} + \frac{1}{p^{2z}} + \frac{1}{p^{3z}} + \cdots \Big) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-z}}\,. \tag{11} $$

Srovnáním vztahů (9) a (11) obdržíme vztah

$$ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-z}}\,, $$

který opět nalezl (jen pro reálná z) již r. 1737 Euler. Použil ho např. k „důkazu“, že řada $\sum_{p \in \mathbb{P}} 1/p$ je divergentní, a to tak, že v něm položil (nekorektně) $z = 1$; tento důkaz lze „opravit“. Poznamenejme ještě, že Euler pro Möbiovu posloupnost $\{\mu(n)\}$ „dokázal“, že $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)/n = \prod_{p \in \mathbb{P}} (1 - 1/p) = 0$, v tomto případě však jeho důkaz již „opravit“ nelze, ač tvrzení platí.

3. Jak to vlastně funguje

Dříve než se pokusíme čtenáři přiblížit další Eulerovy výsledky, popíšeme alespoň částečně, jak Euler s řadami zacházel. Kromě vyjádření $\zeta(2)$, o němž od Eulerovy doby vyšly desítky článků a které patří k perlám klasické analýzy, nalezneme u něj i trochu podivné vzorce:

$$\tfrac{1}{4} = 1 - 2 + 3 - 4 + \cdots\,, \quad 0 = 1 - 3 + 5 - 7 + \cdots\,, \quad -1 = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots\,.$$

Euler totiž zacházel i s divergentními řadami. Pohyboval se geniálně v prostředí matematických experimentů, domněnek a důkazů tak, že pomocí nich nacházel zajímavé a cenné výsledky. Věděl, že „nešikovné zacházení“ s divergentními řadami vede k rozporům v matematice, přičítal je však spíše nedostatečnosti soudobého matematického aparátu. V r. 1745 to vyjádřil[2]) vírou v to, co bývá dnes označováno jako *Eulerův princip: Součet každé řady je hodnotou toho konečného výrazu, jehož rozvinutím příslušná řada vzniká.* Podrobněji viz např. [25] nebo [20][3]). Uvedené vztahy získal Euler tak, že vhodné funkce rozvinul v mocninné řady o středu $z_0 = 0$ a pak do nich dosadil body ležící mimo kruh konvergence těchto řad. Vývoj matematiky do jisté míry ospravedlnil jeho představy, avšak teprve za více než 40 let po Eulerově smrti objevil Niels Hendrik Abel (1802–1829) r. 1826 první výsledek o regularitě *sčítací metody*, která je dnes nazývána jeho jménem. V naší symbolice ukázal, že pokud řada $\sum a_n$ konverguje, pak pro vytvořující funkci posloupnosti $\{a_n\}$ platí

$$\lim_{x\to 1_+} \mathcal{A}(x) = \lim_{x\to 1_+} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n .$$

Abelovský zobecněný součet se potom definuje pomocí limity na levé straně první z rovností a lze jím opravdu sečíst i některé divergentní řady. Je např.

$$\frac{1}{2} = \lim_{x\to 1_+} \frac{1}{1+x} = \lim_{x\to 1_+} \sum (-1)^n x^n ,$$

ačkoli řada $\sum(-1)^n$ diverguje. Tak lze „sečíst“ geometrickou řadu i v některých bodech na hranici kruhu konvergence, avšak k jejímu „sečtení“ v dalších bodech komplexní roviny je třeba ještě účinnějších metod; viz [40].

Přibližme si nyní práci s vytvořujícími funkcemi také trochu jinak, bez matematického aparátu a v intuitivní rovině, jednou úlohou z oblasti rekreační matematiky, jejíž řešení podrobně popíšeme: *Určete, kolika způsoby T_n lze vytvořit obdélník „typu $2 \times n$“ z dominových kostek*[4]).

[2]) V dopise Christianu Goldbachovi (1690–1764) ze 7. srpna 1745.

[3]) Euler princip podrobněji popsal r. 1755. Z pozdějšího popisu plyne, že měl patrně na mysli rozvinutí v mocninnou řadu.

[4]) Zde samozřejmě předpokládáme, že dominová kostka je obdélník „typu 2×1“ a že dominové kostky jsou navzájem nerozlišitelné, tj. nemají např. žádné označení.

Pro obdélník 2×3 je $T_3 = 3$, neboť ho lze složit takto:

$$\Box\Box\Box \qquad \Box\boxminus \qquad \boxminus\Box$$

Zkusmo můžeme získat pro $n = 1, 2, 3, 4$ hodnoty T_n (klademe $T_0 = 1$)

n	0	1	2	3	4
T_n	1	1	2	3	5

Tab. 2. Počty způsobů vytvoření obdélníku $2 \times n$ pro $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

Způsob řešení pomocí vytvořující funkce je založen na následující myšlence. Vytvoříme „součet" všech možných složení obdélníku $2 \times n$ pro $n \geqq 0$ a označíme ho T:

$$T = | + \Box + \Box\Box + \boxminus + \Box\Box\Box + \Box\boxminus + \boxminus\Box + \cdots \;;$$

první člen vpravo „$|$" odpovídá obdélníku 2×0. Tento součet obsahuje mnoho informací. Místo důkazů individuálních vlastností „členů", např. pomocí matematické indukce, vede k důkazu vlastností T jako celku. Členy této řady jsou „složeniny", tedy zvláštní objekty kombinatorické povahy. Není třeba hloubat nad tím, co je vlastně správné, když sčítáme nekonečně mnoho „složenin"; vše lze provést matematicky zcela rigorózně.

V T sčítáme „složeniny", které můžeme i násobit na základě „nakreslení vedle sebe". Např. $\Box$ násobeno $\boxminus$ dává $\Box\boxminus$. Je zřejmé, že toto násobení není komutativní a „$|$" představuje jednotkový prvek.

Nyní užijeme tuto „dominovou aritmetiku" k manipulaci s nekonečnou řadou T:

$$\begin{aligned} T &= | + \Box + \Box\Box + \boxminus + \Box\Box\Box + \Box\boxminus + \boxminus\Box + \cdots = \\ &= | + \Box\,(| + \Box + \Box\Box + \boxminus + \cdots) + \boxminus\,(| + \Box + \Box\Box + \boxminus + \cdots) = \\ &= | + \Box\,T + \boxminus\,T. \end{aligned} \tag{12}$$

Každá „složenina" se objevuje na pravé straně právě jednou, tedy to, co jsme udělali, „funguje" i bez dalších podmínek typu konvergence řady. Z rovnice (12) vyjádříme T: nahrazením T dvojznakem $|T$ a odečtením posledních dvou členů od obou stran rovnosti (12) získáme

$$(| - \Box - \boxminus)\,T = | \,.$$

Doposud bylo jednoduché pracovat s rovnicí (12) v „kombinatorickém duchu". Nyní však k získání vzorce pro T provedeme „kombinatorické dělení". Násobení není komutativní, proto je nutné rozlišovat mezi dělením zprava a zleva, v našem případě to je však nepodstatné, protože „$|$" je komutativní s čímkoli. Proto po „dělení" výrazem $| - \Box - \boxminus$ dostaneme

$$T = \frac{|}{| - \Box - \boxminus}\,.$$

Budeme-li dále rozšiřovat naše počínání na základě inspirace, kterou nám poskytuje matematika, a „rozvineme“ tento zlomek v geometrickou řadu, obdržíme

$$\frac{\vert}{\vert - (\text{▯}+\text{⊟})} = \vert + (\text{▯}+\text{⊟}) + (\text{▯}+\text{⊟})^2 + \cdots =$$
$$= \vert + (\text{▯}+\text{⊟}) + (\text{▯▯}+\text{▯⊟}+\text{⊟▯}+\text{⊟⊟}) + \cdots .$$

Tak získáme opět T, ale s přerovnanými členy. Každá „složenina“ se zde proto objevuje právě jednou (např. ▯⊟⊟▯▯⊟▯ se vyskytuje jen v rozvoji $(\text{▯}+\text{⊟})^7$).

Užitečné informace můžeme z této nekonečné řady získat ignorováním jistých detailů, které nás nezajímají; můžeme tedy každý její člen zapsat ve zkrácené „komutativní“ verzi, např. ▯⊟⊟▯▯⊟▯ zapíšeme $\text{▯}^4\text{▭}^6$. Tedy

$$T = \vert + \text{▯} + \text{▯}^2 + \text{▭}^2 + \text{▯}^3 + 2\text{▯}\text{▭}^2 + \text{▯}^4 + 3\text{▯}^2\text{▭}^2 + \text{▭}^4 + \cdots . \tag{13}$$

Koeficienty v (13) nalezneme rozvinutím v geometrickou řadu a následným užitím binomické věty

$$\frac{\vert}{\vert - (\text{▯}+\text{▭}^2)} = \vert + (\text{▯}+\text{▭}^2) + (\text{▯}+\text{▭}^2)^2 + (\text{▯}+\text{▭}^2)^3 + \cdots =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} (\text{▯}+\text{▭}^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\text{▯}^j\text{▭}^{2(k-j)}\right) =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\binom{k}{j}\text{▯}^j\text{▭}^{2(k-j)}\right) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\binom{m+j}{j}\text{▯}^j\text{▭}^{2m} .$$

Zjistili jsme tedy, že počet způsobů pro vytvoření obdélníku $2 \times (j+2m)$, s j vertikálně položenými a $2m$ horizontálně položenými dominovými kostkami, je $\binom{m+j}{j}$.

Jestliže ignorujeme i orientaci dominových kostek, můžeme místo ▯ i ▭ psát z. Píšeme-li 1 místo „|“, pak získáme

$$T = \frac{1}{1-z-z^2} ,$$

což vzhledem k (3) znamená, že $T_n = F_{n+1},\ n \in \mathbb{N}_0$. Podobně lze řešit úlohu pro vytváření obdélníků typu $3 \times n$. Pro jejich počet dostaneme

$$U_n = \begin{cases} 0 & \text{pro } n \text{ liché,} \\ \sum\limits_{m=0}^{n/2} \binom{n-m}{m} 2^{n/2-m} & \text{pro } n \text{ sudé.} \end{cases}$$

Čtenář si může ověřit pochopení principu samostatnou úvahou na úloze[5]): *Kolika způsoby lze rozměnit peněžní částku:* (a) *pomocí libovolného počtu desetihaléřů*

[5]) Jde o zjednodušenou úlohu o rozměňování peněžní částky jen pomocí mincí o hodnotě 1, 5, 10, 25 a 50 centů, kterou George Pólya (1887–1985) a Gábor Szegő (1895–1985) zpopularizovali ukázkou jejího řešení pomocí vytvořující funkce v dnes již klasické knize [32].

a dvacetihaléřů, (b) *pomocí desetihaléřů a dvacetihaléřů, přičemž každý druh mince lze použít nejvýše d–krát?* (c) *Jakými způsoby lze rozměnit peněžní částku pomocí desetihaléřů a dvacetihaléřů, přičemž každý druh mince lze použít nejvýše d–krát?*[6])

(a) Uvažujme opět nekonečné řady, které obsahují všechny možné způsoby rozměnění. Pro rozměnění pouze pomocí desetníků tedy platí

$$P = \cancel{\textcircled{10}} + \textcircled{10} + \textcircled{10}\textcircled{10} + \textcircled{10}\textcircled{10}\textcircled{10} + \cdots = \cancel{\textcircled{10}} + \textcircled{10} + \textcircled{10}^2 + \textcircled{10}^3 + \cdots$$

a pro rozměnění pomocí desetníků i dvacetníků

$$D = P + \textcircled{20}P + \textcircled{20}\textcircled{20}P + \textcircled{20}\textcircled{20}\textcircled{20}P + \cdots = \left(\cancel{\textcircled{20}} + \textcircled{20} + \textcircled{20}^2 + \textcircled{20}^3 + \cdots\right) P\,.$$

Pro řešení úlohy užijeme trik: nahradíme $\textcircled{10}$ mocninou z^{10} a $\textcircled{20}$ mocninou z^{20}; $\cancel{\textcircled{10}}$ a $\cancel{\textcircled{20}}$ nahradíme 1. Pak např. hodnotě členu $\textcircled{20}\textcircled{20}\textcircled{20}\textcircled{10}$ bude odpovídat z^{70}. Tedy

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} z^{10n} = \frac{1}{1-z^{10}}, \qquad D = \frac{1}{1-z^{20}}\,P = \frac{1}{(1-z^{20})(1-z^{10})}\,. \tag{14}$$

Označíme-li

$$T(z) = \frac{1}{(1-z)(1-z^2)} = \frac{1}{4(1-z)} + \frac{1}{2(1-z)^2} + \frac{1}{4(1+z)}\,,$$

pak rozvinutím zlomků napravo v mocninné řady a úpravami postupně získáme

$$T(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left[\frac{n}{2}\right] + 1\right) z^n,$$

kde $[n/2]$ je celá část čísla $n/2$. Pro D tedy platí

$$D = T(z^{10}) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left[\frac{n}{2}\right] + 1\right) z^{10n}. \tag{15}$$

Jsou-li P_n, resp. D_n počty způsobů, kterými lze rozměnit částku $10n$ haléřů, když užíváme pouze mince desetihaléřové, resp. desetihaléřové i dvacetihaléřové, pak s ohledem na (14), resp. (15) dostaneme pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$P_n = 1, \qquad D_n = \left[\frac{n}{2}\right] + 1.$$

(b) Uvažujme opět všechny možné způsoby rozměnění. Pro rozměnění pouze pomocí nejvýše d desetníků získáváme vytvořující funkci

$$P = \cancel{\textcircled{10}} + \textcircled{10} + \textcircled{10}^2 + \cdots + \textcircled{10}^d = 1 + z^{10} + z^{20} + \cdots + z^{10d}$$

---

[6]) Předpokládá se, že zacházíme s částkami, které jsou celistvým násobkem 10 h.

a pro rozměnění pomocí nejvýše d desetníků a d dvacetníků

$$D = (\cancel{\textcircled{20}} + \textcircled{20} + \textcircled{20}^2 + \cdots + \textcircled{20}^d)\, P = (1 + z^{20} + \cdots + z^{20d})(1 + z^{10} + \cdots + z^{10d}). \quad (16)$$

Počet způsobů, kterými lze částku $10n$ haléřů rozměnit pomocí nejvýše d desetníků a d dvacetníků, vyjadřuje koeficient u z^{10n} v polynomu vzniklém roznásobením závorek ve vztahu (16).

(c) Budeme postupovat podobně jako v části (b), ale v tomto případě musíme uvažovat *vytvořující funkce více proměnných*[7]).

Pro rozměnění pouze pomocí nejvýše d desetníků, resp. pouze nejvýše d dvacetníků tedy uvažujeme vytvořující funkci

$$P = 1 + z^{10}u + z^{20}u^2 + \cdots + z^{10d}u^d, \quad u \in \mathbb{C},$$

resp.

$$D = 1 + z^{20}w + z^{40}w^2 + \cdots + z^{20d}w^d, \quad w \in \mathbb{C}.$$

Vytvořující funkce pro rozměnění pomocí nejvýše d desetníků a d dvacetníků proto má tvar

$$\mathcal{G}(z,u,w) = (1 + z^{10}u + \cdots + z^{10d}u^d)(1 + z^{20}w + \cdots + z^{20d}w^d). \quad (17)$$

Po roznásobení a povytýkání na levé straně vztahu (17) získáme jistý polynom $P(z)$ proměnné z. Všechny možné způsoby pro rozměnění částky $10n$ haléřů pomocí nejvýše d desetníků a d dvacetníků pak získáme z exponentů proměnných u (použitý počet desetníků) a w (užitý počet dvacetníků) v jednotlivých členech polynomu, který je koeficientem u z^{10n} v polynomu $P(z)$.

Úvahy, které jsme provedli, lze nejen zpřesnit, ale i zobecnit. Lze tak dostat velmi zajímavé výsledky v teorii o *rozkladech*[8]). Uvedeme dva typy obecných úloh o rozměňování peněžních částek:

(a) Rozměňování pomocí určitého počtu mincí, jejichž hodnoty jsou prvky množiny $H = \{h_1, h_2, h_3, \dots\}$, $h_i \in \mathbb{N}$. Pak lze podobně jako v (14) získat odpovídající vytvořující funkci

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - z^{h_n}} = \prod_{k \in H}^{\infty} \frac{1}{1 - z^k}. \quad (18)$$

(b) Rozměňování pomocí určitého počtu mincí, jejichž hodnoty jsou prvky množiny $H = \{h_1, h_2, h_3, \dots\}$, $h_i \in \mathbb{N}$, přičemž každou minci lze použít nejvýše d-krát, $d \in \mathbb{N}_0$. Analogicky jako v (16) získáváme příslušnou vytvořující funkci

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + z^{h_n} + z^{2h_n} + \cdots + z^{dh_n}) = \prod_{k \in H}^{\infty} (1 + z^k + z^{2k} + \cdots + z^{dk}). \quad (19)$$

[7]) Jejich užití je poměrně časté např. v problémech kombinatorické povahy, srv. [24], kap. 5.

[8]) Ač to patrně není zcela šťastné, překládáme tak pojem, pro který se v anglické literatuře používá termín *partition*.

4. Aplikace v teorii funkcí

Nejen jisté posloupnosti čísel, ale i důležité systémy funkcí lze zavést pomocí metody vytvořujících funkcí. Ukážeme si to na příkladech *Legendrových polynomů* a *Besselových funkcí prvního druhu*; jsou dnes nazývány po Adrienu-Marie Legendrovi (1752–1833) a Friedrichu Wilhelmu Besselovi (1784–1846).

Lze-li funkci $f(x,t)$ v okolí bodu $t=0$ rozvinout v mocninnou řadu podle mocnin t, jsou její koeficienty *funkce* proměnné x:

$$f(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)t^n.$$

Funkci f nazýváme *vytvořující funkce posloupnosti funkcí* $\{g_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$.

Uvažujme vytvořující funkci $\mathcal{L}(x,t)=(1-2tx+t^2)^{-1/2}$, $2|t||x|+|t|^2<1$, posloupnosti polynomů $P_n(x)$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}}=\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n.$$

Po rozvinutí levé strany v binomickou řadu

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}}=1+\frac{1}{2}\,(2tx-t^2)+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,(2tx-t^2)^2+\cdots,$$

přerovnání a uspořádání podle mocnin t získáme $P_0(x)=1$ a $P_1(x)=x$. Pro parciální derivaci funkce $\mathcal{L}$ podle t platí

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}=\frac{x-t}{(1-2tx+t^2)^{3/2}}=\frac{x-t}{1-2tx+t^2}\cdot\mathcal{L}.$$

Z posledních dvou vztahů dostaneme derivováním mocninné řady člen po členu

$$(x-t)\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n=(1-2tx+t^2)\sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)t^{n-1},$$

a tak po vynásobení a porovnání koeficientů u t^n získáme rekurentní vztah

$$(n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)xP_n(x)+nP_{n-1}(x)=0,$$

který společně s podmínkami $P_0(x)=1$, $P_1(x)=x$ charakterizuje *Legendrovy polynomy*; viz [23].

Trochu upraveným pojetím vytvořující funkce lze použít podobnou techniku pro tzv. *Besselovy funkce*[9]). Nechť $0\leqq R_1<R_2\leqq+\infty$, $z\in\mathbb{C}$, pak pro $R_1<|t|<R_2$ pod vytvořující funkcí posloupnosti funkcí $\{a_n(z)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ rozumíme funkci

$$\mathcal{A}(t,z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z)t^n.$$

---

[9]) Jsou pojmenovány po Friedrichu Wilhelmovi Besselovi (1784–1846), avšak pro komplexní z byly vyšetřovány teprve např. Eugenem Lommelem (1837–1899); dnes jsou proto často nazývány modifikované Besselovy funkce. Speciálními případy se zabývali již Euler (1731) a Daniel Bernoulli (1732).

Pro $t \neq 0$ získáme vynásobením řad

$$\mathrm{e}^{zt/2} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \left(\frac{1}{2} zt\right)^l, \qquad \mathrm{e}^{-z/(2t)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(-\frac{z}{2t}\right)^m$$

člen po členu a sloučením vzhledem k mocninám t^n (veškeré operace jsou legitimní, neboť obě řady absolutně konvergují)

$$\mathrm{e}^{z(t-1/t)/2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) t^n.$$

Po úpravách obdržíme pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$

$$J_n(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2m} \frac{(-1)^m}{m!\,(n+m)!}$$

a analogicky i vztah pro $J_{-n}(z)$ s $n \geqq 0$. V příslušné vytvořující funkci jsou „zakódovány" a v jistém smyslu „komprimovány" všechny vlastnosti Besselových funkcí; je tedy např. účinným pomocníkem k odvození vztahu

$$J_n(y+z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(y) J_{n-m}(z).$$

Poznamenejme ještě, že každou celou holomorfní funkci lze vyjádřit rozvojem tvaru $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_k J_k(z)$, což ukazuje mnohostrannou důležitost Besselových funkcí.

5. Aplikace v diskrétní pravděpodobnosti

Rozsah aplikací vytvořujících funkcí v teorii pravděpodobnosti je značný a atraktivní, bohužel by však příklady samy o sobě představovaly materiál na rozsáhlý článek. Převážně se proto omezíme na to, že čtenáři přiblížíme zajímavé výsledky[10]) a ukážeme, že i další operace s vytvořujícími funkcemi nejsou samoúčelné a souvisejí s některými úlohami důležitými v praxi. K porozumění je potřebná alespoň intuitivní znalost některých pravděpodobnostních pojmů; viz např. [37] nebo [38].

Je-li X diskrétní náhodná veličina, která nabývá hodnot 0, 1, 2, … s pravděpodobnostmi p_0, p_1, p_2, …, pak *pravděpodobnostní vytvořující funkcí* nazveme funkci

$$G_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k. \tag{20}$$

---

[10]) Děkujeme kol. RNDr. J. Antochovi, CSc., který nás s několika velmi zajímavými aplikacemi seznámil, a také Mgr. Michalovi Čihákovi; oba přispěli ke zpřesnění a zúplnění tohoto textu.

Vzhledem k tomu, že $p_k \geqq 0$ a $\sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k = 1$, konverguje mocninná řada v (20) alespoň pro ta komplexní z, pro něž $|z| < 1$. Nabývá-li X pouze konečně mnoha hodnot 0, 1, 2, ..., j, klademe $p_k = P(X = k) = 0$ pro všechna $k > j$. Má-li náhodná veličina X vytvořující funkci $G_X(z)$, potom lze z (20) přímo spočítat její střední hodnotu EX, rozptyl $\operatorname{var} X$ a pravděpodobnosti p_k, $k \in \mathbb{N}_0$, pomocí vzorců

$$EX = G'_X(1), \quad \operatorname{var} X = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2, \quad p_k = \frac{G_X^{(k)}(0)}{k!}. \qquad (21)$$

V tomto případě je totiž např.

$$EX = \sum_{k=0}^{j} k p_k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k \right)' \Bigg|_{z=1}.$$

Podobně lze pro nezávislé náhodné veličiny X, Y s vytvořujícími funkcemi $G_X(z)$ a $G_Y(z)$ z (20) obdržet

$$G_{X+Y}(z) = G_X(z) \cdot G_Y(z).$$

Velmi důležitou vlastností pravděpodobnostní vytvořující funkce je její poměrně jednoduchý tvar pro většinu běžně užívaných náhodných veličin. Např. pro náhodnou veličinu X s *rovnoměrným rozdělením řádu* $n \in \mathbb{N}$, která nabývá hodnot $0, 1, \dots, n-1$ se stejnými pravděpodobnostmi $1/n$, má vytvořující pravděpodobnostní funkce tvar

$$G_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} z^k = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1}{n} \frac{1-z^n}{1-z}.$$

Při zkoumání rozdělení součtu určitého počtu diskrétních náhodných veličin se uplatňuje tvrzení o konvoluci náhodných veličin; viz např. [37]. Při vyšetřování problému rozdělení součtu *náhodného počtu* náhodných veličin se uplatní další operace. Nechť X_k jsou pro $k \in \mathbb{N}$ náhodné veličiny s týmž *shodným* rozdělením pravděpodobnosti $P(X_k = i) = p_i$, $i \in \mathbb{N}_0$, a tedy i shodnou vytvořující funkcí $G_X(z)$.

Nechť N je náhodná veličina s $P(N = i) = M_i$, $i \in \mathbb{N}_0$, a vytvořující funkcí $G_N(z)$. Pak náhodná veličina $S_N = X_1 + X_2 + \dots + X_N$, která reprezentuje náhodný součet náhodných veličin, má vytvořující funkci

$$G_{S_N}(z) = G_N\big(G_X(z)\big);$$

pracujeme tedy se *skládáním* vytvořujících funkcí. Pomocí derivování a užití (21) získáme opět vzorce pro střední hodnotu a rozptyl S_N

$$ES_N = EX \cdot EN, \qquad \operatorname{var} S_N = EN \cdot \operatorname{var} X + \operatorname{var} N \cdot (EX)^2.$$

To souvisí např. s touto úlohou: *Samička hmyzu snese náhodný počet vajíček, který se řídí např. Poissonovým rozdělením. Z každého vajíčka se vylíhne larva s pravděpodobností p. Jaký je střední počet vylíhlých larev?*

Operace skládání vytvořujících funkcí se ukazuje ještě více potřebnou při studiu řetězových reakcí. Taková reakce se odehrává např. v tzv. elektronovém násobiči, který se skládá z velkého počtu stínítek. Jestliže na první stínítko dopadne elektron, způsobí sekundární emisi náhodného počtu dalších elektronů, které po dopadu na další stínítko vyvolají obdobný efekt. Tážeme-li se na střední počet elektronů emitovaných n-tým stínítkem, uplatní se „n-násobné" skládání vytvořujících funkcí.

Jiným klasickým objektem zkoumání je *náhodná procházka na přímce*; srv. [39]. Předpokládáme, že „startujeme" z bodu nula a při každém kroku můžeme udělat pohyb o jednotku vpravo s pravděpodobností p či vlevo s pravděpodobností $q = 1 - p$. Zajímá nás rozdělení pravděpodobnosti prvních (druhých, třetích, ...) návratů zpět do výchozího bodu nula. I při řešení tohoto problému se uplatňují velice významně vytvořující funkce; srv. [6], [37].

Alespoň jednu úlohu prozkoumáme obecně trochu podrobněji. Je to úloha o *čekání na výskyt určitého vzoru.* Představme si, že se konají náhodné nezávislé pokusy, z nichž každý může s pravděpodobností p skončit výsledkem S a s pravděpodobností $q = 1 - p$ výsledkem N. Má se najít rozdělení pravděpodobnosti, střední hodnota a rozptyl náhodné veličiny, která např. popisuje (a) první výskyt S či N v i-tém pokusu, nebo (b) první výskyt určité konečné posloupnosti výsledků, např. SNS apod.

Nechť X je náhodná veličina, která udává pořadové číslo pokusu, ve kterém se poprvé objevil výsledek S. Poznamenejme, že se rozdělení této náhodné veličiny nazývá *geometrické rozdělení.* Pak platí

$$P(X = k) = P_k = \begin{cases} 0, & k = 0, \\ pq^{k-1}, & k \in \mathbb{N}, \end{cases} \tag{22}$$

takže dostáváme vytvořující funkci

$$G_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k z^k = \sum_{k=1}^{\infty} pq^{k-1} z^k = \frac{pz}{1 - qz}\,.$$

Z jejího tvaru užitím (21) či přímo z definice dostaneme snadno vzorce

$$EX = 1/p, \quad \operatorname{var} X = q/p^2, \quad P(X \geqq i) = q^{i-1}.$$

Ilustraci nám poskytne popis hry „Rub–Líc". Dva hráči A, B házejí mincí. Rub (R) padá s pravděpodobností p, a tedy líc (L) s pravděpodobností $q = 1 - p$. Vyhrává hráč, který první „hodí (R)", přičemž házet začíná A.

Pravděpodobnosti výher A a B jsou proto vzhledem k (22)

$$P(A) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{2k+1} = \frac{1}{1+q}\,, \quad P(B) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{2k+2} = \frac{q}{1+q}\,.$$

Při $p = \frac{1}{2}$ „není hra fér", neboť pak je $P(A) = \frac{2}{3}$ a tak má hráč A podstatnou výhodu. Čtenář si může rozmyslet trochu obecnější úlohu, a to jak volit pravděpodobnost p_1, s níž jev (R) nastává pro hráče A, a p_2, s níž nastává jev (R) pro hráče B, tak, aby oba hráči měli stejnou šanci. Prozraďme, že pro $p_1 = \frac{1}{2}$ je $p_2 = 1$ a pro $p_1 > \frac{1}{2}$ nemá úloha řešení. Pro $p_1 = \frac{1}{6}$ vyjde $p_2 = \frac{1}{5}$; blíže viz připravovanou knížku [2], jejíž preprint jsme od autora měli k dispozici. Poznamenejme ještě, že úlohy tohoto typu lze stopovat až k Moivreovi do r. 1738 a dalším, k nimž patří Thomas Simpson (1687–1768) a Pierre Simon Laplace (1749–1827); srv. [6].

Problém určit první výskyt určité posloupnosti výsledků si ukážeme na zjednodušené variantě hry, kterou v obecnější podobě popsal r. 1969 Walter Penney v [30]; proto bývá nazývána *Penneyova hra.* Naše hra vypadá takto: Hráči A a B opět střídavě házejí ideální mincí[11]) tak dlouho, až se objeví v posloupnosti výsledků LLR a pak vyhrává A, nebo LRR a pak vyhrává B. Jakou pravděpodobnost výhry má každý z nich?

Uvažujme nejprve o možnosti výskytu posloupnosti LLR. Můžeme postupovat podobně jako dříve v úloze o dominových kostkách nebo mincích. Vytvoříme součet všech možných příznivých výsledků

$$\mathcal{S} = LLR + LLLR + RLLR + LLLLR + LRLLR + \cdots ,$$

a také součet všech výsledků, ve kterých se vyhrávající posloupnost LLR nevyskytuje

$$\mathcal{N} = 1 + L + R + LL + LR + RL + RR + LLL + \cdots .$$

Potom platí

$$1 + \mathcal{N}L + \mathcal{N}R = \mathcal{N} + \mathcal{S}, \tag{23}$$

neboť každý člen vlevo buď končí LLR (patří tedy do $\mathcal{S}$), nebo nekončí (patří do $\mathcal{N}$) a naopak každý člen vpravo je buď „prázdný“, nebo musí patřit do $\mathcal{N}L$ či do $\mathcal{N}R$. Podobně platí

$$\mathcal{N}LLR = \mathcal{S}. \tag{24}$$

Řešením této soustavy rovnic získáváme pro $\mathcal{S}$

$$(1 - \mathcal{S})(1 - L - R)^{-1}LLR = \mathcal{S}$$

a po dosazení $\frac{1}{2}z$ za L i R získáváme odtud pro vytvořující funkci $G_{\mathcal{S}}(z)$

$$\bigl(1 - G_{\mathcal{S}}(z)\bigr)\bigl(1 - \tfrac{1}{2}z - \tfrac{1}{2}z\bigr)^{-1}\tfrac{1}{8}z^3 = G_{\mathcal{S}}(z),$$

a tedy

$$G_{\mathcal{S}}(z) = \frac{z^3}{z^3 - 8z + 8}\,. \tag{25}$$

Podobně lze také pro posloupnost LRR získat soustavu, jejímž řešením je opět (25). Tedy náhodné veličiny popisující výskyt posloupností LLR i LRR jsou totožné. Proto by hráči A i B měli mít v této hře stejné šance na úspěch. Ovšem díky „vnitřnímu vztahu“ mezi LLR a LRR se ukáže, že hra ve skutečnosti v tomto případě opět

[11]) Pravděpodobnost padnutí (R) i (L) je stejná a je rovna $\frac{1}{2}$, začíná hráč A.

spravedlivá není. Označíme–li $\mathcal{S}_A$ vítězné posloupnosti pro A, $\mathcal{S}_B$ vítězné pro B a $\mathcal{N}$ ty, které nejsou zatím ve hře „koncové", pak platí

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_A &= LLR + LLLR + RLLR + \cdots\,, \\
\mathcal{S}_B &= LRR + LLRR + RLRR + \cdots\,, \\
\mathcal{N} &= 1 + L + R + LL + LR + RL + RR + LLL + \cdots\,,
\end{aligned}$$

a podobně jako v (23) a (24) získáváme

$$1 + \mathcal{N}(L + R) = \mathcal{N} + \mathcal{S}_A + \mathcal{S}_B, \quad \mathcal{N}LLR = \mathcal{S}_A, \quad \mathcal{N}LRR = \mathcal{S}_A R + \mathcal{S}_B.$$

Jestliže zvolíme $L = R = \frac{1}{2}$, pak $\mathcal{S}_A$, resp. $\mathcal{S}_B$ budou představovat pravděpodobnosti výhry pro A a B. Po jednoduchém výpočtu získáme z této soustavy hodnoty $\mathcal{S}_A = \frac{2}{3}$ a $\mathcal{S}_B = \frac{1}{3}$, takže A bude vyhrávat přibližně dvakrát častěji než B. V původní Penneyově hře si hráč A vybírá svoji „vítěznou posloupnost" o délce k a pak si svoji o stejné délce k vybere hráč B, a to na základě volby hráče A. Úkolem je pro dané k určit optimální volby posloupností pro oba hráče. Viz též např. [6] nebo [16].

Ač se na první pohled může zdát, že tyto hry nemají žádný praktický význam, je opak pravdou: problém souvisí s řízením technologických procesů, kde umožňuje výpočet průměrné délky trvání jistého procesu. Vytvořující funkce patří k základnímu aparátu teorie pravděpodobnosti. Uplatňují se při řešení diferenčních i diferenciálních rovnic a objevují se v praktických aplikacích markovských procesů, např. v teorii skladu, teorii obnovy a v teorii hromadné obsluhy; srv. [1], [33], [18] nebo [44][12]).

Další významné využití nacházejí pravděpodobnostní vytvořující funkce v informatice. Jde např. o algoritmy určené k ukládání a vyhledávání jistých údajů v rozsáhlých databázích. Užívá se zde technika tzv. *hashování*; viz [17], str. 411–426. Srv. též [21].

Nakonec ještě krátkou historickou poznámku: povýšení metody vytvořujících funkcí na jeden ze základních prostředků teorie pravděpodobnosti náleží Laplaceovi, který k ní přispěl přednáškami na *l'École Normale Supérieure* konanými od r. 1795. Druhé vydání jeho knihy [10] z r. 1814 obsahuje jako předmluvu text přednášek z r. 1795. V první kapitole knihy [10] rozpracoval jako první *metodu* vytvořujících funkcí[13]).

6. Další návrat k Eulerovi

Abychom měli k dalšímu výkladu „oslí můstek", uvažujme ještě tento experiment: *Mějme n navzájem nerozlišitelných předmětů a k navzájem nerozlišitelných přihrádek. Kolika navzájem různými způsoby můžeme předměty přidělit do přihrádek?*

Pro nekonečný počet předmětů i přihrádek je tento problém ekvivalentní s problémem rozměňování pomocí mincí o hodnotách 1, 2, 3, ... Příslušná vytvořující funkce má tedy tvar

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - z^n}\,, \tag{26}$$

[12]) Posledně zmíněnou knížku jsme neměli při psaní článku k dispozici, je zmiňována v [6].

[13]) Druhé vydání [10] z r. 1814 jsme měli k dispozici z knihovny MFF UK.

neboť vznikne z (18) volbou $H = \mathbb{N}$. Tato úloha opět není bezvýznamnou hříčkou, neboť takto lze spočítat např. přesné kritické hodnoty Wilcoxonova testu a dalších ve statistice významných testů.

Podobné nekonečné součiny, o nichž předpokládáme, že jsou čtenáři intuitivně srozumitelné, se vyskytují i v problémech z teorie čísel. Tam mají vytvořující funkce velmi široké využití. Omezíme se na ukázku z problematiky související s rozklady (partitions). Její počátky sahají do 17. století. Snad první zmínku lze nalézt v Leibnizově dopise Johannu Bernoullimu, psaném okolo roku 1699; viz [36]. Největší vliv na řešení však měl Eulerův výsledek, který popíšeme podrobněji.

Eulerova věta o pentagonálních číslech a rozkladech. Euler na základě roznásobení prvních více než 51 činitelů nekonečného součinu

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-z^n) \tag{27}$$

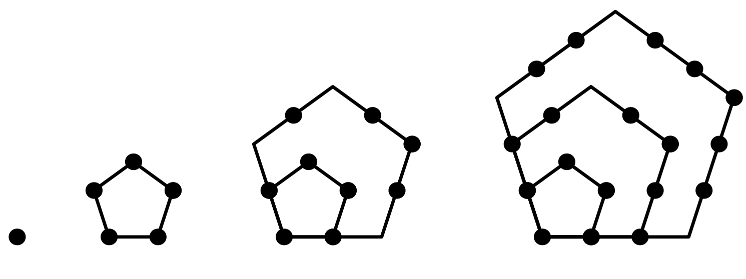
v roce 1741 zjistil (důkaz však nalezl až o deset let později, srv. [15]), že

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-z^n) = 1 - z - z^2 + z^5 + z^7 - z^{12} - z^{15} + \cdots,$$

a uvědomil si tak, že při dnes běžném označení platí

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\bigl(q^{n(3n-1)/2} + q^{n(3n+1)/2}\bigr) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n q^{n(3n-1)/2}. \tag{28}$$

Pro čísla $\omega(n) = \frac{1}{2}n(3n-1)$ pro celá n, která se zde objevují v exponentu, se užívá název *pentagonální čísla*. Důvod je patrný z obr. 1.



Obr. 1. Čtyři pentagonální čísla: 1, 5, 12, 22.

Legendre získal čistě formálním roznásobením několika prvních činitelů součinu (27), kde opět píšeme q místo z,

$$\begin{aligned}1 - q - q^2 - q^3 - q^4 + q^{1+2} + q^{1+3} + q^{1+4} + q^{2+3} + q^{2+4} +\\ + q^{3+4} - q^{1+2+3} - q^{1+2+4} - q^{1+3+4} - q^{2+3+4} + q^{1+2+3+4} + \cdots\end{aligned} \tag{29}$$

a uvědomil si, že člen $\pm q^n$ se zde objevuje přesně tolikrát, kolikrát lze číslo n reprezentovat jako různé součty různých přirozených čísel; zde i dále považujeme součty, které se liší pouze pořadím sčítanců, za shodné. Znamení + platí v případě, když je n reprezentováno *sudým* počtem sčítanců, a znamení − v případě, že je počet sčítanců *lichý*. Možný počet těchto „sudých“, resp. „lichých“ reprezentací přirozeného čísla n se obvykle značí $p_e(n)$, resp. $p_o(n)$.

Srovnáním (28) a (29) snadno získáváme

$$p_e(n) - p_o(n) = \begin{cases} (-1)^j & \text{pro } n = \frac{1}{2}j(3j \pm 1), \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Oba tyto poměrně překvapivé výsledky měly ohromný vliv na následující vývoj teorie čísel. Ukážeme si postup, jakým Euler odvodil vztah (28), užijeme však soudobé označení. Uvažujme funkci

$$f(x) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} (1 - xq)(1 - xq^2) \cdots (1 - xq^{n-1}) x^{n+1} q^n,$$

kde obsažená řada i součiny pro $|q| < 1$, $|x| < |q|^{-1}$ konvergují absolutně. Pro $x = 1$ odtud získáváme hledaný součin $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)$, neboť snadno lze matematickou indukcí dokázat, že pro každé $N \in \mathbb{N}$ platí

$$1 - \sum_{n=1}^{N} (1 - q)(1 - q^2) \cdots (1 - q^{n-1}) q^n = \prod_{n=1}^{N} (1 - q^n),$$

a tedy limitním přechodem pro $N \to \infty$ získat

$$f(1) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n). \tag{30}$$

Základem Eulerova důkazu je funkcionální rovnice

$$f(x) = 1 - x^2 q - x^3 q^2 f(xq), \tag{31}$$

kterou lze pro f odvodit elementárním výpočtem na cca jedné stránce; viz např. [4]. Další část Eulerova důkazu je založena na opakovaném užití funkcionální rovnice (31). Získává se tak postupně

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - x^2 q - x^3 q^2 \bigl(1 - x^2 q^3 - x^3 q^5 f(xq^2)\bigr) = \\ &= 1 - x^2 q - x^3 q^2 + x^5 q^5 + x^6 q^7 \bigl(1 - x^2 q^5 - x^3 q^8 f(xq^3)\bigr) = \\ &\;\;\vdots \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{N-1} (-1)^n \bigl(x^{3n-1} q^{n(3n-1)/2} + x^{3n} q^{n(3n+1)/2}\bigr) + \\ &\quad + (-1)^N x^{3N-1} q^{N(3N-1)/2} + (-1)^N x^{3N} q^{N(3N+1)/2} f(xq^N). \end{aligned}$$

Získanou rovnost pro $N \in \mathbb{N}$ lze dokázat matematickou indukcí a z ní limitním přechodem pro $N \to \infty$ dostat

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (x^{3n-1} q^{n(3n-1)/2} + x^{3n} q^{n(3n+1)/2}). \tag{32}$$

Z (30) a (32) po dosazení $x = 1$ obdržíme odvozovaný vztah (28):

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) = f(1) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (q^{n(3n-1)/2} + q^{n(3n+1)/2}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n(3n+1)/2}.$$

Nyní se budeme věnovat „základním“ rozkladům přirozeného čísla n. Počet všech rozkladů čísla n v součet libovolného počtu přirozených čísel (rozklady lišící se pouze pořadím sčítanců opět považujeme za shodné) značíme $p(n)$. Definujeme $p(0) = 1$; např. pro $n = 5$ je $p(5) = 7$, neboť

$$5 = 4 + 1 = 3 + 2 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1.$$

Počty rozkladů $p(n)$ rostou velice rychle, např. $p(10) = 42$ a $p(30) = 5604$, kdežto $p(100) = 190\,569\,292$. Pro počty rozkladů $p(n)$ platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n) z^n = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - z^n}\,, \tag{33}$$

neboť jejich vytvořující funkcí $\mathcal{P}(z)$ je opět (26). Z (33) a (28) pak získáváme vztah

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} p(n) z^n \right) \cdot \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \big(z^{\omega(m)} + z^{\omega(-m)} \big) \right) = 1, \tag{34}$$

který společně s následující identitou použijeme k odvození rekurentního vztahu pro $p(n)$. Dodefinujeme-li $p(n) = 0$ pro $n < 0$, pak pro každé $k \in \mathbb{N}_0$ platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} p(n-k) z^{n-k}.$$

Postupnými elementárními úpravami levé strany v (34) obdržíme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(p(n) + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \Big(p\big(n - \omega(m)\big) + p\big(n - \omega(-m)\big) \Big) \right) z^n,$$

kde symbol ω pro pentagonální čísla jsme již zavedli. Porovnáním tohoto výsledku s pravou stranou (34) dostaneme pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$

$$p(n) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \Big(p\big(n - \omega(m)\big) + p\big(n - \omega(-m)\big) \Big).$$

Přestože se na pravé straně této rekurence vyskytuje nekonečná řada, pro každé konkrétní n stačí sečíst jen konečný počet nenulových sčítanců. Protože neexistuje žádný „funkční předpis“ pro počet rozkladů $p(n)$, je tato rekurence základem výpočtu $p(n)$. Percy Alexander MacMahon (1854–1929) ji v roce 1918 užil k nalezení $p(n)$ až po $n = 200$; viz [26]. O rozkladech bylo později nalezeno i další velké množství zajímavých výsledků. Např. Srinivasa Aiyangar Ramanujan (1887–1920) dokázal na základě transformací vytvořující funkce, že $p(5n+4) \equiv 0 \pmod 5$ a $p(7n+5) \equiv 0 \pmod 7$ (viz [34], paper 25, [3], s. 159–177). Ramanujan formuloval i hypotézu, že obecně platí: jestliže $\delta = 5^a 7^b 11^c$, $a, b, c \in \mathbb{N}_0$, a $24\lambda \equiv 1 \pmod \delta$, pak

$$p(\lambda),\ p(\lambda+\delta),\ \ldots \equiv 0 \pmod \delta.$$

Ta se však ukázala nesprávnou, neboť v roce 1930 Sarvadaman Chowla (1907–1995) ukázal na základě již dříve získané tabulky hodnot $p(n)$, že

$$p(243) = 133978259344888 \not\equiv 0 \pmod{7^3},$$

ač $24 \cdot 243 \equiv 1 \pmod{7^3}$. V roce 1938 George Neville Watson (1886–1965) dokázal opravenou hypotézu pro $\delta = 5^n$ i $\delta = 7^n$, $n \in \mathbb{N}$, a v roce 1967 Arthur Oliver Lonsdale Atkin (* 1935) dokázal následně upravenou Ramanujanovu hypotézu: jestliže $\delta = 5^a 7^b 11^c$ a $24\lambda \equiv 1 \pmod \delta$, pak $p(\lambda) \equiv 0 \pmod{5^a 7^{[(b+2)/2]} 11^c}$. Podrobněji o historii pentagonálních čísel viz [4], [36] nebo [43].

Některé speciální druhy rozkladů. Počet způsobů $p_l(n)$, kterými lze přirozené číslo n vyjádřit jako součet lichých čísel, má vzhledem k (18) vytvořující funkci

$$\mathcal{L}(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - z^{2n-1}}\,.$$

Počet způsobů $p_d(n)$, kterými lze přirozené číslo n vyjádřit jako součet různých přirozených čísel, má vzhledem k (19) vytvořující funkci

$$\mathcal{D}(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + z^n).$$

Poměrně zajímavým výsledkem je vztah mezi $p_l(n)$ a $p_d(n)$, který lze snadno získat následující manipulací s jejich vytvořujícími funkcemi. Protože

$$\mathcal{D}(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + z^n) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1 - z^{2n}}{1 - z^n} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - z^{2n-1}} = \mathcal{L}(z),$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$ tedy platí $p_l(n) = p_d(n)$.

7. Aplikace v teorii grafů

Mnoho problémů např. z chemie, biologie, lingvistiky apod. vede k potřebě určit počet grafických objektů jistých vlastností. Některé úlohy tohoto typu byly vyřešeny již před sto lety, jiné nejsou dosud dořešeny a stále se objevují další; srv. [31] a [19]. Omezíme se opět na ukázku dvou úloh tohoto typu, při jejichž řešení lze účelně použít vytvořující funkce.

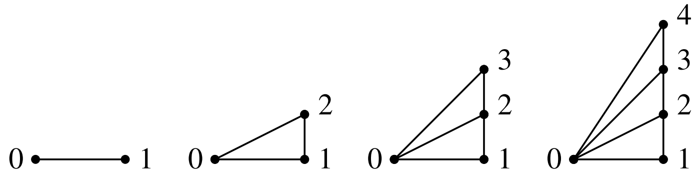
Nejprve si připomeneme některé pojmy z teorie grafů; definice základních pojmů, jako jsou graf, podgraf, souvislý graf, kružnice, komponenta apod., připomínat nebudeme, lze je nalézt např. v [28]. Čtenář se může spokojit i s intuitivním chápáním, pokud je pro něj podstatná jen informace o povaze výsledků.

Vějířem řádu n se rozumí graf s $n+1$ uzly označenými čísly $0, 1, \ldots, n$ a $2n-1$ hranami, přičemž platí:

(a) uzel 0 je spojen hranou se všemi ostatními uzly grafu,

(b) libovolný uzel k, $1 \leqq k \leqq n-1$, je spojen hranou pouze s uzlem $k+1$.

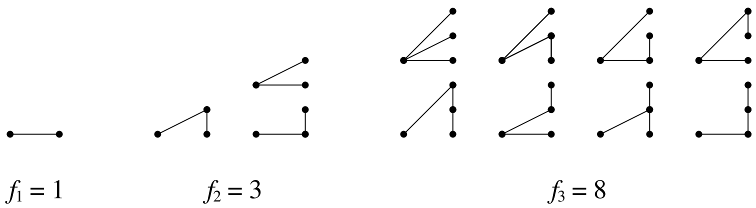
Pro bližší představu uvádíme nejjednodušší vějíře na obr. 2.



Obr. 2. Vějíře řádu 1, 2, 3 a 4.

Kostrou grafu G rozumíme jeho souvislý podgraf, který obsahuje všechny uzly grafu G a neobsahuje kružnice.

Počet koster ve vějíři. Naším cílem bude zjistit počet všech různých koster, které existují ve vějíři řádu n; jejich počet označíme f_n. Podívejme se detailně na tři jednoduché případy, znázorněné na obr. 3.



Obr. 3. Různé kostry ve vějíři řádu $n = 1, 2, 3$.

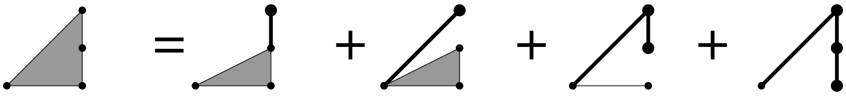
Z hlediska řešení našeho problému je však vhodné uvažovat i vějíř řádu 0; budeme jím rozumět pouze vrchol označený 0, přičemž volíme $f_0 = 0$.

Rekurenci, kterou musí splňovat f_n, určíme na základě úvahy o vzniku koster vějíře řádu n z koster vějířů řádu $n-k$, $1 \leqq k \leqq n$, přidáním k dalších hran, incidujících s alespoň jedním z k přidávaných uzlů označených $n-k+1$, $n-k+2$, $\ldots$, n. Uvažujme nejprve $k = 1$. Jelikož uzel n může být ve vějíři spojen pouze s uzly 0 a $n-1$, získáváme, že z koster vějíře řádu $n-1$ vznikají kostry vějíře řádu n dvojím způsobem, tedy v počtu všech f_n musí být zahrnuto $2f_{n-1}$. Další kostry vějíře řádu n vznikají z koster vějířů řádu $n-k$, $2 \leqq k \leqq n$, a to již pouze jedním způsobem.

Uzel n musí vždy být spojen s uzlem 0 a vždy jsou uzly n, $n-1$, $n-2$, ..., $n-k+1$ postupně spojeny hranami, ale uzel $n-k+1$ není spojen s uzlem $n-k$. Přitom žádná hrana mezi 0 a některým z uzlů $n-1$, $n-2$, ..., $n-k+1$ již nemůže být přidána, neboť by to vedlo ke vzniku kružnice. Dostáváme tak následující rekurentní vztah

$$\begin{aligned} f_0 &= 0, \\ f_n &= f_{n-1} + f_{n-1} + f_{n-2} + f_{n-3} + \cdots + f_1 + f_0 + 1 = \\ &= f_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-1} f_k + 1, \quad n \geqq 1. \end{aligned}$$

Zmíněný postup nejlépe dokumentuje obr. 4. Šrafováním je v každém sčítanci symbolicky vyznačen vějíř, jehož kostry jsou základem vytvářených koster vějíře řádu 3; přidávané hrany a uzly jsou zobrazeny výrazněji.



$f_3 \quad = \quad f_2 \quad + \quad f_2 \quad + \quad f_1 \quad + \quad 1$

Obr. 4. Vznik koster vějíře řádu 3 z koster vějířů řádu 2, 1, 0.

Na základě nalezení vytvořující funkce posloupnosti f_n určíme následně i funkční předpis pro f_n:

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n = f_0 z^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(f_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-1} f_k + 1 \right) z^n = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} f_{n-1} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} f_k \right) z^n + \sum_{n=1}^{\infty} z^n = \\ &= zF(z) + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k+1}^{\infty} f_k z^n + \frac{z}{1-z} = zF(z) + \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k \sum_{n=k+1}^{\infty} z^{n-k} + \frac{z}{1-z} = \\ &= zF(z) + F(z) \frac{z}{1-z} + \frac{z}{1-z}, \end{aligned}$$

a tedy

$$F(z) = \frac{z}{z^2 - 3z + 1}.$$

Jelikož rovnice $z^2 - 3z + 1 = 0$ má kořeny α^2 a β^2 (platí $\alpha^2 + \beta^2 = L_2 = 3$ a $\alpha^2\beta^2 = 1$), lze $F(z)$ rozložit na parciální zlomky

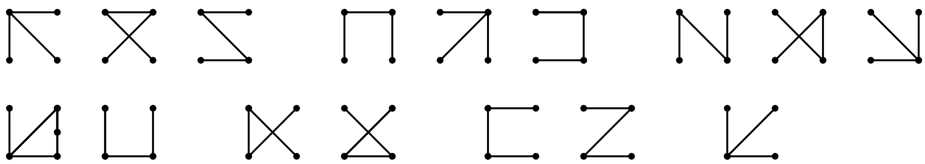
$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1-\alpha^2 z} - \frac{1}{1-\beta^2 z} \right)$$

a po rozvinutí v mocninné řady získat

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha^2 z)^n - \sum_{n=0}^{\infty} (\beta^2 z)^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{\sqrt{5}} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} F_{2n} z^n.$$

Celkově tedy pro $n \in \mathbb{N}_0$ platí
$$f_n = F_{2n},$$
kde F_{2n} jsou Fibonacciova čísla se sudými indexy.

Počet koster v úplném grafu. Naším úkolem bude určit počet různých koster t_n, které existují v úplném grafu s n uzly označenými $1, 2, \dots, n$.[14]) Podívejme se opět detailně na úvodní případy. Tak jako u počtu koster ve vějíři zvolíme $t_0 = 0$. Snadno získáme $t_1 = t_2 = 1$, $t_3 = 3$, a jelikož všechny kostry odpovídající případu pro $n = 4$ jsou na následujícím obrázku 5, je $t_4 = 16$.



Obr. 5. Kostry v úplném grafu se 4 uzly.

Podobně jako při řešení problému o vějíři je výhodné zvolit jeden uzel úplného grafu jako základní (ve vějíři měl tuto roli uzel 0) a uvažovat komponenty, které vzniknou ignorováním všech hran, které jsou incidentní se základním uzlem. Nebudeme však dále popisovat postup podrobněji a uvedeme jen relativně jednoduchý výsledek.

Rekurenci pro posloupnost $\{t_n\}$ najdeme tak, že budeme uvažovat posloupnost $u_n = nt_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, a nalezneme nejprve vztah pro u_n. Po chvilce práce dostaneme pro vytvořující funkci $\mathcal{U}(z)$ posloupnosti $\{u_n\}$
$$\mathcal{U}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{n-1} \frac{z^n}{n!}$$
a odtud získáme pro $n \in \mathbb{N}$ vztahy $u_n = n^{n-1}$ a $t_n = u_n/n = n^{n-2}$.

Na závěr. Na několika ukázkách jsme se snažili čtenáři přiblížit kořeny používání techniky vytvořujících funkcí. Snad se nám podařilo též ukázat, že „matematické experimenty“ byly užitečnou součástí matematiky[15]) podstatně dříve, než jim používání počítačů přineslo novou dimenzi.

L i t e r a t u r a

[1] Anděl, J.: *Matematická statistika.* SNTL/ALFA, Praha–Bratislava 1978.
[2] Anděl, J.: *Matematika náhody* (preprint připravované knihy), 1998.
[3] Andrews, G. E.: *The theory of partitions.* Addison–Wesley, Reading 1976 (v sérii Encyclopedia of Mathematics and Its Applications 2).
[4] Andrews, G. E.: *Euler's pentagonal number theorem.* Math. Magazine *56* (1983), No. 5, 279–284 (toto speciální číslo bylo vydáno k dvoustému výročí Eulerova úmrtí).

[14]) Tento problém zcela odlišným postupem vyřešil již Arthur Cayley (1821–1895) v [9].
[15]) Viz zajímavý článek [7], jehož překlad nedávno v PMFA vyšel.

[5] BERNOULLI JAKOB: *Ars Conjectandi, opus posthumum.* Basel 1713.
[6] BLOM, G., HOLST L., SANDELL, D.: *Problems and Snapshots from the world of probability.* Springer, New York 1994.
[7] BORWEIN, J. M., BORWEIN, P. B., GIRGENSOHN, R., PARNES, S.: *Making sense of experimental mathematics.* Math. Intelligencer *18* (1996), no. 4, 12–18 (překlad vyšel v PMFA *44* (1999), č. 1, 50–61).
[8] CALDA, E.: *Kombinatorika pro učitelské studium.* Matfyzpress, Praha 1996.
[9] CAYLEY, A.: *A theorem on trees.* Quart. J. Math. Oxford Ser. *23* (1889), 376–378.
[10] DE LAPLACE, P. S.: *Théorie Analytique des Probabilites.* Paris 1812, 1814, 1820.
[11] DE MOIVRE, A.: *Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis.* London 1730.
[12] EISENSTEIN, F. G. M.: *Genaue Untersuchung der unendlichen Doppelproducte, aus welchen die elliptischen Functionen als Quotienten zusammengesetzt sind, und der mit ihnen zusammenhängenden Doppelreihen* (*als eine neue Begründungsweise der Theorie der elliptischen Functionen, mit besonderer Berücksichtigung ihrer Analogie zu den Kreisfunctionen*). Jour. für Reine und Angew. Math. *35* (1847), 153–247 (též v Eisensteinových sebraných spisech *Math. Werke 1*, 357–478).
[13] EULER, L.: *Introductio in analysin infinitorum I, II.* Marcum-Michaelem Bousquet et socios, Lausanne 1748.
[14] EULER, L.: *De seriebus quibusdam considerationes.* Comm. acad. sci. Petrop. *12* (1740), 53–96 (vyšlo r. 1750; viz též *Opera Omnia* (1) 14, 407–462).
[15] EULER, L.: *Evolutio producti infinity* $(1-x)(1-xx)(1-x^3)\ldots$ *etc.* In: Leonhardi Euleri *Opera Omnia*, (1) 3, Berlin 1913, 472–479.
[16] GARDNER, M.: *On the paradoxical situations that arise from nontransitive relations.* Scientific American *231* (1974), 120–124.
[17] GRAHAM, L. R., KNUTH, D. E., PATASHNIK, O.: *Concrete mathematics.* Addison--Wesley, Reading 1989, 1994.
[18] GRIMMETT, G., STIRZAKER, D.: *Probability and random processes.* The Clarendon Press, Oxford University Press, New York 1992 (jde o 2. přepracované vydání, ke kterému existuje další svazek *Probability and random processes: problems and solutions*, Clarendon, New York, 1992).
[19] HARARY, F., PALMER, E. M.: *Graphical enumeration.* Academic Press, New York 1973.
[20] HARDY, G. H.: *Divergent series.* Claredon Press, Oxford 1949.
[21] HOFRI, M.: *Probabilistic analysis of algorithms. On computing methodologies for computer algorithms performance evaluation.* Springer, New York 1987.
[22] IVANOV, A. O.: *Easy as* π*?* Springer, New York 1999.
[23] JARNÍK, V.: *Integrální počet II.* Nakladatelství ČSAV, Praha 1984.
[24] KAUCKÝ, J.: *Kombinatorické identity. Úvod do studia metod kombinatorické analýzy.* Veda, Bratislava 1975.
[25] KLINE, M.: *Euler and infinite series.* Math. Magazine *56* (1983), No. 5, 307–314.
[26] MACMAHON, P. A.: *Combinations from* n *identical sets of* n *different letters.* Proc. London Math. Soc., Ser. 2, *17* (1918), 25–41.
[27] MAISTROV, L. E.: *Probability theory: a historical sketch.* Academic Press, New York and London 1974.
[28] NEŠETŘIL, J.: *Teorie grafů.* SNTL, Praha 1979.
[29] NIVEN I.: *Formal power series.* Amer. Math. Monthly *76* (1969), 871–889.
[30] PENNEY, W.: *Problem: penney-ante.* Journal of Recreational Mathematics *2* (1969), 241 (srv. též ještě týž časopis *7* (1974), 321).
[31] PÓLYA, G.: *On picture-writing.* Amer. Math. Monthly *63* (1956), 689–697.
[32] PÓLYA, G., SZEGŐ, G.: *Problems and theorems in analysis I., II.* Springer, Berlin 1978.
[33] PRÁŠKOVÁ, Z., LACHOUT, P.: *Základy náhodných procesů.* Karolinum, Praha 1998.
[34] RAMANUJAN, S.: *Collected papers of S. Ramanujan.* Cambridge Univ. Press, London 1927.

[35] Remmert, R.: *Theory of complex functions.* Springer, New York 1990 (překlad 2. vydání knihy *Funktionentheorie I*; existuje též její 4. vydání z r. 1995).
[36] Remmert, R.: *Classical topics in complex function theory.* Springer, New York 1998 (překlad knihy *Funktionentheorie II*).
[37] Rényi, A.: *Teorie pravděpodobnosti.* Academia, Praha 1972.
[38] Štěpán, J.: *Teorie pravděpodobnosti; matematické základy.* Academia, Praha 1987.
[39] Štěpánová, I., Štěpán, J.: *Osm úloh o kombinatorické pravděpodobnosti.* Matematika–Fyzika–Informatika *3* (1993/94), 112–119, 175–181, 230–235.
[40] Tucciarone, J.: *The development of the theory of summable divergent series from 1880 to 1925.* Arch. for History of Exact Sci. *10* (1973), 7–40.
[41] Vandermonde, A.: *Mémoire sur des irrationnelles de différents ordres avec une application au cercle.* In: Histoire de l'Académie Royale des Sciences, part 1 (1772), 71–72.
[42] Veselý, J.: *Zlatý řez a co vše s ním souvisí.* Učitel matematiky *7* (1998), 14–24.
[43] Weil, A.: *Number theory: an approach through history, from Hammurapi to Legendre.* Birkhäuser, Boston 1984 (3. vydání vyšlo v r. 1998).
[44] Wilf, H. S.: *Generatingfunctionology.* Academic Press, San Diego 1990 (2. vydání vyšlo v r. 1994).
[45] Zítek, F.: *Vytvořující funkce.* Mladá fronta, Praha 1972.

70 let Štefánikovy hvězdárny na pražském Petříně

Jaroslav Soumar, Praha

Historie petřínské observatoře se hemží zvraty, problémy i změnami. Naštěstí pro astronomy-historiky, vždyť co by to bylo za pamětihodnost, kdyby její historie byla fádní a nezajímavá, nebo kdyby se omezovala na to, že hvězdárnu založil ten a ten roku toho a toho, protože tehdy na to byly peníze. Oč lépe se sleduje napínavé dějství psané historií, i když, pravda, závěr (tedy současnost) je známa již od začátku.

Z dob dávných

První doloženou (a dodnes dochovanou) stavbou na místě dnešní Štefánikovy hvězdárny je Hladová zeď. Na Petříně (či tehdy spíše na Laurenzibergu) ji v letech 1360 až 1362 nechal vystavět císař Karel IV. Bohuslav Balbín píše, že „Karel proto tak činil, aby milované město rodné před úkladem nepřátel ochránil a též proto, aby lidu pražskému, hladem právě strádajícímu, výživy poskytl. Císař nazýval dělníky na

Mgr. Jaroslav Soumar (1965) absolvoval PedF UK, je vedoucím oddělení pro mimoškolní vzdělávání na Štefánikově hvězdárně v Praze. Zabývá se historií astronomie.